Lycée Jean-Piaget
Neuchâtel

Mathématiques

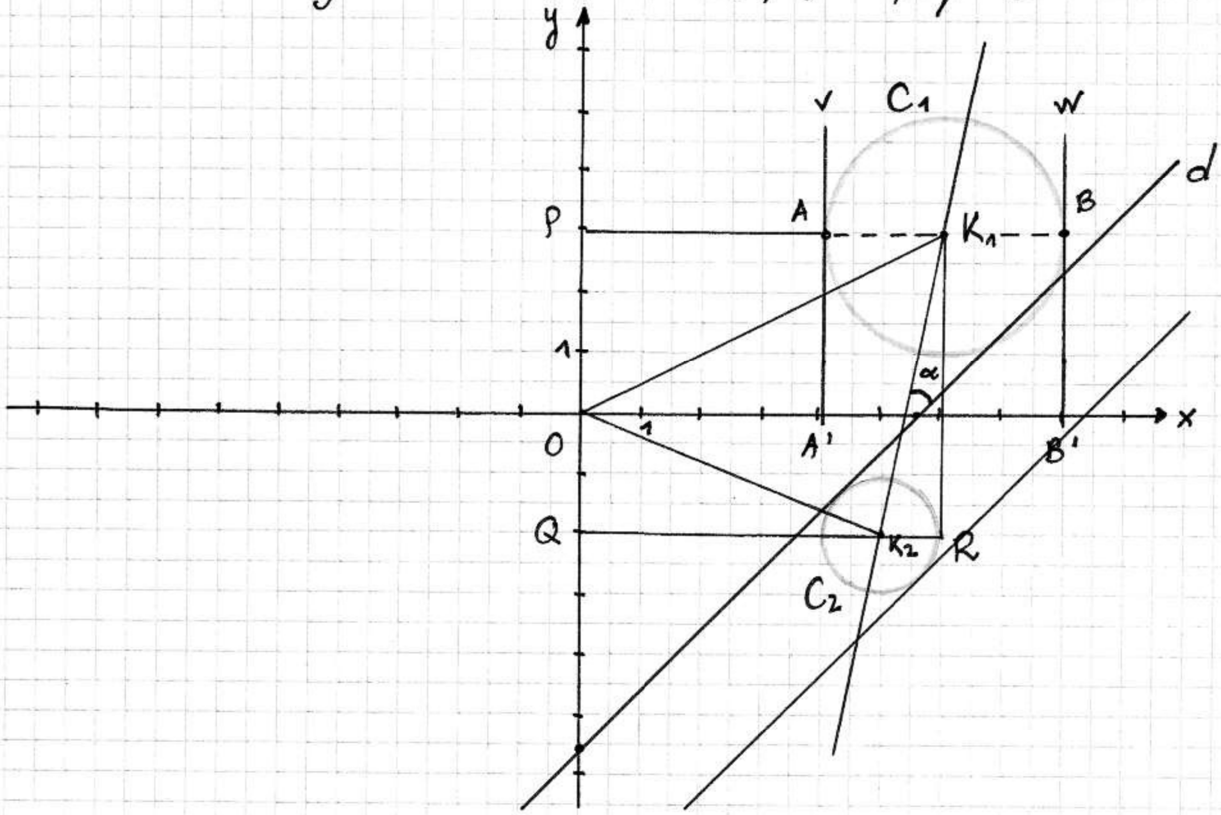
Examen de maturité 2011

Corrigé

Problème 1

1. $C_1 : (x-6)^2+(y-3)^2=4 \Rightarrow$ centre $K_1(6;3)$ et rayon $r_1=2$.
$C_2 : x^2+y^2-10x+4y+28=0 \Rightarrow x^2-10x+25-25+y^2+4y+4-4+28=0$
$\Rightarrow (x-5)^2+(y+2)^2=1 \Rightarrow$ centre $K_2(5;-2)$ et rayon $r_2=1$.

2.



3. On a $\overrightarrow{K_1K_2} = \overrightarrow{OK_2} - \overrightarrow{OK_1} = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{K_1K_2}\| = \sqrt{(-1)^2+(-5)^2} = \sqrt{26} \cong 5,1$.
Comme $r_1+r_2 = 2+1 = 3$, on a $\|\overrightarrow{K_1K_2}\| > r_1+r_2$, d'où les 2 cercles ne se coupent pas.
En particulier, le centre de C_2 est à l'extérieur de C_1.

