Lycée Denis-de-Rougemont Mathématiques de niveau 1

EXAMEN DE MATURITE 2011
CORRIGE

Exercice 1

Première partie :

On a la fonction $x \longmapsto y = (ax^2+1)e^{-2x}$.

a) La fonction coupe l'axe des x s'il existe un (ou des x) tel que $f(x)=0$.

$f(x)=0 \Rightarrow (ax^2+1)e^{-2x}=0 \Rightarrow ax^2+1=0$ (car $e^{-2x}>0$ pour toute valeur de x)

$\Rightarrow ax^2=-1 \Rightarrow x^2=-\frac{1}{a}$; pour que x existe, on doit avoir $-\frac{1}{a}\geqslant 0$, et, donc $a<0$ (si $a=0$, la fonction s'écrit $y=e^{-2x}$, qui est toujours strictement positive).

Ainsi la fonction coupe l'axe x si $a<0$.

b) La fonction admet un seul point à tangente horizontale s'il existe un seul x tel que $f'(x)=0$.

On a $f(x)=u\cdot v$ avec $u=ax^2+1$ et $v=e^{-2x}$.

De plus, $u'=2ax$ et $v'=-2e^{-2x}$.

Ainsi $f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v' = 2axe^{-2x}+(ax^2+1)(-2e^{-2x}) =$

$= 2axe^{-2x}-2ax^2e^{-2x}-2e^{-2x} = (2ax-2ax^2-2)e^{-2x} =$

$= 2(-ax^2+ax-1)e^{-2x}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2(-ax^2+ax-1)e^{-2x}=0 \Rightarrow -ax^2+ax-1=0$ $(e^{-2x}>0)$

$\Rightarrow ax^2-ax+1=0$, équation du 2e degré de la forme $Ax^2+Bx+C=0$ avec $A=a$, $B=-a$ et $C=1$.

On sait qu'une équation du 2e degré a une unique solution si son discriminant Δ est nul.

Ici $\Delta = B^2-4AC = (-a)^2-4\cdot a\cdot 1 = a^2-4a$.

$\Delta=0 \Rightarrow a^2-4a=0 \Rightarrow a(a-4)=0 \Rightarrow$ soit $a=0$, soit $a=4$.

Or, on a forcément $a\neq 0$, car, sinon, l'équation du 2e degré $ax^2-ax+1=0$ équivaudrait à $1=0$, ce qui est impossible.

Par conséquent, pour que la fonction admette un unique point à tangente horizontale, il faut que $a=4$.

On a maintenant la fonction $f : x \longmapsto y = (4x^2+1)e^{-2x}$.

c) Domaine de définition: $D = \mathbb{R}$ clairement.

Intersection avec l'axe x: comme $a = 4 > 0$, d'après a), f ne coupe pas l'axe x.

Intersection avec l'axe y: on pose $x = 0 \Rightarrow y = (4 \cdot 0^2 + 1)e^{-2\cdot 0} = 1 \cdot e^0 = 1$

$\Rightarrow$ point $(0;1)$.

Tableau de signes:

x	
signes de $f(x)$	$+$

Asymptote verticale: aucune, puisque $D = \mathbb{R}$.

Asymptote non verticale: comme la fonction contient e^{-2x}, il ne peut pas y avoir d'asymptote oblique; on a $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^2+1)e^{-2x} =$
$= "+\infty \cdot +\infty" = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (4x^2+1)e^{-2x} = "+\infty \cdot 0" = 0$
(puisque l'exponentielle gagne toujours);
par conséquent, $y = 0$ est une asymptote horizontale à $+\infty$.

Dérivée: D'après b), la dérivée de $f(x) = (ax^2+1)e^{-2x}$ est $f'(x) = 2(-ax^2+ax-1)e^{-2x}$.

Comme $a = 4$, on obtient $f'(x) = 2(-4x^2+4x-1)e^{-2x} =$
$= -2(4x^2-4x+1)e^{-2x} = -2(2x-1)^2 e^{-2x}$.

