Lycée Denis-de-Rougemont

Mathématiques de niveau 2

EXAMEN DE MATURITE 2011

Corrigé

Exercice 1

On a $f(x) = \begin{cases} g(x) \text{ si } x \in [-2;2] \\ h(x) \text{ si } x \in]-\infty;2[\cup]2;+\infty[\end{cases} = \begin{cases} 3\sqrt{-4+x^2} \text{ si } x<-2 \\ 3\sqrt{4-x^2} \text{ si } -2 \le x \le 2 \\ 3\sqrt{-4+x^2} \text{ si } x>2. \end{cases}$

a) Etude de $g(x) = 3\sqrt{4-x^2}$:

Domaine de définition: on doit avoir $4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_g = [-2;2]$.

Parité: $g(-x) = 3\sqrt{4-(-x)^2} = 3\sqrt{4-x^2} = g(x) \Rightarrow g$ est paire.

Périodicité: g n'est pas périodique.

Zéros: $g(x)=0 \Rightarrow 3\sqrt{4-x^2}=0 \Rightarrow \sqrt{4-x^2}=0 \Rightarrow 4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow (-2;0)$ et $(2;0)$.

Intersection avec O_y: $x=0 \Rightarrow g(x) = 3\sqrt{4} = 3\cdot 2 = 6 \Rightarrow (0;6)$.

Asymptotes: il n'y a pas d'asymptote verticale puisque $D_g=[-2;2]$ et $g(-2)=g(2)=0$; il n'y a pas d'asymptote non verticale puisque $D_g=[-2;2]$ (on ne peut pas étudier $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)$).

Dérivée: $g'(x) = 3\cdot\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x) = -\frac{3x}{\sqrt{4-x^2}}$; on a $D_{g'} =]-2;2[$ (on doit avoir $\sqrt{4-x^2}\neq 0$ et $4-x^2 \geq 0$).

Points à tangente horizontale: $g'(x)=0 \Rightarrow -\frac{3x}{\sqrt{4-x^2}}=0 \Rightarrow -3x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0;6)$.

Pente des tangentes aux points critiques: les points critiques de $D_{g'}$ sont $x=-2$ et $x=2$; on a

$$\lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} g'(x) = \lim_{\substack{x\to -2 \\ >}} -\frac{3x}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{-6}{0_+} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to 2 \\ <}} g'(x) = \lim_{\substack{x\to 2 \\ <}} -\frac{3x}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{6}{0_+} = -\infty.$$

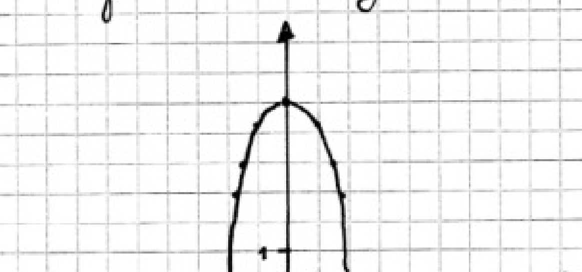
Ainsi $g'(-2)=+\infty$ et $g'(2)=-\infty$.

Tableau de croissance:

x		-2		0		2	
$g'(x)$		$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	
$g(x)$		$\uparrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\downarrow$	

Nature des points à tangente horizontale: g a un maximum en $(0;6)$.

Graphe:



Fonction $h(x) = 3\sqrt{-4+x^2}$:

Domaine de définition: on doit avoir $-4+x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow x \leq -2$ ou $x \geq 2$

$\Rightarrow D_h =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[= \mathbb{R} \setminus]-2; 2[$.

Zéros: $h(x)=0 \Rightarrow 3\sqrt{-4+x^2} = 0 \Rightarrow \sqrt{-4+x^2} = 0 \Rightarrow -4+x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$\Rightarrow (-2;0)$ et $(2;0)$.