4. La plus courte distance entre les 2 cercles est donnée par $\|\overrightarrow{K_1K_2}\| - r_1 - r_2 \cong 5,1-3 = 2,1$.

5. On a $\text{dist}(K_2;d) = \dfrac{|5-(-2)-7+\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 = r_2$.

Ainsi d est tangente à C_2.

6. On a $\text{dist}(K_1;d) = \dfrac{|6-3-7+\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{|-4+\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} \cong 1,61 < r_2 = 2$.

Ainsi d coupe C_1 en 2 points.

7. On a $\overrightarrow{K_1K_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ vecteur directeur de la droite k.
Comme $d: x - y - 7 + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à la droite $d \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite.
L'angle aigu entre les droites d et k est alors donné par $\cos(\alpha) = \dfrac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|} =$

$$= \frac{1+5}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{52}} \cong 0{,}832 \Rightarrow \alpha \cong 33{,}69°.$$

8. La droite d peut s'écrire $y = x - 7 + \sqrt{2}$. Sa pente est 1.
La 2e tangente à C_2 de pente 1 est de la forme $y = x + c$.
Elle ne doit avoir qu'une intersection avec C_2.
Ainsi, l'équation $(x-5)^2 + (x+c+2)^2 = 1$ ne doit avoir qu'une solution.

$$(x-5)^2 + (x+c+2)^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 + x^2 + c^2 + 4 + 2cx + 4x + 4c = 1$$
$$\Rightarrow 2x^2 + (2c-6)x + c^2 + 4c + 29 = 1$$
$$\Rightarrow 2x^2 + (2c-6)x + c^2 + 4c + 28 = 0.$$

Pour que cette dernière équation n'ait qu'une solution, il faut que son discriminant soit nul: $(2c-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (c^2 + 4c + 28) = 0$

$$\Rightarrow 4c^2 - 24c + 36 - 8c^2 - 32c - 224 = 0$$
$$\Rightarrow -4c^2 - 56c - 188 = 0 \Rightarrow c^2 + 14c + 47 = 0$$
$$\Rightarrow c = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 188}}{2} = \frac{-14 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-14 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -7 \pm \sqrt{2}.$$

Le cas $c = -7 + \sqrt{2}$ correspond à la droite d.
Ainsi, la 2e tangente à C_2 de pente 1 est $x - y - 7 - \sqrt{2} = 0$.

9. Les tangentes verticales v et w sont de la forme $x - c = 0$.
La tangente verticale v passe par $A(6-2; 3) = (4; 3)$.
On a ainsi pour v: $4 - c = 0 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow$ équation de v: $x - 4 = 0$.
La tangente verticale w passe par $B(6+2; 3) = (8; 3)$.
On a ainsi pour w: $8 - c = 0 \Rightarrow c = 8 \Rightarrow$ équation de w: $x - 8 = 0$.

10. La surface cherchée est l'aire du rectangle $ABB'A'$ − aire du demi-cercle centré en K_1 de rayon r_1.
Elle vaut donc $4 \cdot 3 - \dfrac{2 \cdot \pi \cdot 2}{2} = 12 - 2\pi \cong 5{,}72$.

11. On a aire OK_1K_2 = aire PK_1RQ − aire OPK_1 − aire K_1K_2R − aire OK_2Q =

$$= 5 \cdot 6 - \frac{3 \cdot 6}{2} - \frac{1 \cdot 5}{2} - \frac{2 \cdot 5}{2} = 30 - 9 - 2{,}5 - 5 = 13{,}5.$$

11. On a $\overrightarrow{K_1K_2} \parallel \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ (voir 3.).
$\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ est perpendiculaire à la médiatrice.
Son équation est donc $x+5y+c=0$.
Elle passe par le point milieu M de K_1K_2 : $M = \left(\frac{6+5}{2} ; \frac{3+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{11}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.
Avec $M\left(\frac{11}{2} ; \frac{1}{2}\right)$, on a $\frac{11}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} + c = 0 \Rightarrow 8 + c = 0 \Rightarrow c = -8$.
L'équation de la médiatrice est donc $x + 5y - 8 = 0$.

Exercice 2

Partie I

On a $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$.