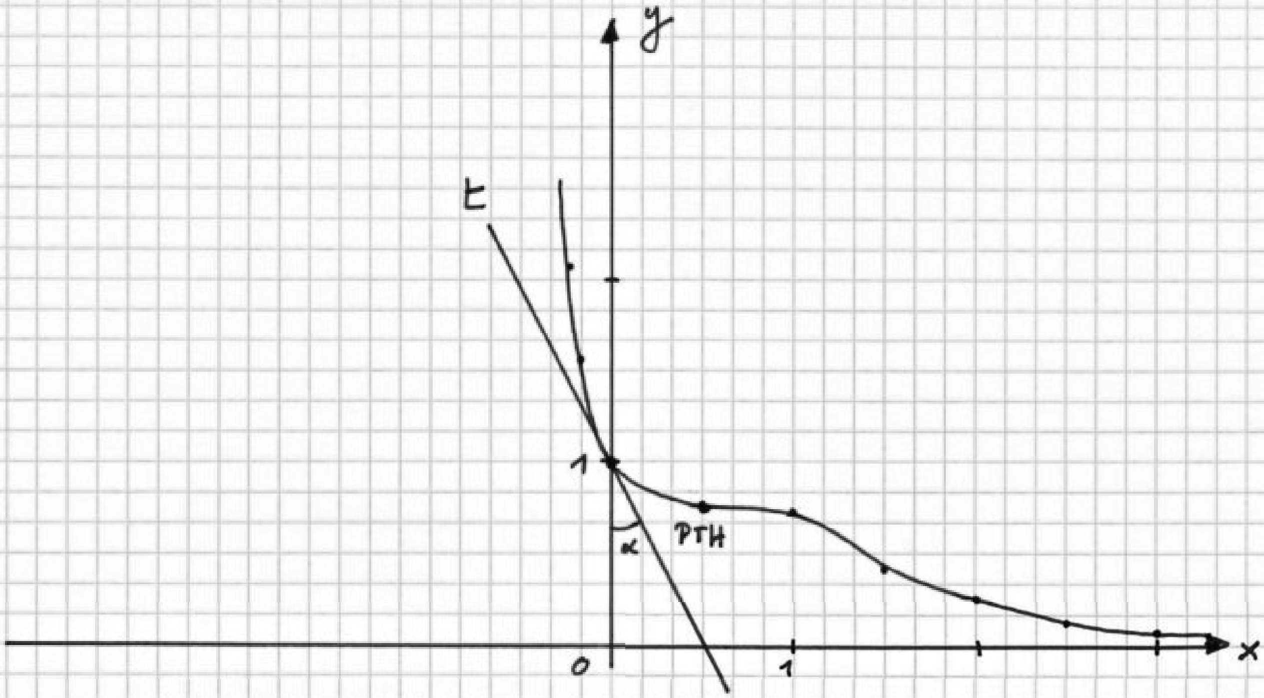
Point à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow -2(2x-1)^2 e^{-2x} = 0 \Rightarrow 2x-1 = 0$ $(e^{-2x} > 0)$
$\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$;
avec $x = \frac{1}{2}$, on a $f(x) = \left(4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)e^{-2\cdot\frac{1}{2}} = (1+1)e^{-1} = 2e^{-1} =$
$= \frac{2}{e}$;
les coordonnées du point à tangente horizontale sont
$\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{e}\right)$.

Tableau de variation (ou de croissance):

x		$\frac{1}{2}$	
signes de $f'(x)$	$-$	0	$-$
croissance ou décroissance de $f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

On en déduit que le point $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{e}\right)$ est un point d'inflexion.