Asymptotes obliques: une asymptote oblique de h, si elle existe, sera donnée par $y = mx+h$,

où $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{h(x)}{x}$ et, là où m existe, $h = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (h(x) - mx)$;

on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3\sqrt{-4+x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3\sqrt{x^2(-\frac{4}{x^2}+1)}}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x\sqrt{-\frac{4}{x^2}+1}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 3\sqrt{-\frac{4}{x^2}+1} = 3\sqrt{0+1} = 3$,

ainsi $m=3$ si $x \to +\infty$; on a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (h(x) - mx) =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3\sqrt{-4+x^2} - 3x\right) = \text{"}+\infty - \infty\text{"} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(3\sqrt{-4+x^2} - 3x)(3\sqrt{-4+x^2}+3x)}{3\sqrt{-4+x^2}+3x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(3\sqrt{-4+x^2})^2 - (3x)^2}{3\sqrt{-4+x^2}+3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{9(-4+x^2) - 9x^2}{3\sqrt{-4+x^2}+3x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-36+9x^2-9x^2}{3\sqrt{-4+x^2}+3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-36}{3\sqrt{-4+x^2}+3x} = \frac{-36}{+\infty} = 0$;

ainsi $h=0$ si $x \to +\infty$; de plus

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3\sqrt{-4+x^2}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3\sqrt{x^2(-\frac{4}{x^2}+1)}}{x} =$ $\sqrt{x^2} = -x$ si $x<0$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-3x\sqrt{-\frac{4}{x^2}+1}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -3\sqrt{-\frac{4}{x^2}+1} = -3\sqrt{0+1} = -3$,

ainsi $m=-3$ si $x \to -\infty$; on a alors $\lim\limits_{x \to -\infty} (h(x) - mx) =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(3\sqrt{-4+x^2} + 3x\right) = \text{"}+\infty - \infty\text{"} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(3\sqrt{-4+x^2} + 3x)(3\sqrt{-4+x^2} - 3x)}{3\sqrt{-4+x^2} - 3x} =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(3\sqrt{-4+x^2})^2 - (3x)^2}{3\sqrt{-4+x^2} - 3x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{9(-4+x^2) - 9x^2}{3\sqrt{-4+x^2} - 3x} =$

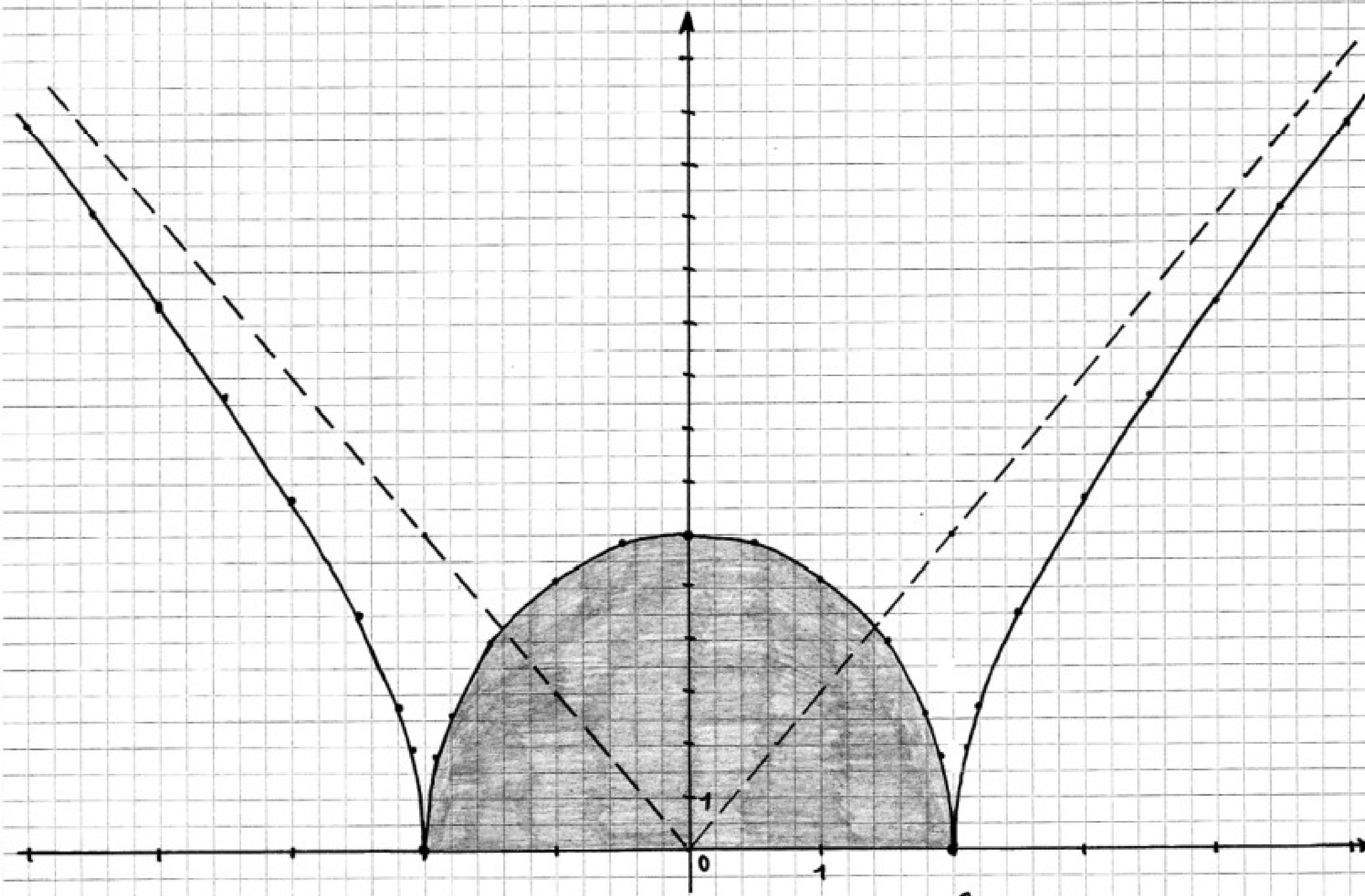
$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-36+9x^2-9x^2}{3\sqrt{-4+x^2} - 3x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-36}{3\sqrt{-4+x^2} - 3x} = \frac{-36}{+\infty} = 0$;