1) On doit avoir $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow$ domaine de définition $= \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2) $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+3}{x-1} = 0 \Rightarrow x^2+3=0 \Rightarrow x^2=-3$ exclu $\Rightarrow f$ n'a pas de zéro.
Tableau de signes :

x		1	
$f(x)$	$-$	////	$+$

3) Avec $f(x) = ax+b+\frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2-ax+bx-b+c}{x-1} = \frac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}$,

par identification des termes, on doit avoir $a=1$, $b-a=0$ et $c-b=3 \Rightarrow a=1$, $b=1$ et $c=4$.

4) On a $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{4}{0_-} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = \frac{4}{0_+} = +\infty$.

Ainsi, $x=1$ est asymptote verticale.
D'après 3), on a $f(x) = x+1+\frac{4}{x-1}$. Ainsi, $y=x+1$ est asymptote oblique $\left(\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x-1} = 0\right)$.

5) On a $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = x^2+3$ et $v = x-1$. Comme $u' = 2x$ et $v = 1$, on a

$f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{2x(x-1)-(x^2+3)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-3}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x=-1$ et $x=3$.

Tableau de croissance :

x		-1		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	////	$-$	0	$+$
$f''(x)$	↗	max	↘	////	↘	min	↗

6) On a $f'(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = x^2-2x-3$ et $v = (x-1)^2$. Comme $u' = 2x-2 = 2(x-1)$ et

$v' = 2(x-1)$, on a $f''(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{2(x-1)(x-1)^2-(x^2-2x-3)\cdot 2(x-1)}{((x-1)^2)^2} =$

$$= \frac{2(x-1)\left((x-1)^2-(x^2-2x-3)\right)}{(x-1)^4} = \frac{2\left((x-1)^2-(x^2-2x-3)\right)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2(x^2-2x+1-x^2+2x+3)}{(x-1)^3} = \frac{2\cdot 4}{(x-1)^3} = \frac{8}{(x-1)^3}.$$

$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{8}{(x-1)^3}=0 \Rightarrow 8=0$ exclu $\Rightarrow f''$ n'a pas de zéro.

Tableau de courbure:

x		1	
$f''(x)$	$-$	$\Vert$	$+$
$f(x)$	$\frown$ concave	$\Vert$	$\smile$ convexe

7) L'équation de la tangente t au graphe de f en $x_0=-2$ est de la forme $y=mx+h$, où $m=f'(x_0)$ et $h=f(x_0)-mx_0$.

D'après 5), on a $f'(x)=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$.

Avec $x_0=-2$, on a alors $m=f'(x_0)=\frac{(-2+1)(-2-3)}{(-2-1)^2}=\frac{7}{9}$.

Ainsi, $h=f(x_0)-mx_0=\frac{(-2)^2+3}{-2-1}-\frac{7}{9}\cdot(-2)=-\frac{7}{3}+\frac{14}{9}=-\frac{7}{9}$.

Ainsi, l'équation de t est $y=\frac{7}{9}x-\frac{7}{9}$.

Partie II

On a $f(x)=0 \Rightarrow (-x+3)e^x=0 \Rightarrow -x+3=0$ car $e^x>0$ pour tout $x \Rightarrow x=3$.

Ainsi l'aire colorée est $\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3(-x+3)e^x\,dx$.

On va utiliser la formule d'intégration par parties: $\int uv'\,dx = uv-\int u'v\,dx$.

Avec $u=(-x+3)$ et $v'=e^x$, on a $u'=-1$ et $v=e^x$.

Ainsi, $\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3 uv'\,dx=[uv]_0^3-\int_0^3 u'v\,dx=\left[(-x+3)e^x\right]_0^3-\int_0^3(-1)e^x\,dx=$

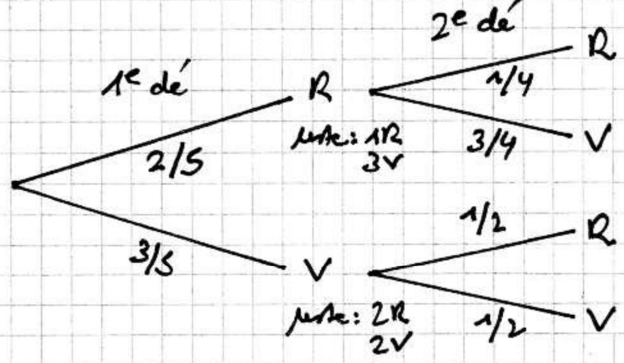
$$=(-3+3)e^3-(-0+3)e^0+\int_0^3 e^x\,dx=-3+\left[e^x\right]_0^3=-3+e^3-e^0=-3+e^3-1=$$

$$=e^3-4\cong 16{,}09.$$

La surface colorée vaut donc $\sim 16{,}09$.