Graphe:



d) La tangente au graphe de f en son point d'intersection avec l'axe des y, dont $(0;1)$, est donné par $y=mx+h$, où $m=f'(0)$ et h= ordonnée à l'origine $=1$.
D'après c), $f'(x)=-2(2x-1)^2e^{-2x}$.
Ainsi $m=f'(0)=-2(2\cdot 0-1)^2e^{-2\cdot 0}=-2(-1)^2e^0=-2\cdot 1\cdot 1=-2$.
L'équation de la tangente est donc $y=-2x+1$.
Pour le dessin de la tangente, voir ci-dessus.

e) L'angle entre la tangente t et l'axe des y est l'angle $\widehat{OAB}$ où $O=(0;0)$, $A=(0;1)$ et $B(\frac{1}{2};0)$ (B est l'intersection de t avec l'axe x). Appelons α cette angle.
On a $OA=1$ et $OB=\frac{1}{2}$.
Par la trigonométrie, on a tan=opp/adj $\Rightarrow \tan(\alpha)=\frac{OB}{OA}=\frac{1/2}{1}=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=26,565°$.
L'angle entre la tangente t et l'axe des y est donc de $26,565°$.

f) On a $f(x)=(4x^2+1)e^{-2x}$.
On sait qu'une primitive de f sera de la forme $F(x)=(Ax^2+Bx+C)e^{-2x}$.
Il faut déterminer A, B et C.
On doit avoir $F'(x)=f(x)$.
$F(x)=u\cdot v$ avec $u=Ax^2+Bx+C$ et $v=e^{-2x}$.
On a $u'=2Ax+B$ et $v'=-2e^{-2x}$.
Ainsi $F'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=(2Ax+B)\cdot e^{-2x}+(Ax^2+Bx+C)(-2e^{-2x})=$
$=(2Ax+B-2Ax^2-2Bx-2C)e^{-2x}=(-2Ax^2+(2A-2B)x+B-2C)e^{-2x}$.
Par identification des termes en x de $F'(x)$ et $f(x)$, on obtient le système

$$\begin{cases} -2A = 4 & (1) \\ 2A - 2B = 0 & (2) \\ B - 2C = 1 & (3) \end{cases}$$

De (1), on tire $A = \frac{4}{-2} = 2$.

Dans (2), cela donne $2 \cdot (-2) - 2B = 0 \Rightarrow -4 - 2B = 0 \Rightarrow 2B = -4 \Rightarrow B = -2$.

Dans (3), cela donne $-2 - 2C = 1 \Rightarrow -2C = 3 \Rightarrow C = -\frac{3}{2}$.

Une primitive de $f(x)$ est donc $F(x) = \left(-2x^2 - 2x - \frac{3}{2}\right) e^{-2x}$ (+ constante).

Deuxième partie:

g) Comme h_3 est le symétrique de h_1 par rapport à l'axe des abscisses (axe horizontal) et comme $h_1(x) = x^3$, on a $h_3 : x \mapsto y = -x^3$.
Comme h_4 est le symétrique de h_2 par rapport à l'axe des abscisses et comme $h_2(x) = \sqrt[3]{x}$, on a $h_4 : x \mapsto y = -\sqrt[3]{x}$.

h) L'aire du pétale blanc du 1^e quadrant est donné par $\int^a (h_2(x) - h_1(x))\,dx$ ("la fonction du haut moins la fonction du bas"), où a est la première coordonnée de A. Comme $A(1; 1)$, on a $a = 1$.
Ainsi l'aire du pétale blanc du 1^e quadrant est $\int_0^1 (h_2(x) - h_1(x))\,dx$.
Cherchons une primitive $H(x)$ de $h_2(x) - h_1(x)$.
Une primitive de x^n est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ (voir "formulaires et tables").
Ainsi une primitive de $h_2(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ est $\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{x^{4/3}}{4/3} = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}}$.
De plus une primitive de $h_1(x) = x^3$ est $\frac{x^4}{4}$.
Par conséquent, une primitive de $h_2(x) - h_1(x)$ est $H(x) = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{x^4}{4}$.

On a alors $\int_0^1 (h_2(x) - h_1(x))\,dx = H(1) - H(0)$.

