Problème 1

Il s'agit d'intérêts composés.

	Résoudre :	Vos réponses :
(a)	On place une somme de 100'000 € à un taux annuel de 2% pendant 5 ans. Quel intérêt produira-t-elle ?	10'408,08 €
(b)	On place une somme de 100'000 € pendant 6 années et on obtient la somme de 115'969.35 €. Déterminer le taux annuel d'intérêt.	2,5%
(c)	On place une somme de 100'000 € à un taux annuel de 5 % pendant un certain temps et on obtient la somme de 200'000 €. Déterminer le nombre d'années du placement.	14,2 ans
(d)	Une somme a été placée au taux de 3 % il y a 5 ans en arrière. Aujourd'hui elle représente 115'927.40 €. Déterminer la somme initiale.	100'000 €
(e)	Après combien d'années une somme de 100'000 € placée à un taux de 4 % et une somme de 200'000 € placée à un taux de 2 % auront-elle la même valeur acquise ?	35,7 ans

Développement :

(a) On a la formule $C_n = C_0(1+t)^n$, où C_n est le capital après $n=5$ ans, C_0 est le capital de départ $= 100'000$ €, t est le taux annuel $= 2\% = 0{,}02$ et n est le nombre d'années $= 5$.

On a $C_5 = 100'000\,(1+0{,}02)^5 = 110'408{,}08$.

L'intérêt produit est donc $C_5 - C_0 = 110'408{,}08 - 100'000 = 10'408{,}08$.

(b) On a la formule $C_n = C_0(1+t)^n$ où $C_n = C_6 = 115'969{,}35$ €, $C_0 = 100'000$ €, $n=6$ et t est le taux cherché.

On a $115'969{,}35 = 100'000\,(1+t)^6 \Rightarrow (1+t)^6 = 1{,}1596935 \Rightarrow 1+t = \sqrt[6]{1{,}1596935} \cong$
$\cong 1{,}025 \Rightarrow t \cong 0{,}025 = 2{,}5\%$.

(c) On a la formule $C_n = C_0(1+t)^n$ où $C_n = 200'000$ €, $C_0 = 100'000$ €, $t = 5\% = 0{,}05$.

On a $200'000 = 100'000\,(1+0{,}05)^n \Rightarrow 1{,}05^n = 2 \Rightarrow \log(1{,}05^n) = \log(2)$
$\Rightarrow n\log(1{,}05) = \log(2) \Rightarrow n = \frac{\log(2)}{\log(1{,}05)} \cong 14{,}2$.

(d) On a la formule $C_n = C_0(1+t)^n$ où $C_n = 115'927{,}40$, $t = 3\% = 0{,}03$ et $n=5$.

On a $115'927{,}4 = C_0(1+0{,}03)^5 \Rightarrow C_0 = \frac{115'927{,}4}{1{,}03^5} \cong 100'000$ €

(e) $100'000$ € à 4% : $C_n = 100'000\,(1+0{,}04)^n = 100'000 \cdot 1{,}04^n$.

$200'000$ € à 2% : $C_n' = 200'000\,(1+0{,}02)^n = 200'000 \cdot 1{,}02^n$.

$C_n = C_n' \Rightarrow 100'000 \cdot 1{,}04^n = 200'000 \cdot 1{,}02^n \Rightarrow \frac{1{,}04^n}{1{,}02^n} = \frac{200'000}{100'000} \Rightarrow \left(\frac{1{,}04}{1{,}02}\right)^n = 2$

$\Rightarrow \log\left(\left(\frac{1{,}04}{1{,}02}\right)^n\right) = \log(2) \Rightarrow n\log\left(\frac{1{,}04}{1{,}02}\right) = \log(2) \Rightarrow n = \frac{\log(2)}{\log\left(\frac{1{,}04}{1{,}02}\right)} \cong 35{,}7$.