ainsi $h=0$ si $x \to -\infty$;

par conséquent, $y = 3x$ est asymptote oblique si $x \to +\infty$ et

$y = -3x$ est asymptote oblique si $x \to -\infty$.

Graphe de f:



b) Il faut calculer l'aire grise ci-dessous, qui correspond à $\int_{-2}^{2} g(x)\,dx$.

Une primitive de $g(x)=3\sqrt{4-x^2}$ est $G(x)=3\left(\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

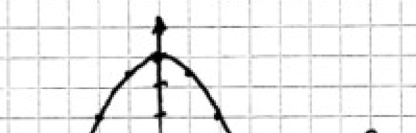
(a=2 dans la primitive donnée l'énoncé).

On a $G(2)=3\left(\frac{2}{2}\sqrt{4-2^2}+2\arcsin\left(\frac{2}{2}\right)\right)=3\cdot 2\arcsin(1)=6\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi$ et

$G(-2)=3\left(\frac{-2}{2}\sqrt{4-(-2)^2}+2\arcsin\left(\frac{-2}{2}\right)\right)=3\cdot 2\arcsin(-1)=6\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-3\pi.$

Ainsi, l'aire cherchée est $G(2)-G(-2)=3\pi-(-3\pi)=6\pi$.

c) On a une parabole de la forme:



Avec les points $I(-2;0)$ et $J(2;0)$ dans $y=ax^2+p$, on obtient $0=a\cdot 2^2+p$

$\Rightarrow p=-4a$. La parabole s'écrit donc $y=ax^2-4a$

L'aire sous la parabole doit être égale à l'aire sous g (6π d'après b)),

on doit avoir $\int_{-2}^{2}(ax^2-4a)\,dx = 6\pi$.

Une primitive de ax^2-4a est $K(x)=\frac{ax^3}{3}-4ax$.

On a $K(2)=\frac{a\cdot 2^3}{3}-4a\cdot 2=\frac{8a}{3}-8a=\frac{8a}{3}-\frac{24a}{3}=-\frac{16a}{3}$ et

$K(-2)=\frac{a\cdot(-2)^3}{3}-4a\cdot(-2)=\frac{-8a}{3}+8a=-\frac{8a}{3}+\frac{24a}{3}=\frac{16a}{3}$.

Ainsi $\int_{-2}^{2}(ax^2-4a)\,dx=-\frac{16a}{3}-\frac{16a}{3}=-\frac{32a}{3}$.

On doit donc avoir $-\frac{32a}{3}=6\pi \Longrightarrow a=-\frac{18\pi}{32}=-\frac{9\pi}{16}$.