$H(1) = \frac{3}{4} 1^{4/3} - \frac{1^4}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ et $H(0) = \frac{3}{4} 0^{4/3} - \frac{0^4}{4} = 0$.

Ainsi l'aire du pétale blanc du 1^e quadrant est $H(1) - H(0) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.
On en déduit que l'aire des 4 pétales blancs (isométriques) est $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.
Calculons maintenant l'aire du cercle.
Son rayon est donné par la distance entre l'origine et A. Ainsi le rayon est $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. L'aire du cercle est ainsi $\pi \cdot r^2 = \pi(\sqrt{2})^2 = \pi \cdot 2 = 2\pi$.

On en déduit que l'aire de la surface grisée est $2\pi - 2 = 2(\pi - 1) \cong 4{,}28$.

Exercice 2

Première partie:

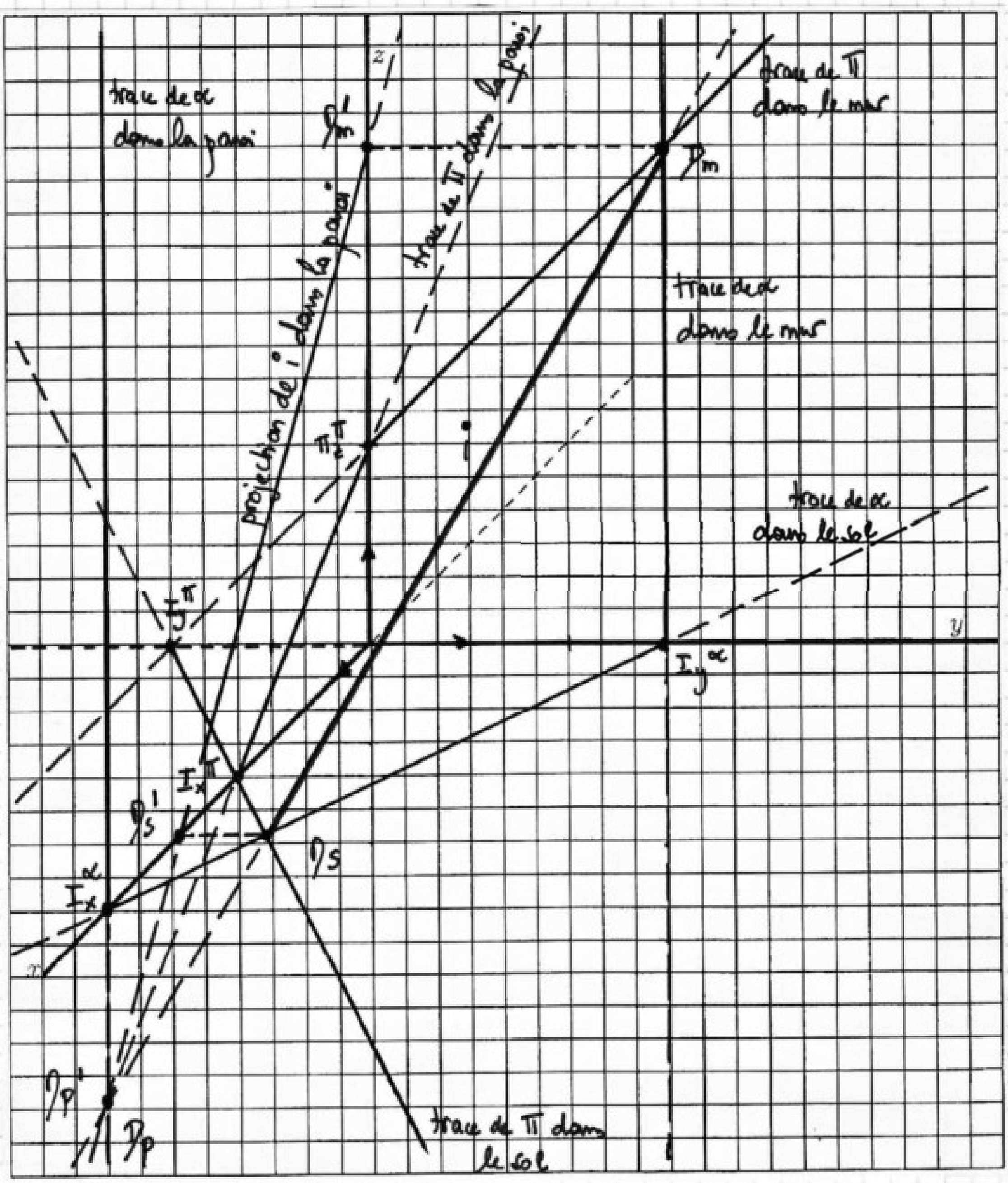
a) Pour représenter un plan, on commence par chercher ses intersections avec les axes de référence :
$I_x(x;0;0)$ avec x solution de $ax+by+cz+d=0$ où $y=z=0$;
$I_y(0;y;0)$ avec y solution de $ax+by+cz+d=0$ où $x=z=0$;
$I_z(0;0;z)$ avec z solution de $ax+by+cz+d=0$ où $x=y=0$.
On place ces 3 points dans le système d'axes et on peut ensuite tracer les traces du plan dans les plans de référence en tenant compte de leurs parties visibles et invisibles, ce qui complètera la représentation du plan.