Exercice 3

1) En notant $R=$ dé rouge et $V=$ dé vert, on a l'arbre suivant:



2) $\text{prob}(10.-)=\text{prob}(RR)+\text{prob}(VV)+\text{prob}(R=6 \text{ et } V=4)+\text{prob}(V=4 \text{ et } R=6)=$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot 1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2}=50\%.$$

3) $\text{prob}(12.-)=\text{prob}(V=6 \text{ et } V=6)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{120}\cong 0{,}83\%.$

4) $\text{prob}(>10.-)=\text{prob}(12.-)+\text{prob}(11.-)=$

$$=\frac{1}{120}+\text{prob}(R=6 \text{ et } V=5)+\text{prob}(V=5 \text{ et } R=6)=$$

$$=\frac{1}{120}+\frac{2}{5}\cdot 1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=$$

$$=\frac{1}{120}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{13}{120}\cong 10{,}83\%.$$

5) $\text{prob}(VV|10.-)=\dfrac{\text{prob}(VV \text{ et } 10.-)}{\text{prob}(10.-)}=\dfrac{\frac{3}{5}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1}{1/2}=\dfrac{3/10}{1/2}=\dfrac{3}{20}=15\%.$

6) $\text{prob}(VV \text{ ou } RR|10.-)=\dfrac{\text{prob}(VV \text{ et } 10.-)+\text{prob}(RR \text{ et } 10.-)}{\text{prob}(10.-)}=$

$$=\frac{\frac{3}{5}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{2}{5}\cdot 1\cdot\frac{1}{4}\cdot 1}{1/2}=\frac{2/5}{1/2}=\frac{1}{5}=20\%.$$

7) $\text{prob}(10.-|2^e \text{ dé vert})=\dfrac{\text{prob}(10.- \text{ et } 2^e \text{ dé vert})}{\text{prob}(2^e \text{ dé vert})}=$

$$=\frac{\text{prob}(VV)+\text{prob}(R=6 \text{ et } V=4)}{\text{prob}(VV)+\text{prob}(RV)}=$$

$$=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot 1+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{7/20}{3/5}=\frac{7}{12}\cong 58{,}33\%.$$

8) $\text{prob}(2^e \text{ dé vert}|10.-)=\dfrac{\text{prob}(2^e \text{ dé vert et } 10.-)}{\text{prob}(10.-)}=\dfrac{7/20}{1/2}=\dfrac{7}{10}=70\%$ (voir 2) et 7)).

9) Avec $2+n$ dés rouges au départ, on a $\text{prob}(RR)=\dfrac{2+n}{5+n}\cdot\dfrac{1+n}{4+n}=\dfrac{(2+n)(1+n)}{(5+n)(4+n)}=$

$$=\frac{n^2+3n+2}{n^2+9n+20}.$$

$\text{prob}(RR) > 50\% = 0{,}5 \implies \dfrac{n^2+3n+2}{n^2+9n+20} > 0{,}5$

$\implies n^2+3n+2 > 0{,}5n^2+4{,}5n+10 \implies 0{,}5n^2-1{,}5n-8>0$

$\implies n^2-3n-16>0.$

$n^2-3n-16=0 \implies n = \dfrac{3\pm\sqrt{9+64}}{2} = \dfrac{3\pm\sqrt{73}}{2} = \begin{cases} 5{,}77 \\ -2{,}77 \end{cases}.$

Ainsi $n^2-3n-16>0$ si $n \in \left]-\infty;-2{,}77\right[\cup \left]5{,}77;+\infty\right[$.

Comme $n>0$, on en déduit que $n > 5{,}77$.

Par conséquent, Maxime doit ajouter 6 boules.