L'équation de la parabole doit donc être $y=-\frac{9\pi}{16}x+\frac{9\pi}{4}$.

d) D'après Formulaires et Tables p. 82, le volume de révolution obtenu en faisant tourner autour de l'axe Ox la surface délimitée par le graphe de h, la droite d'équation $y=3x$ et les droites verticales $x=k$ et $x=k+1$ est

$$V=\pi\int_k^{k+1}(3x)^2\,dx-\pi\int_k^{k+1}(h(x))^2\,dx=\pi\int_k^{k+1}9x^2\,dx-\pi\int_k^{k+1}\left(3\sqrt{-4+x^2}\right)^2dx=$$

$$=\pi\int_k^{k+1}9x^2\,dx-\pi\int_k^{k+1}9(-4+x^2)\,dx=\pi\int_k^{k+1}\left(9x^2-9(-4+x^2)\right)dx=$$

$$=\pi\int_k^{k+1}(9x^2+36-9x^2)\,dx=\pi\int_k^{k+1}36\,dx=36\pi\int_k^{k+1}dx=36\pi\, x\Big|_k^{k+1}=$$

$$=36\pi(k+1-k)=36\pi.$$

Exercice 2

a) La matrice de f sera diagonale dans une base propre, autrement dit dans une base formé de vecteurs propres de f.

Les vecteurs propres de f sont les $\vec{v} \in V_3$ tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $F\vec{v} = \lambda\vec{v}$, où F est la matrice de f dans une base donnée (λ est alors la valeur propre associée à $\vec{v}$). Autrement dit, les vecteurs propres de f sont les vecteurs $\vec{v}$ qui gardent la même direction par la fonction f.

Comme f est la projection orthogonale sur le plan engendré par les vecteurs $\vec{a} = \vec{u_1} + \vec{u_3}$ et $\vec{b} = \vec{u_2} + \vec{u_3}$, les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont invariants par f. Ce sont donc des vecteurs propres de f. Leur valeurs propres sera 1. Cependant $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas perpendiculaires: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \neq 0$.

On peut commencer par prendre seulement le vecteur $\vec{a}$.

Le vecteur $\vec{a} \wedge \vec{b}$ sera perpendiculaire à $\vec{a}$. En outre, sa projection sur le plan formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sera le vecteur nul. Ainsi $\vec{a} \wedge \vec{b}$ sera un vecteur propre de f de valeur propre 0.

On prendra finalement $\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})$. Il sera perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{a} \wedge \vec{b}$. Comme il est perpendiculaire à $\vec{a} \wedge \vec{b}$, il sera dans le plan formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Sa valeur propre sera donc 1.

Par conséquence, une base orthogonale de vecteurs propres de f sera $(\vec{a}\,;\, \vec{a} \wedge \vec{b}\,;\, \vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}))$.

Pour la rendre orthonormée, on prendra $\vec{w_1} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$, $\vec{w_2} = \frac{1}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}\vec{a} \wedge \vec{b}$ et $\vec{w_3} = \frac{1}{\|\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})\|}\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})$. Les valeurs propres seront: $\lambda_1 = 1$ pour $\vec{w_1}$, $\lambda_2 = 0$ pour $\vec{w_2}$ et $\lambda_3 = 1$ pour $\vec{w_3}$.

Dans la base $(\vec{w_1}\,;\, \vec{w_2}\,;\, \vec{w_3})$, la matrice de f sera $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice diagonale).

On a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Ainsi $\vec{w_1} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

Ainsi $\vec{w_2} = \frac{1}{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}\vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \\ 1(-1) - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\|\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

Ainsi $\vec{w_3} = \frac{1}{\|\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b})\|}\vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Une base propre de f est donc $(\vec{w_1}\,;\, \vec{w_2}\,;\, \vec{w_3})$, où $\vec{w_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w_3} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Dans la base $(\vec{w_1} ; \vec{w_2} ; \vec{w_3})$, la matrice F de f sera diagonale :

$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, où λ_i est la valeur propre correspondant au vecteur propre $\vec{w_i}$, $i=1,2,3$.

Comme f est la projection orthogonale sur le plan engendré par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, on a $\vec{w_1} = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$ parallèle au plan de projection, $\vec{w_2} = \frac{1}{\|\vec{a}\wedge\vec{b}\|}\vec{a}\wedge\vec{b}$ perpendiculaire au plan de projection et $\vec{w_3} = \frac{1}{\|\vec{a}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})\|}\vec{a}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{b})$ perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{a}\wedge\vec{b}$ et, donc, parallèle au plan de projection.

La projection d'un vecteur parallèle au plan de projection redonne ce même vecteur et la projection d'un vecteur perpendiculaire au plan de projection donne le vecteur nul (puisque la projection est orthogonale).

On a donc $f(\vec{w_1}) = \vec{w_1}$, $f(\vec{w_2}) = 0$ et $f(\vec{w_3}) = \vec{w_3}$.