Plan π: $x-2y+2z-4=0$: $y=z=0 \Rightarrow x-4=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow I_x^{\pi}(4;0;0)$;
$x=z=0 \Rightarrow -2y-4=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow I_y^{\pi}(0;-2;0)$;
$x=y=0 \Rightarrow 2z-4=0 \Rightarrow z=4 \Rightarrow I_z^{\pi}(0;0;2)$.

Plan α: $3x+8y-24=0$: $y=z=0 \Rightarrow 3x-24=0 \Rightarrow x=8 \Rightarrow I_x^{\alpha}(8;0;0)$;
$x=z=0 \Rightarrow 8y-24=0 \Rightarrow y=3 \Rightarrow I_y^{\alpha}(0;3;0)$;
$x=y=0 \Rightarrow -24=0$, impossible $\Rightarrow I_z^{\alpha}$ n'existe pas
$\Rightarrow \alpha$ est parallèle à l'axe z et les traces de α dans la paroi et le mur sont parallèles à l'axe z.

Pour les représentations de π et de α, voir la feuille annexe.

b) Pour dessiner la droite d'intersection i de π et α, on cherche ses traces dans les plans de référence.
Dans le sol, la trace D_s de i sera l'intersection des traces de π et α dans le sol.
Dans le mur, la trace D_m de i sera l'intersection des traces de π et α dans le mur.
Dans la paroi, la trace D_p de i sera l'intersection des traces de π et α dans la paroi.
On dessine i en reliant D_s, D_m et D_p (ils sont alignés), en marquant les parties visibles et invisibles.
Pour dessiner la projection de i dans la paroi, on projette D_s, D_m et D_p dans la paroi : $D_s \rightarrow D_s'$ est sur l'axe y, $D_m \rightarrow D_m'$ est sur l'axe z, $D_p' = D_p$ (puisque D_p est dans la paroi).
On dessine la projection de i dans la paroi en reliant D_s', D_m' et D_p' (ils sont alignés), en marquant les parties visibles et invisibles.



<u>Deuxième partie:</u>

On a le plan $\Pi : x-2y+2z-4=0$ (comme dans la première partie) et la sphère $S: (x-5)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$.

Le centre de la sphère est $K(5;1;2)$ et son rayon est $\sqrt{1}=1$.

c) L'angle aigu φ entre Π et la paroi est donné par $\cos(\varphi) = \dfrac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\cdot\|\vec{n_2}\|}$ où $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont respectivement les vecteurs normaux de Π et la paroi:

Comme $\Pi : x-2y+2z-4=0$, on peut prendre $\vec{n_1} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Un vecteur normal à la paroi est un vecteur parallèle à l'axe y: on peut prendre $\vec{n_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = -2$;

$\|\overrightarrow{n_1}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$;

$\|\overrightarrow{n_2}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$.