Problème 2

Résoudre :	Vos réponses :
(a) $1+\sqrt{8x-4}=2x-3$	$x=5$
(b) $\frac{5}{4}\left(\frac{x}{3}-1\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{x}{5}-1\right)=2$	$x=15$
(c) $\begin{cases}(x-1)(x-4)+1<(x-3)^2\\ \frac{x-5}{6}<\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\end{cases}$	$-1<x<4$ ou $x\in\,]-1;4[$

Développement :

(a)
$$1+\sqrt{8x-4}=2x-3 \qquad -1$$
$$\sqrt{8x-4}=2x-4 \qquad (\ )^2$$
$$8x-4=(2x-4)^2 \qquad \text{Distributivité (identité remarquable)}$$
$$8x-4=4x^2-16x+16 \qquad -8x+4$$
$$4x^2-24x+20=0 \qquad :4$$
$$x^2-6x+5=0$$
$$a=1,\ b=-6,\ c=5 \Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{6\pm4}{2}=\begin{cases}\frac{6+4}{2}=5\\ \frac{6-4}{2}=1\end{cases}$$

vérification : $x=5 \Rightarrow 1+\sqrt{8x-4}=1+\sqrt{40-4}=1+\sqrt{36}=1+6=7$ et $2x-3=2\cdot5-3=10-3=7$ $\Big\}$ = OK

$x=1 \Rightarrow 1+\sqrt{8x-4}=1+\sqrt{8-4}=1+\sqrt{4}=1+2=3$ et $2x-3=2\cdot1-3=2-3=-1$ $\Big\}\neq$ not OK

(b)
$$\frac{5}{4}\left(\frac{x}{3}-1\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{x}{5}-1\right)=2 \qquad \text{Distributivité}$$
$$\frac{5x}{12}-\frac{5}{4}-\frac{3x}{10}+\frac{3}{2}=2 \qquad \text{Dénominateur commun : } 60$$
$$\frac{25x}{60}-\frac{75}{60}-\frac{18x}{60}+\frac{90}{60}=\frac{120}{60} \qquad \cdot 60$$
$$25x-75-18x+90=120 \qquad \text{Réduction}$$
$$7x+15=120 \qquad -15$$
$$7x=105 \qquad :7$$
$$x=15$$

(c)
$$(x-1)(x-4)+1<(x-3)^2 \qquad \text{Distributivité}$$
$$x^2-4x-x+4+1<x^2-6x+9 \qquad \text{Réduction}$$
$$x^2-5x+5<x^2-6x+9 \qquad -x^2$$
$$-5x+5<-6x+9$$

suite page suivante

$$-5x+5 < -6x+9 \quad \Big| \; +6x$$
$$x+5 < 9 \quad \Big| \; -5$$
$$x < 4$$

$$\frac{x-5}{6} < \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \quad \Big| \; \text{Dénominateur commun : } 6$$
$$\frac{x-5}{6} < \frac{2x}{6} - \frac{4}{6} \quad \Big| \; \cdot 6$$
$$x-5 < 2x-4 \quad \Big| \; -x$$
$$-5 < x-4 \quad \Big| \; +4$$
$$-1 < x$$

On a donc $x<4$ et $-1<x$, ce que l'on peut écrire $-1<x<4$

ou $x \in]-1;4[$

Problème 3

Une urne contient 10 enveloppes contenant chacune 10 francs, 5 enveloppes contenant chacune 20 francs et 3 enveloppes contenant chacune 50 francs. On tire simultanément **3 enveloppes**.

Déterminer la probabilité des événements suivants :		Vos réponses :
(a)	Une enveloppe contient 10 francs et les 2 autres 20 francs	$\frac{25}{204} \cong 0,1225 = 12,25\%$
(b)	Une seule enveloppe parmi les 3 contient 50 francs	$\frac{105}{272} \cong 0,3860 = 38,60\%$
(c)	Les 3 enveloppes contiennent le même montant	$\frac{131}{816} \cong 0,1605 = 16,05\%$
(d)	Au moins une enveloppe contient 10 francs	$\frac{95}{102} \cong 0,9314 = 93,14\%$

Développement :

On a $10+5+3=18$ enveloppes au total.