On peut ainsi écrire $f(\vec{w_1}) = \lambda_1\vec{w_1}$, $f(\vec{w_2}) = \lambda_2\vec{w_2}$ et $f(\vec{w_3}) = \lambda_3\vec{w_3}$ avec $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 1$.

Dans la base $(\vec{w_1} ; \vec{w_2} ; \vec{w_3})$, la matrice F de f est donc $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans la base $(\vec{u_1} ; \vec{u_2} ; \vec{u_3})$, on a maintenant $M_k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

b) M_k ne sera pas inversible si $\det(M_k) = 0$.

On a $\det(M_k) = \begin{vmatrix} k/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & k/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & k/3 \end{vmatrix} = \left(\frac{k}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{k}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{k}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{k}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 =$

$= \frac{k^3}{27} - \frac{1}{27} - \frac{1}{27} - \frac{k}{27} - \frac{k}{27} - \frac{k}{27} = \frac{1}{27}(k^3 - 3k - 2)$.

$\det(M_k) = 0 \Rightarrow \frac{1}{27}(k^3 - 3k - 2) = 0 \Rightarrow k^3 - 3k - 2 = 0$.

On remarque que $k = -1$ est solution ($(-1)^3 - 3\cdot(-1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0$).

Divisons $k^3 - 3k - 2$ par $k+1$:

$$\begin{array}{r|l} k^3 \quad -3k-2 & k+1 \\ \hline -(k^3+k^2) \quad\quad & k^2-k-2 \\ \hline -k^2-3k-2 & \\ -(-k^2-k) \quad & \\ \hline -2k-2 & \\ -(-2k-2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

En outre $k^2 - k - 2 = (k+1)(k-2)$.

Ainsi $k^3 - 3k - 2 = (k+1)(k^2-k-2) = (k+1)(k+1)(k-2) = (k+1)^2(k-2)$.

Par conséquent $k^3 - 3k - 2 = 0 \Rightarrow (k+1)^2(k-2) = 0 \Rightarrow k = -1$ ou $k = 2$.

On en déduit que M_k n'est pas inversible si $k = -1$ et $k = 2$.

c) On doit chercher k tel que $m_k(\vec{c}) = \vec{0}$ ou $M_k \cdot \vec{c} = \vec{0}$.

On a $\vec{c} = \vec{u_1} + \vec{u_2} - \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $M_k \cdot \vec{c} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} k-2 \\ k-2 \\ 2-k \end{pmatrix}$. Ainsi $M_k \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow k-2=0$ (ou $2-k=0$) $\Rightarrow k=2$.

Ainsi l'image de $\vec{c}$ est le vecteur nul si $k=2$

d) On a $\vec{a} = \vec{u_1} + \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \vec{u_2} + \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \vec{u_1} + \vec{u_2} - \vec{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur $\vec{v}$ sera un vecteur propre de m_k s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M_k \vec{v} = \lambda \vec{v}$.

Avec $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: $M_k \vec{a} = \lambda \vec{a} \Rightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} (k+1)/3 \\ 0 \\ (k+1)/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{k+1}{3}$; ainsi $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de m_k et la valeur propre associée est $\lambda = \frac{k+1}{3}$.

Avec $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $M_k \vec{b} = \lambda \vec{b} \Rightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ (k+1)/3 \\ (k+1)/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{k+1}{3}$; ainsi $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de m_k et la valeur propre associée est $\lambda = \frac{k+1}{3}$

Avec $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $M_k \vec{c} = \lambda \vec{c} \Rightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} (k-2)/3 \\ (k-2)/3 \\ (2-k)/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \frac{k-2}{3}$; ainsi $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de m_k et la valeur propre associée est $\lambda = \frac{k-2}{3}$.

On a $k=2$ et $M_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

e) Avec $k=2$ et d'après d), les vecteurs propres et valeurs propres de m_2 sont :

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$;

2) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 1$;

3) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 0$.

D'après a), $\vec{w_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{a}$, $\vec{w_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{c}$ et $\vec{w_3} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{a} - 2\vec{b})$.

Ainsi $\vec{w_1}$ et $\vec{w_3}$ appartiennent au plan engendré par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et $\vec{w_2}$

est perpendiculaire à ce plan. On peut aussi dire que $\vec{c}$ est perpendiculaire à ce plan.