On obtient : $\cos(\varphi) = \dfrac{|-2|}{3 \cdot 1} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) \cong 48{,}19°$.

Ainsi l'angle aigu entre Π et la paroi est d'environ $48{,}19°$.

d) La droite p, intersection de Π et de la paroi, est la trace de Π dans la paroi.
D'après a), p passera par $I_x^{\Pi}(4;0;0)$ et $I_z^{\Pi}(0;0;2)$.
Un vecteur directeur de p est ainsi $\overrightarrow{I_x^{\Pi} I_z^{\Pi}} = \overrightarrow{OI_z^{\Pi}} - \overrightarrow{OI_x^{\Pi}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Par simplification par 2, on va prendre $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur de p.
Des équations paramétriques de p sont alors : $\begin{cases} x = 4 - 2\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda . \end{cases}$

e) Pour montrer qu'une sphère est tangente à un plan, il suffit de montrer que la distance du centre de la sphère au plan concerné est égale au rayon de la sphère.

On a $\text{dist}(K;\Pi) = \dfrac{|5 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \dfrac{|5 - 2 + 4 - 4|}{\sqrt{9}} = \dfrac{3}{3} = 1$

$\Rightarrow$ S est tangente à Π.

De plus, l'équation de la paroi est $y = 0$ (puisqu'un de ses vecteurs normaux est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$).
Ainsi $\text{dist}(K; \text{paroi}) = \dfrac{|1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \dfrac{1}{1}$

$\Rightarrow$ S est tangente à la paroi.

Cherchons maintenant les points de contact.
Le point de contact C_{Π} entre la sphère et Π sera l'intersection de Π avec la droite passant par le centre K de la sphère et de vecteur directeur parallèle au vecteur normal de Π.
D'après c), on peut prendre $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal de Π et, donc, comme vecteur directeur de la droite passant par K.
Des équations paramétriques de cette droite sont ainsi :

$$\begin{cases} x = 5 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

L'intersection de cette droite avec $\pi : x - 2y + 2z - 4 = 0$ est donnée, par substitution, par l'équation $5 + \lambda - 2(1 - 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) - 4 = 0$

$\Rightarrow 5 + \lambda - 2 + 4\lambda + 4 + 4\lambda - 4 = 0 \Rightarrow 9\lambda + 3 = 0 \Rightarrow 9\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$.

Avec $\lambda = -\frac{1}{3}$, on a $x = 5 - \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$, $y = 1 - 2(-\frac{1}{3}) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ et $z = 2 + 2(-\frac{1}{3}) =$
$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Le point de contact entre la sphère et π est donc $C_\pi(\frac{14}{3}; \frac{5}{3}; \frac{4}{3})$.

Le point de contact entre la sphère et la paroi sera l'intersection de la paroi avec la droite passant par le centre K de la sphère et de vecteur directeur parallèle au vecteur normal à la paroi. Autrement dit, ce point de contact C_p sera la projection de $K(5; 1; 2)$ sur la paroi, c'est-à-dire $(0; 1; 0)$.

Le point de contact entre la sphère et la paroi est donc $C_p(0; 1; 0)$.

f) Un plan π', parallèle à $\pi : x - 2y + 2z - 4 = 0$, est de la forme $\pi' : x - 2y + 2z + d = 0$ (les coefficients de x, y et z, formant un vecteur normal au plan, doivent être les mêmes pour les 2 plans puisqu'ils sont parallèles.

Comme π' est tangent à la sphère, on doit avoir $\text{dist}(K; \pi') = r$, où $K(5; 1; 2)$ est le centre de la sphère et $r = 1$ est son rayon.