10) Avec $2+n$ dés rouges au départ, on a $\text{prob}(RR) = \dfrac{n^2+3n+2}{n^2+9n+20}$ (voir 9)) et

$\text{prob}(VV) = \dfrac{3}{5+n}\cdot\dfrac{2}{4+n} = \dfrac{6}{n^2+9n+20}.$

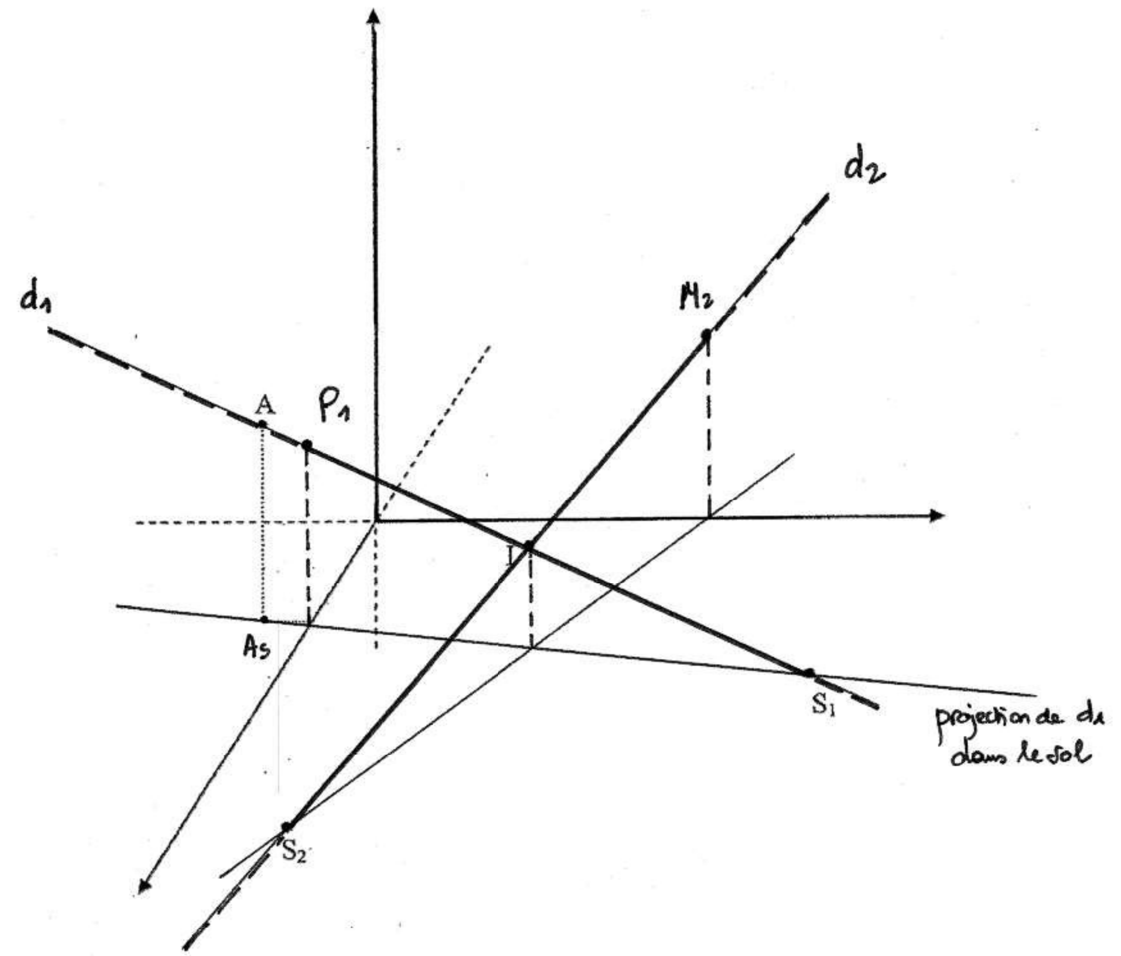
$\text{prob}(RR) = \text{prob}(VV) \implies \dfrac{n^2+3n+2}{n^2+9n+20} = \dfrac{6}{n^2+9n+20} \implies n^2+3n+2=6$

$\implies n^2+3n-4=0 \implies n = \dfrac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{-3\pm5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}.$

Comme $n>1$, on en conclut que Maxime doit ajouter exactement 1 dé rouge.

Exercice 4

4A



4B