On utilise la définition de la probabilité : $p(A)=\frac{n(A)}{N}$, où $n(A)$ est le nombre de cas favorables à l'événement A et N le nombre de cas possibles.

On ne tient pas compte de l'ordre des enveloppes tirées. On a donc des combinaisons.

On tire 3 enveloppes parmi les 18. On a donc $N = C_3^{18} = 816$.

(a) $n(A) = \underbrace{C_1^{10}}_{\text{1 enveloppe parmi les 10 à 10.-}} \cdot \underbrace{C_2^{5}}_{\text{2 enveloppes parmi les 5 à 20.-}} = 10 \cdot 10 = 100 \Rightarrow p(A) = \frac{100}{816} = \frac{25}{204} \cong 0,1225 = 12,25\%$

(b) $n(A) = \underbrace{C_1^{3}}_{\text{1 enveloppe parmi les 3 à 50.-}} \cdot \underbrace{C_2^{15}}_{\text{2 enveloppes parmi les 15 autres}} = 3 \cdot 105 = 315 \Rightarrow p(A) = \frac{315}{816} = \frac{105}{272} \cong 0,3860 = 38,60\%$

(c) $n(A) = \underbrace{C_3^{10}}_{\text{3 enveloppes à 10.-}} + \underbrace{C_3^{5}}_{\text{3 enveloppes à 20.-}} + \underbrace{C_3^{3}}_{\text{3 enveloppes à 50.-}} = 120+10+1 = 131 \Rightarrow p(A) = \frac{131}{816} \cong 0,1605 = 16,05\%$

(d) $p(A) = 1 - p(\text{contraire de A}) = 1 - p(\text{aucune enveloppe à 10.-}) = 1 - \frac{\overbrace{C_3^8}^{\text{3 enveloppes parmi les 8 qui n'ont pas 10.-}}}{816}$

$= 1 - \frac{56}{816} = \frac{760}{816} = \frac{95}{102} \cong 0,9314 = 93,14\%$

Problème 4

Soit la parabole $y_p = 0.5x^2 + 3x - 1$ et la droite $y_d = 3x + 1$

		Vos réponses :
(a)	Calculer pour la parabole les coordonnées du sommet	$S(-3;-5,5)$
(b)	Calculer pour la parabole les coordonnées des points d'intersection avec les axes	$(-6,317;0)$ et $(0,317;0)$ et $(0;-1)$
(c)	Calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite et de la parabole	$(-2;-5)$ et $(2;7)$
(d)	Représenter dans un même système la droite et la parabole	Votre graphique doit figurer sur la page suivante !

Développement :

(a) Pour une parabole ax^2+bx+c, le sommet est $S(x_S;y_S)$, où $x_S = -\frac{b}{2a}$ et $y_S = ax_S^2 + bx_S + c$.
On a $a=0,5$, $b=3$ et $c=-1$. Ainsi, $x_S = -\frac{3}{2 \cdot 0,5} = -3$ et $y_S =$
$= 0,5\cdot(-3)^2 + 3\cdot(-3) - 1 = 4,5 - 9 - 1 = -5,5 \Rightarrow S(-3;-5,5)$

(b) Intersection avec l'axe x: $y_p = 0 \Rightarrow 0,5x^2+3x-1=0$, $a=0,5$, $b=3$, $c=-1$

$\Rightarrow x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 0,5\cdot(-1)}}{2\cdot 0,5} = \frac{-3\pm\sqrt{9+2}}{1} = -3\pm\sqrt{11} = \begin{cases} -3+\sqrt{11} \cong 0,317 \\ -3-\sqrt{11} \cong -6,317 \end{cases}$

$\Rightarrow (-3,158;0)$ et $(0,158;0)$.