Comme les valeurs propres associées à $\vec{a}$ et $\vec{b}$ valent 1 et celle associée à $\vec{c}$ vaut $\vec{0}$. On en déduit donc que m_2 est la projection orthogonale sur le plan engendré par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Par conséquent, M_2 est la matrice de l'application linéaire f dans la base $(\vec{u_1}; \vec{u_2}; \vec{u_3})$.

On a $k=5$ et $M_5 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

f) D'après d), les valeurs propres de m_k sont $\lambda = \frac{k+1}{3}$ et $\lambda = \frac{k-2}{3}$. Les vecteurs propres associés sont: pour $\lambda = \frac{k+1}{3}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; pour $\lambda = \frac{k-2}{3}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Avec $k=5$, les valeurs propres de m_5 sont $\lambda = 2$ et $\lambda = 1$. Les vecteurs propres associés sont: pour $\lambda = 2$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; pour $\lambda = 1$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les espaces propres de m_5 sont : $\{\vec{v} \mid \vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ (pour $\lambda = 2$) et $\{\vec{v} \mid \vec{v} = \alpha\vec{c}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ (pour $\lambda = 1$).

Par conséquent, m_5 est une affinité orthogonale de rapport 2 par rapport au vecteur $\vec{c}$ (orthogonale car $\vec{c}$ est perpendiculaire au plan formé par a) et b)).

g) On sait que m_2 et f représentent la même transformation (voir e)).
Ainsi la sphère est envoyée par m_2 sur sa projection dans le plan $x+y-z=0$.
Le centre de la sphère étant $(0;0;0)$ et son rayon 1, sa projection dans le plan $x+y-z=0$ sera le cercle de centre $(0;0;0)$ et de rayon 1.
Comme $\vec{c}$ est perpendiculaire à $x+y-z=0$, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont parallèle à ce plan.
Comme m_5 est une affinité orthogonale de rapport 2 par rapport au vecteur $\vec{c}$, l'image du cercle de centre $(0;0;0)$ et de rayon 1 est le cercle de centre $(0;0;0)$ et de rayon 2.
Par conséquent, l'image de la sphère par $m_5 \circ m_2$ (représenté par $M = M_5 M_2$) est le cercle de centre $(0;0;0)$ et de rayon 2.

On peut aussi voir cela en calculant $M_5 \cdot M_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 12 & -6 & 6 \\ -6 & 12 & 6 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot M_2$.

Comme M_2 est la projection orthogonale sur le plan $x+y-z=0$, l'image de la sphère par m_2 sera le cercle de centre $(0;0;0)$ et de rayon 1, et, donc, l'image de la sphère par $M = M_5 \cdot M_2 = 2M_2$ sera le cercle de centre $(0;0;0)$ et de rayon 2.

Exercice 3

On a $f(z) = (1+2i)z + (1-2i)\bar{z} - 6$.

a) $z = 3 \Rightarrow \bar{z} = 3 \Rightarrow f(3) = (1+2i)\cdot 3 + (1-2i)\cdot 3 - 6 = 3+6i+3-6i-6 = 0$.

$z = 2+i \Rightarrow \bar{z} = 2-i \Rightarrow f(2+i) = (1+2i)(2+i) + (1-2i)(2-i) - 6 =$
$= 2+\cancel{i}+\cancel{4i}+2i^2+2-\cancel{i}-\cancel{4i}+2i^2-6 = 2-2+2-2-6 = -6$.

$z = x+iy \Rightarrow \bar{z} = x-iy \Rightarrow f(x+iy) = (1+2i)(x+iy) + (1-2i)(x-iy) - 6 =$
$= x+\cancel{iy}+\cancel{2ix}+2i^2y+x-\cancel{iy}-\cancel{2ix}+2i^2y-6 = 2x-4y-6$.

b) Les points fixes de f sont les z tels que $f(z) = z$.
$f(z) = z \Rightarrow (1+2i)z + (1-2i)\bar{z} - 6 = z$.
En posant $z = x+iy$, on a, d'après a), $f(z) = 2x-4y-6$.
Ainsi $f(z) = z \Rightarrow 2x-4y-6 = x+iy \Rightarrow y = 0$ $(z = x \in \mathbb{R})$ et
$2x-4y-6 = x \Rightarrow 2x-6 = x \Rightarrow x = 6$.
Ainsi, le point fixe de f est $z = 6$.