On a $\text{dist}(K; \pi') = \dfrac{|5 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + d|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \dfrac{|7 + d|}{3}$.

Ainsi $\text{dist}(K; \pi') = r \Rightarrow \dfrac{|7+d|}{3} = 1 \Rightarrow |7 + d| = 3$

$\Rightarrow$ soit $7 + d = 3 \Rightarrow d = -4$ (ce qui nous redonne le plan π),
soit $-(7 + d) = 3 \Rightarrow 7 + d = -3 \Rightarrow d = -10$.

Ainsi le plan π' est $\pi' : x - 2y + 2z - 10 = 0$.

g) Comme les distances du centre du cercle au plan π et à la paroi restent constantes (elles valent $r = 1$, rayon de la sphère), la droite décrite par le déplacement du centre de la sphère sera parallèle à la droite p, droite d'intersection de π et de la paroi.

D'après d), un vecteur directeur de p est $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi d est parallèle à $\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ et passe par $K(5;1;2)$.
Des équations paramétriques de d sont donc : $\begin{cases} x = 5-2\lambda \\ y = 1 \\ z = 2+\lambda. \end{cases}$

h) La sphère S s'arrête lorsqu'elle touche le sol.
Cela signifie que le centre de la sphère a une cote de 1 (côte = 3^e coordonnée), puisque le rayon de la sphère est $r=1$.
En outre, le centre de S appartient à la droite d dont des équations paramétriques sont : $\begin{cases} x = 5-2\lambda \\ y = 1 \\ z = 2+\lambda. \end{cases}$

Avec $z=1$, on obtient $2+\lambda=1 \Rightarrow \lambda=-1$.
Avec $\lambda=-1$, on obtient $x=5-2\lambda=5-2(-1)=5+2=7$ et
$y=2+\lambda=2-1=1$.

Le centre de la sphère est donc, lorsqu'elle touche le sol, $(7;1;1)$.

Exercice 3

On notera B un lapin blanc et N un lapin gris.

a) On a soit BN, soit NB.
Ainsi la probabilité que les 2 premiers lapins tirés soient de couleurs différentes est $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}$ (puisqu'il y a 3 B et 2N parmi un total de 5) $= 2\cdot\frac{6}{25} = \frac{12}{25} = 0,48 = 48\%$.

b) Pour un ordre fixé des 2B et 3N tirés, la probabilité est $\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^3 =$
$= 0,02304 = 2,304\%$.
Comme l'ordre n'est pas fixé, on doit calculer le nombre de possibilités de placer 2B et 3N dans des ordres différents. Cela correspond à une combinaison de 2 éléments parmi 5 (ou de 3 éléments parmi 5):
$C^5_2 = 10$.
Ainsi, la probabilité est de $10\cdot 0,02304 = 0,2304 = 23,04\%$.

c) Pour un ordre fixé des 2B et 3N tirés, la probabilité est $0,02304 = 2,304\%$ (voir B).
Le nombre de possibilités de placer 2B et 3N avec les 3N tirés successivement est 3 (NNNBB, BNNNB, BBNNN).
Ainsi, la probabilité est $3\cdot 0,02304 = 0,06912 = 6,912\%$.

d) La probabilité d'obtenir au moins un lapin noir vaut 1 − la probabilité d'obtenir zéro noir.
Lors d'un tirage, la probabilité de tirer zéro noir = la probabilité de tirer un blanc $= \frac{3}{5}$.
Lors de 2 tirages, la probabilité de tirer zéro noir = la probabilité de tirer 2 blancs $= \left(\frac{3}{5}\right)^2$.
Lors de n tirages, la probabilité de tirer zéro noir = la probabilité de tirer n blancs $= \left(\frac{3}{5}\right)^n$.
Par conséquent, sur n tirages, la probabilité d'obtenir au moins 1 noir $= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$.
On doit chercher n tel que $1-\left(\frac{3}{5}\right)^n > 99\% \Rightarrow 1-\left(\frac{3}{5}\right)^n > 0,99$
$\Rightarrow 0,01 > \left(\frac{3}{5}\right)^n$
En prenant le logarithme de chaque côté et en sachant que la fonction log est strictement croissante, ce qui signifie que, si $0<a<b$, alors $\log(a) < \log(b)$, on obtient:
$\left(\frac{3}{5}\right)^n < 0,01 \Rightarrow \log\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n\right) < \log(0,01)$.
Comme $\log(a^n) = n\log(a)$, on trouve $n\log\left(\frac{3}{5}\right) < \log(0,01)$.
Comme, si $0<a<1$, $\log(a)<0$, on trouve $n > \frac{\log(0,01)}{\log(3/5)} \simeq 9,015$.