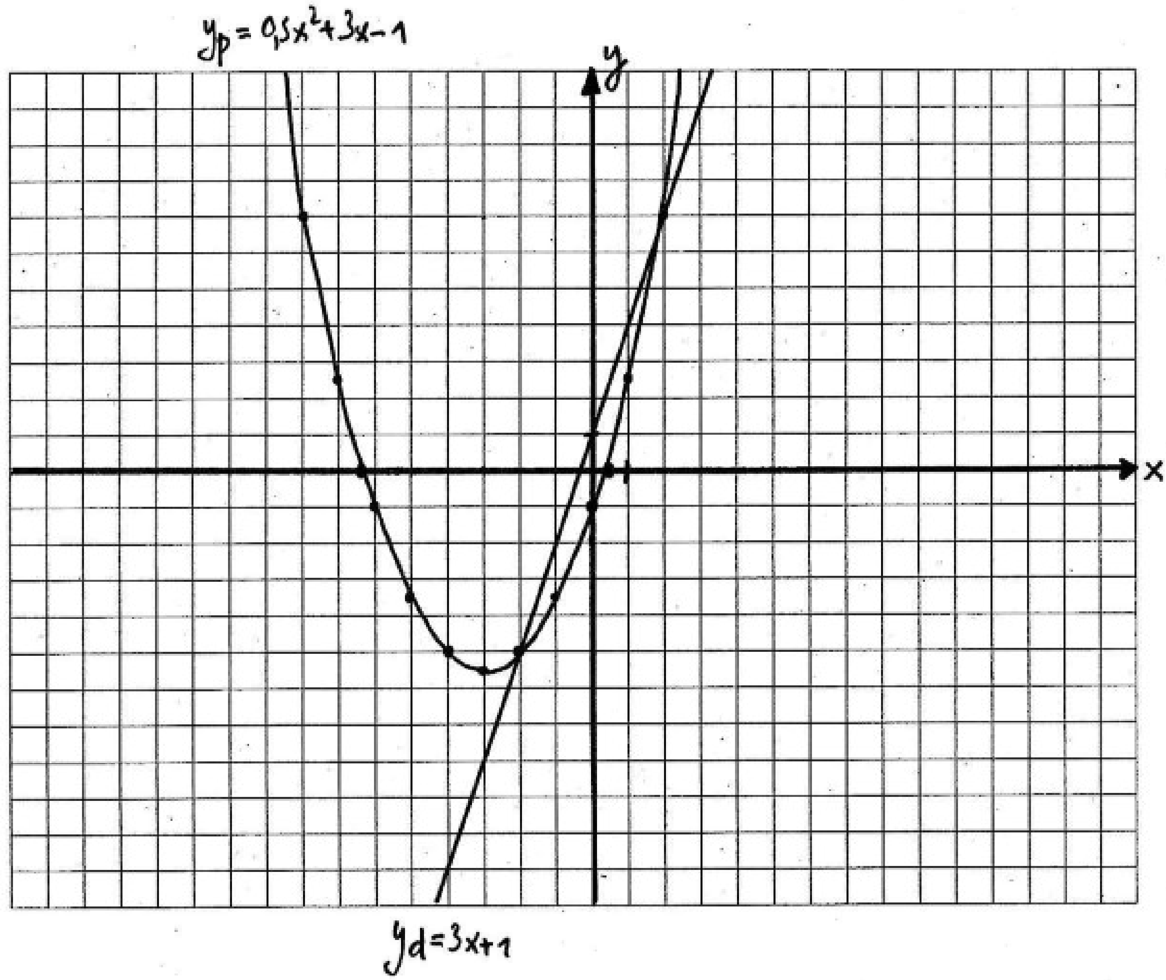
Intersection avec l'axe y: $x=0 \Rightarrow y_p = -1 \Rightarrow (0;-1)$.