c) Les zéros de f sont les z tels que $f(z) = 0$.
En posant $z = x+iy$, on a, d'après a), $f(z) = 2x-4y-6$.
Ainsi $f(z) = 0 \Rightarrow 2x-4y-6 = 0 \Rightarrow x-2y-3 = 0$.
Par conséquent, les zéros de f sont les $z = x+iy$ tels que $x-2y-3 = 0$. Les zéros de f forment donc une droite.

d) En posant $z = x+iy$, on a $(2+4i)z-6 = (2+4i)(x+iy)-6 =$
$= 2x+2iy+4ix+4i^2y-6 = 2x-4y-6+(4x+2y)i$.
Comme $f(z) = 2x-4y-6$ (d'après a)), on a bien $f(z) = Re((2+4i)z-6)$.
La fonction $(2+4i)z$ est une rotation de centre 0 et d'angle $\tan^{-1}(\frac{4}{2}) = 63{,}43°$, suivie d'une homothétie de centre 0 et de rapport $\sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
Par conséquent, la fonction $(2+4i)z-6$ sera une rotation $R(0; 63{,}43°)$, suivie d'une homothétie $H(0; 2\sqrt{5})$, suivie d'une translation de vecteur $\binom{-6}{0}$.
Finalement, la fonction $f(z) = Re((2+4i)z-6)$ sera une rotation $R(0; 63{,}43°)$, suivie d'une homothétie $H(0; 2\sqrt{5})$, suivie d'une translation de vecteur $\binom{-6}{0}$, suivie de la projection sur l'axe $y=0$:

$$f = \mathrm{Proj}(y=0) \circ T\left(\binom{-6}{0}\right) \circ H(0; 2\sqrt{5}) \circ R(0; 63{,}43°).$$

e) Avec $g(z) = \dfrac{3z-5\bar{z}}{f(z)}$, en notant $z = x+iy$, on a $g(z) = u+iv$, avec

$u = \dfrac{-x}{x-2y-3}$ et $v = \dfrac{4y}{x-2y-3}$.

L'image par g de l'axe réel privé du point $(3;0)$ est l'image par g des $z=x+iy$ avec $y=0$ et $x\neq 3$.
Avec $y=0$ et $x\neq 3$, on obtient $u=\frac{-x}{x-3}$ et $v=0$.
Avec $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, on a u pouvant prendre toutes les valeurs possibles sauf -1 :
en effet : $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}} \frac{-x}{x-3}=\frac{-3}{0+}=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}} \frac{-x}{x-3}=\frac{-3}{0-}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x-3}=$
$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-1}{1-\frac{3}{x}}=-1$; $\frac{-x}{x-3}=-1 \Rightarrow -x=-(x-3)=-x=-x+3 \Rightarrow 0=3$ impossible.
Ainsi, l'image par g de l'axe réel privé du point $(3;0)$ est l'axe réel privé du point $(-1;0)$.

f) $uv=1 \Rightarrow \frac{-x}{x-2y-3}\cdot\frac{4y}{x-2y-3}=1 \Rightarrow -4xy=(x-2y-3)^2$
$\Rightarrow -4xy=x^2+4y^2+9-4xy-6x+12y \Rightarrow x^2+4y^2+9-6x+12y=0$
$\Rightarrow (x-3)^2+(2y+3)^2-9=0 \Rightarrow (x-3)^2+(2y+3)^2=9$.
Ce n'est pas l'équation du cercle (on devrait avoir $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ et non $(x-a)^2+(2y-b)^2=r^2$).

Exercice 4

a) La probabilité est $1-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3}{10}=0,3=30\%$.

b) $p(5 \text{ ou } 6 \text{ succès}) = p(5 \text{ succès}) + p(6 \text{ succès})$.
Pour calculer $p(k \text{ succès})$, on utilise la loi binomiale: $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, où X dénombre les succès, k est le nombre de succès obtenus, n le nombre de tirs et p la probabilité de succès pour 1 tir. Ici, $n=6$ et $p=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$ (voir a)).
Ainsi $p(5 \text{ succès}) = \binom{6}{5}\left(\frac{7}{10}\right)^5\left(1-\frac{7}{10}\right)^1 = 6\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^5\cdot\frac{3}{10} = 0,302526$ et
$p(6 \text{ succès}) = \binom{6}{6}\left(\frac{7}{10}\right)^6\left(1-\frac{7}{10}\right)^0 = \left(\frac{7}{10}\right)^6 = 0,117649$.
Ainsi $p(5 \text{ ou } 6 \text{ succès}) = 0,302526 + 0,117649 = 0,420175 = 42,0175\%$.

