Exercice 1 (poids 3)

On considère les fonctions g et h définies par $g(x) = 3\sqrt{4-x^2}$ et $h(x) = 3\sqrt{-4+x^2}$, ainsi que la fonction f définie par morceaux par

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in [-2;2], \\ h(x) & \text{si } x \in \,]-\infty;-2[\, \cup \,]2;\infty[. \end{cases}$$

a) · Etudier la fonction g sans la deuxième dérivée.
· Donner l'ensemble de définition, les zéros et les asymptotes obliques de h.
· Tracer le graphe de f.

b) Calculer l'aire de la surface délimitée par le graphe de g et l'axe Ox en sachant que

$$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

est une primitive de $\sqrt{a^2-x^2}$.

c) On cherche à approcher le graphe de g par une parabole. Trouver l'équation de celle qui passe par les points $I(-2;0)$ et $J(2;0)$ et qui délimite avec l'axe Ox une surface d'aire égale à celle trouvée à la partie b).

d) Pour $k \geqslant 2$, on considère le volume de révolution obtenu en faisant tourner autour de l'axe Ox la surface délimitée par le graphe de h, la droite d'équation $y = 3x$ et les droites verticales $x = k$ et $x = k+1$. Calculer ce volume.

Exercice 2 (poids 3)

Dans l'espace V_3 muni d'une base orthonormée $(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{u_3})$, on considère l'application linéaire f qui décrit la projection orthogonale sur le plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_3}$ et $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_3}$.

a) Donner trois vecteurs $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2}$ et $\overrightarrow{w_3}$ qui forment une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale, et donner cette matrice diagonale.

Pour k réel, on considère l'application linéaire m_k définie dans la base $(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{u_3})$ par la matrice

$$M_k=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

b) Pour quelle(s) valeur(s) de k la matrice M_k n'est-elle pas inversible ?

c) Pour quelle(s) valeur(s) de k l'image du vecteur $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}-\overrightarrow{u_3}$ par l'application linéaire m_k est-elle le vecteur nul ?

d) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_3}$ et $\overrightarrow{c}=\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}-\overrightarrow{u_3}$ sont des vecteurs propres de m_k pour toute valeur de k, et préciser les valeurs propres correspondantes.

On pose $k=2$, donc $M_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

e) Montrer que M_2 est la matrice de l'application linéaire f dans la base $(\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{u_3})$.

On pose $k=5$, donc $M_5=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

f) Donner les valeurs propres de m_5 ainsi que les espaces propres correspondants, puis décrire la transformation définie par m_5.

g) Dans l'espace muni du repère métrique $(O;\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2};\overrightarrow{u_3})$, on considère l'affinité de matrice $M=M_5\cdot M_2$ qui laisse fixe l'origine. Sans calculs, décrire géométriquement l'image de la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=1$ par cette affinité.

Exercice 3 (poids 2)

On considère la fonction complexe $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = (1+2i)z + (1-2i)\overline{z} - 6.$$

a) Calculer $f(3)$, $f(2+i)$, puis $f(x+iy)$.

b) Calculer le point fixe de f.

c) Déterminer les zéros de f.

d) Montrer que $f(z)$ est la partie réelle de $(2+4i)z - 6$. En déduire une interprétation géométrique de f.

Pour la suite de l'exercice, on considère $g(z) = \dfrac{3z - 5\overline{z}}{f(z)}$. En notant $z = x + yi$ et $g(z) = u + vi$, on obtient

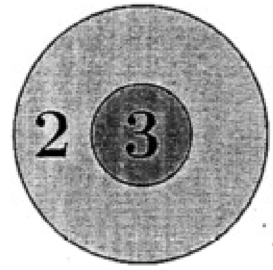
$$u = \frac{-x}{x - 2y - 3} \quad \text{et} \quad v = \frac{4y}{x - 2y - 3}.$$

e) Décrire géométriquement l'image par g de l'axe réel privé du point $(3\,;0)$.

f) Déterminer l'équation de la courbe dont l'image par g est la courbe d'équation $uv = 1$. S'agit-il d'un cercle ? Justifier.

Exercice 4 (poids 2)

Lucky Luke pratique le tir à l'arc. Lors de chaque tir, il a



- une probabilité de $\frac{1}{5}$ d'atteindre le centre de la cible ; il obtient alors 3 points,
- une probabilité de $\frac{1}{2}$ d'arriver dans la zone extérieure de la cible ; il obtient alors 2 points.

Lorsqu'il tire plusieurs flèches, son score est la somme des points obtenus.

a) Lors d'un tir, quelle est la probabilité que Lucky Luke rate la cible ?

b) Quelle est la probabilité que sur six flèches tirées, au moins cinq d'entre elles atteignent la cible ?

c) Sachant que Lucky Luke a tiré deux flèches sans rater la cible, quelle est la probabilité qu'il ait obtenu un score de 6 points ?

d) Quelle est la probabilité d'obtenir un score d'exactement 8 points en tirant quatre flèches ?

e) Lucky Luke tire des flèches jusqu'à ce qu'il atteigne le centre de la cible. Quelle est la probabilité qu'il doive tirer un nombre impair de flèches ?

f) On propose le jeu suivant à Lucky Luke : il mise m francs et tire deux flèches. Il reçoit un franc par point obtenu. Combien doit valoir m pour que le jeu soit équitable ?