(c) $y_p = y_d \Rightarrow 0,5x^2+3x-1 = 3x+1 \Rightarrow 0,5x^2 - 1 = 1 \Rightarrow 0,5x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 4$
$\Rightarrow x = -2$ ou 2.
$x=-2 \Rightarrow y_p = y_d = 3\cdot(-2)+1 = -6+1 = -5 \Rightarrow (-2;-5)$
$x = 2 \Rightarrow y_p = y_d = 3\cdot 2 + 1 = 6+1 = 7 \Rightarrow (2;7)$

Problème 4 – suite

Soit la parabole $y_p = 0.5x^2 + 3x - 1$ et la droite $y_d = 3x + 1$

Représenter dans le repère ci-dessous la droite et la parabole.



Problème 5

Un grossiste vend des grille-pain 20 Frs la pièce.
Le coût de fabrication de x grille-pain est $C(x) = 0.1x^2 + 10x + 90$

		Vos réponses :
(a)	Calculer les points morts de la fonction Profit (Bénéfice)	Les points morts sont en $x=10$ et $x=90$.
(b)	Calculer le profit maximal	160.–
(c)	Le prix de vente unitaire est de 20 francs si le client achète au plus 30 grille-pain. S'il en achète 31, le prix de vente unitaire et de 19.90 frs, s'il en achète 32, le prix de vente unitaire est de 19.80 frs et ainsi de suite (chaque grille-pain supplémentaire procure un rabais de 10 centimes) Dans ces conditions, calculer la quantité commandée qui maximisera le revenu du grossiste	115

Développement :

(a) Le profit est donné par la différence entre le chiffre d'affaire et les coûts.
Le chiffre d'affaire pour x grille-pain vendus est $20x$.
Le coût est $C(x) = 0{,}1x^2 + 10x + 90$.
Le profit est donc $P(x) = 20x - C(x) = 20x - (0{,}1x^2 + 10x + 90) =$
$= 20x - 0{,}1x^2 - 10x - 90 = -0{,}1x^2 + 10x - 90$.
Les points morts du profit sont les x tels que $P(x) = 0$.
$P(x) = 0 \Rightarrow -0{,}1x^2 + 10x - 90 = 0$, $a = -0{,}1$, $b = 10$, $c = -90$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot(-0{,}1)(-90)}}{2\cdot(-0{,}1)} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 36}}{-0{,}2} = \frac{-10 \pm \sqrt{64}}{-0{,}2} =$$

$$= \frac{-10 \pm 8}{-0{,}2} = \begin{cases} \frac{-10+8}{-0{,}2} = \frac{-2}{-0{,}2} = 10 \\ \frac{-10-8}{-0{,}2} = \frac{-18}{-0{,}2} = 90. \end{cases}$$

(b) D'après (a), le profit est $P(x) = -0{,}1x^2 + 10x - 90$.
Le profit maximal correspondra à la 2e coordonnée du sommet de cette parabole.
Pour une parabole $ax^2 + bx + c$, le sommet est donné par $S(x_S; y_S)$ où $x_S = -\frac{b}{2a}$ et $y_S = ax_S^2 + bx_S + c$.
Ici $a = -0{,}1$, $b = 10$ et $c = -90$. On a $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2\cdot(-0{,}1)} = \frac{10}{0{,}2} = 50$

et $y_S = -0{,}1\cdot 50^2 + 10\cdot 50 - 90 = -250 + 500 - 90 = 160$.

suite sur feuille annexe

(c) Si le client achète 30 pièces à 20.– la pièce, le revenu est de $30 \cdot 20$.
Si le client achète 31 pièces à 19,90 la pièce, le revenu est de $31 \cdot 19{,}9$.
Si le client achète 32 pièces à 19,80 la pièce, le revenu est de $32 \cdot 19{,}8$.
Si le client achète $30+x$ pièces à $20-0{,}1 \cdot x$ la pièce, le revenu est de

$$(30+x)(20-0{,}1 \cdot x) = 600 - 3x + 20x - 0{,}1x^2 = -0{,}1x^2 + 17x + 600.$$

Il faut chercher x pour que le revenu soit maximum, autrement dit trouver la 1e coordonnée du sommet. Pour une parabole ax^2+bx+c, la 1e coordonnée du sommet est donnée par $x_S = -\frac{b}{2a}$.