c) C'est une probabilité conditionnelle: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
Ici, A = avoir obtenu un score de 6 et B = deux flèches tirées sans rater la cible.
On a $A\cap B$ = deux flèches tirées sans rater la cible et avoir obtenu un score de 6 =
= deux flèches tirées dans le centre de la cible.
Ainsi $p(A\cap B)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$.
De plus $p(B)=\frac{7}{10}\cdot\frac{7}{10}=\frac{49}{100}$.
Ainsi $P(A|B)=\frac{1/25}{49/100}=\frac{4}{49}\cong 0,0816=8,16\%$.

d) Pour obtenir 8 points en 4 flèches, on a les possibilités suivantes: 2/2/2/2, 3/3/2/0, 3/3/0/2, 3/2/3/0, 3/2/0/3, 3/0/3/2, 3/0/2/3, 2/3/3/0, 2/3/0/3, 2/0/3/3, 0/3/3/2, 0/3/2/3, 0/2/3/3. Les 12 dernières possibilités ont la même probabilité : $\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{25}\cdot\frac{3}{20}=\frac{3}{500}$. La première possibilité a une probabilité de $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$.
Ainsi, la probabilité d'obtenir 8 points en 4 flèches est $12\cdot\frac{3}{500}+\frac{1}{16}=0,1345=13,45\%$.

e) $p(\text{nb impair de flèches}) = p(1 \text{ flèche}) + p(3 \text{ flèches}) + p(5 \text{ flèches}) + \dots =$
$= p(C) + p(\overline{C}\,\overline{C}C) + p(\overline{C}\,\overline{C}\,\overline{C}\,\overline{C}C) + \dots$ où C = centre de la cible atteint et $\overline{C}$ = centre de la cible pas atteint.
On a $p(C)=\frac{1}{5}$ et $p(\overline{C})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$.

Ainsi $p(\text{nb impair de flèches}) = \frac{1}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^4\cdot\frac{1}{5}+\dots=$
$=\frac{1}{5}\left(1+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^4+\dots\right)=\frac{1}{5}\left(1+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\left(\frac{4}{5}\right)^2\right)^2+\dots\right)=$
$=\frac{1}{5}\left(1+\frac{16}{25}+\left(\frac{16}{25}\right)^2+\dots\right)$.
$1+\frac{16}{25}+\left(\frac{16}{25}\right)^2+\dots$ est une progression géométrique de raison $r=\frac{16}{25}$.

D'après Formulaires et Tables p. 86, on a $1+r+r^2+\ldots = \frac{1}{1-r}$.
Ainsi $1+\frac{16}{25}+\left(\frac{16}{25}\right)^2+\ldots = \frac{1}{1-\frac{16}{25}} = \frac{1}{9/25} = \frac{25}{9}$.

Par conséquent, $p(\text{nb impair de flèches}) = \frac{1}{5}\cdot\frac{25}{9} = \frac{5}{9} = 0,\overline{5} = 55,\overline{5}\,\%$.

f) En lançant 2 flèches, il peut obtenir 0, 2, 3, 4, 5 ou 6 points.
$p(\text{obtenir 0 points}) = \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{9}{100}$.
$p(\text{obtenir 2 points}) = p(\text{zone extérieure ; cible ratée}) + p(\text{cible ratée ; zone extérieure}) =$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{10}$.
$p(\text{obtenir 3 points}) = p(\text{centre cible ; cible ratée}) + p(\text{cible ratée ; centre cible}) =$
$= \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{25}$.
$p(\text{obtenir 4 points}) = p(\text{zone extérieure ; zone extérieure}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
$p(\text{obtenir 5 points}) = p(\text{centre cible ; zone extérieure}) + p(\text{zone extérieure ; centre cible}) =$
$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$.
$p(\text{obtenir 6 points}) = p(\text{centre cible ; centre cible}) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{25}$.

L'espérance de gain est donc $E = 0\cdot\frac{9}{100}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{3}{25}+4\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{5}+6\cdot\frac{1}{25} =$
$= \frac{3}{5}+\frac{9}{25}+1+1+\frac{6}{25} = \frac{3}{5}+\frac{3}{5}+2 = \frac{6}{5}+2 = \frac{16}{5} = 3,2$.

Ainsi, pour que le jeu soit équitable, il faut que $m = 3,2$.