Comme n doit être entier, on en conclut que $n \geq 11$. Le nombre minimal pour n est $n = 11$.

Par conséquent, le nombre minimal de tirages à effectuer est 11.

e) Comme en a), on a soit BN, soit NB.
Comme un lapin tiré n'est pas remis dans le chapeau, on a ici que la probabilité que les 2 premiers lapins tirés soient de couleurs différentes est $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} =$
$= \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 0{,}6 = 60\%$.

f) C'est une probabilité conditionnelle: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, où A = le troisième lapin tiré est blanc et B = après trois tirages, il reste un lapin de chaque couleur dans le chapeau.
On a $A \cap B$ = le 3e lapin tiré est blanc et, après 3 tirages, il reste un lapin de chaque couleur dans le chapeau. Comme il y a 3B et 2N, on a que $A \cap B$ = dans les 2 premiers lapins tirés, un est blanc, l'autre est noir et le 3e lapin tiré est blanc = soit BNB, soit NBB.
Ainsi $P(A \cap B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$.
De plus, comme il y a 3B et 2N, on a $B = \{BBN ; BNB ; NBB\}$.
Ainsi $P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$.

Par conséquent $P(A|B) = \frac{2/5}{3/5} = \frac{2}{5} : \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2}{3} = 0{,}\overline{6} = 66{,}\overline{6}\ \%$.

g) Si les 3 lapins blancs sont encore dans le chapeau après 2 tirages, cela signifie qu'ils n'ont jamais été tirés (si un avait été tiré, n'étant pas remis dans le chapeau, il n'en resterait plus 3 après 2 tirages dans le chapeau). On a ainsi les possibilités suivantes (G signifie le lapin gris tiré): GG, GN, NG, NN (GG est possible puisque le gris, s'il est tiré, est remis dans le chapeau).
En tenant compte du fait qu'il y a maintenant au total 6 lapins dans le chapeau au départ (3B, 2N et 1G), que le gris est remis si tiré, mais pas un noir, la probabilité cherchée est $p(GG \text{ ou } GN \text{ ou } NG \text{ ou } NN) =$
$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{2}{30} + \frac{2}{30} = \frac{3}{36} + \frac{4}{30} =$
$= \frac{1}{12} + \frac{2}{15} = \frac{13}{60} = 0{,}21\overline{6} = 21{,}\overline{6}\%$.

h) Il n'y a toujours qu'un lapin gris. S'il y a n lapins dans le chapeau, la

probabilité de tirer le lapin gris est $\frac{1}{n}$. Or cette probabilité vaut $6,25\% =$
$= 0,0625$. On doit donc avoir $\frac{1}{n} = 0,0625 \Rightarrow n = \frac{1}{0,0625} = 16$.
Ainsi, il y a maintenant 16 lapins dans le chapeau (y compris le gris).
Si la probabilité de tirer un lapin blanc est de 50%, cela signifie, que, dans les 16 lapins, la moitié sont blancs. Ainsi, il y a 8 lapins blancs dans le chapeau.
Finalement, le nombre de lapins noirs est $16-1-8=7$.
Ainsi, il y a, dans le chapeau, 8 lapins blancs, 7 lapins noirs et 1 lapin gris.