Ici, $a = -0{,}1$, $b = 17$ et $c = 600$. On a donc $x_S = -\frac{17}{2 \cdot (-0{,}1)} = \frac{17}{0{,}2} = 85$.

Ainsi, si $x = 85$, le revenu est maximum.
La quantité commandée qui maximisera le revenu est donc $85 + 30 = 115$.

Problème 6

Selon une étude effectuée par le directeur d'une fabrique de vêtements, le coût de confection de « x » chemises est constitué de 510 Frs de frais fixes plus 8 Frs par chemise.
Le prix de vente est de 25 Frs par chemise.

		Vos réponses :
(a)	Déterminer l'équation du Coût	$C(x) = 510 + 8x$
(b)	Déterminer l'équation des Recettes (Revenus)	$R(x) = 25x$
(c)	Déterminer, par calcul, son seuil de rentabilité (point mort)	$x = 30$
(d)	Quel prix de vente devra-t-il fixer pour couvrir les coûts de fabrication de 200 chemises après la vente de seulement 50 chemises	42,20 Frs.

Développement :

(a) Avec x chemises confectionnées, le Coût est donné par $C(x) = 510 + 8x$

(b) Avec x chemises vendues, le revenu est donné par $R(x) = 25x$

(c) Le seuil de rentabilité est le x tel que $C(x) = R(x)$.

$C(x) = R(x) \Rightarrow 510 + 8x = 25x \Rightarrow 510 = 17x \Rightarrow x = 30.$

(d) Coût de fabrication de 200 chemises $(x = 200) \Rightarrow C(x) = 510 + 8 \cdot 200 = 2110.$

Revenu de 50 chemises vendues $(x = 50) \Rightarrow R(x) = 50 \cdot p$, où p est le prix à déterminer.

$C(x) = R(x) \Rightarrow 2110 = 50 \cdot p \Rightarrow p = 42,2.$

Problème 7

Pour couvrir le terrain de foot de Xamax, une entreprise a utilisé 6'000 plaques carrées de gazon naturel. Une autre entreprise propose de couvrir le terrain de foot avec 1500 plaques carrées de gazon synthétique dont la taille est de 1 m de plus de chaque côté.
Déterminer la taille d'une plaque de gazon naturel ainsi que la surface du terrain de foot.

Votre réponse :	taille = 1m, surface du terrain = 6000 m^2

Développement :

Notons x le côté d'une plaque carrée de gazon naturel.
L'aire du terrain de foot est alors $6000x^2$.
Le côté d'une plaque carrée de gazon synthétique est $x+1$.
L'aire du terrain de foot est alors $1500(x+1)^2$.

On doit donc résoudre $6000x^2 = 1500(x+1)^2$ — Développement (identité remarquable)

$6000x^2 = 1500(x^2+2x+1)$ — Distributivité

$6000x^2 = 1500x^2+3000x+1500$ — $-1500x^2-3000x-1500$

$4500x^2-3000x-1500 = 0$ — $:100$

$45x^2-30x-15 = 0$ — $:5$

$9x^2-6x-3 = 0$ — $:3$

$3x^2-2x-1 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot3\cdot(-1)}}{2\cdot3} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{6} = \frac{2\pm\sqrt{16}}{6} = \frac{2\pm4}{6} = \begin{cases} \frac{2+4}{6} = \frac{6}{6} = 1\text{ m} \\ \frac{2-4}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \rightarrow \text{à exclure car } x>0. \end{cases}$$

Avec $x=1$, l'aire du terrain de foot est $6000\cdot1^2 = 6000\text{ m}^2$