Lycée Denis-de-Rougemont

Mathématiques de niveau 2

EXAMEN DE MATURITE 2012

Corrigé

Problème 1

a) A résoudre: $xy'+y+\frac{4}{x}=0 \Rightarrow xy'+y=-\frac{4}{x} \Rightarrow y'+\frac{1}{x}y=-\frac{4}{x^2}$.

C'est une équation linéaire. On va utiliser la technique décrite à la page 84 de Formulaires et Tables.

Commençons par chercher une solution générale de l'équation sans second membre $y'+\frac{1}{x}y=0$.

C'est une équation à variables séparables: $y'+\frac{1}{x}y=0 \Rightarrow y'=-\frac{1}{x}y \Rightarrow \frac{y'}{y}=-\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy=-\int\frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \ln|y|=-\ln|x|+C \Rightarrow |y|=e^{-\ln|x|+C} \Rightarrow |y|=e^{\ln\frac{1}{|x|}}\cdot e^{C}$

$\Rightarrow |y|=k\cdot\frac{1}{|x|} \Rightarrow y=\pm k\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow y=\ell\cdot\frac{1}{x},\ \ell\in\mathbb{R}$.

Cherchons maintenant une solution particulière p de l'équation avec second membre.

Elle sera de la forme $p(x)=c(x)e^{-F(x)}$, où F est une primitive de $f(x)=\frac{1}{x}$ et $c(x)$ est à déterminer en remplaçant y par p dans l'équation avec second membre.

On a $F(x)=\ln|x|$, d'où $p(x)=c(x)e^{-\ln|x|}=c(x)e^{\ln\frac{1}{|x|}}=c(x)\cdot\frac{1}{|x|}=\pm\frac{c(x)}{x}=\frac{c(x)}{x}$

quitte à modifier $c(x)$ avec le signe $\pm$.

On a $p(x)=\frac{u}{v}$ avec $u=c(x)$ et $v=x$. Comme $u'=c'(x)$ et $v'=1$, on obtient

$p'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{c'(x)\cdot x-c(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{c'(x)x-c(x)}{x^2}$.

Ainsi $p'+\frac{1}{x}p=-\frac{4}{x^2} \Rightarrow \frac{c'(x)x-c(x)}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{c(x)}{x}=-\frac{4}{x^2} \Rightarrow \frac{c'(x)x-c(x)+c(x)}{x^2}=-\frac{4}{x^2}$

$\Rightarrow \frac{c'(x)x}{x^2}=-\frac{4}{x^2} \Rightarrow \frac{c'(x)}{x}=-\frac{4}{x^2} \Rightarrow c'(x)=-\frac{4}{x} \Rightarrow c(x)=-4\ln|x|$.

Par conséquent, $p(x)=-\frac{4\ln|x|}{x}$.

On en déduit que la solution générale de $xy'+y=\frac{4}{x}$ est $y=\ell\cdot\frac{1}{x}-\frac{4\ln|x|}{x}=$

$=\frac{\ell-4\ln|x|}{x},\ \ell\in\mathbb{R}$.

On a $f(x)=\frac{2-4\ln(x)}{x}$.

b) Domaine de définition: on doit avoir $x\neq 0$ et $x>0 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}_+^*=]0;+\infty[$.

Zéro: $f(x)=0 \Rightarrow \frac{2-4\ln(x)}{x}=0 \Rightarrow 2-4\ln(x)=0 \Rightarrow 4\ln(x)=2 \Rightarrow \ln(x)=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e} \Rightarrow$ l'unique zéro est $(\sqrt{e};0)$.

Asymptotes: $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}0} f(x)=\lim\limits_{x\underset{>}{\to}0}\frac{2-4\ln(x)}{x}=\frac{+\infty}{0+}=+\infty \Rightarrow x=0$ est une asymptote verticale lorsque $x\underset{>}{\to}0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-4\ln(x)}{x}=0$ car $\ln(x)$ perd face à x lorsque $x\to+\infty$; ainsi $y=0$ est une asymptote horizontale lorsque $x\to+\infty$.

Dérivée: on a $f(x)=\frac{u}{v}$ avec $u=2-4\ln(x)$ et $v=x$. Comme $u'=-\frac{4}{x}$ et $v'=1$, on a

$$f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{-\frac{4}{x}\cdot x-(2-4\ln(x))\cdot 1}{x^2}=\frac{-4-2+4\ln(x)}{x^2}=\frac{4\ln(x)-6}{x^2}.$$

Points à tangente horizontale: $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{4\ln(x)-6}{x^2}=0 \Rightarrow 4\ln(x)-6=0 \Rightarrow 4\ln(x)=6$

$\Rightarrow \ln(x)=\frac{3}{2} \Rightarrow x=e^{3/2}$; avec $x=e^{3/2}$, on a $f(x)=$

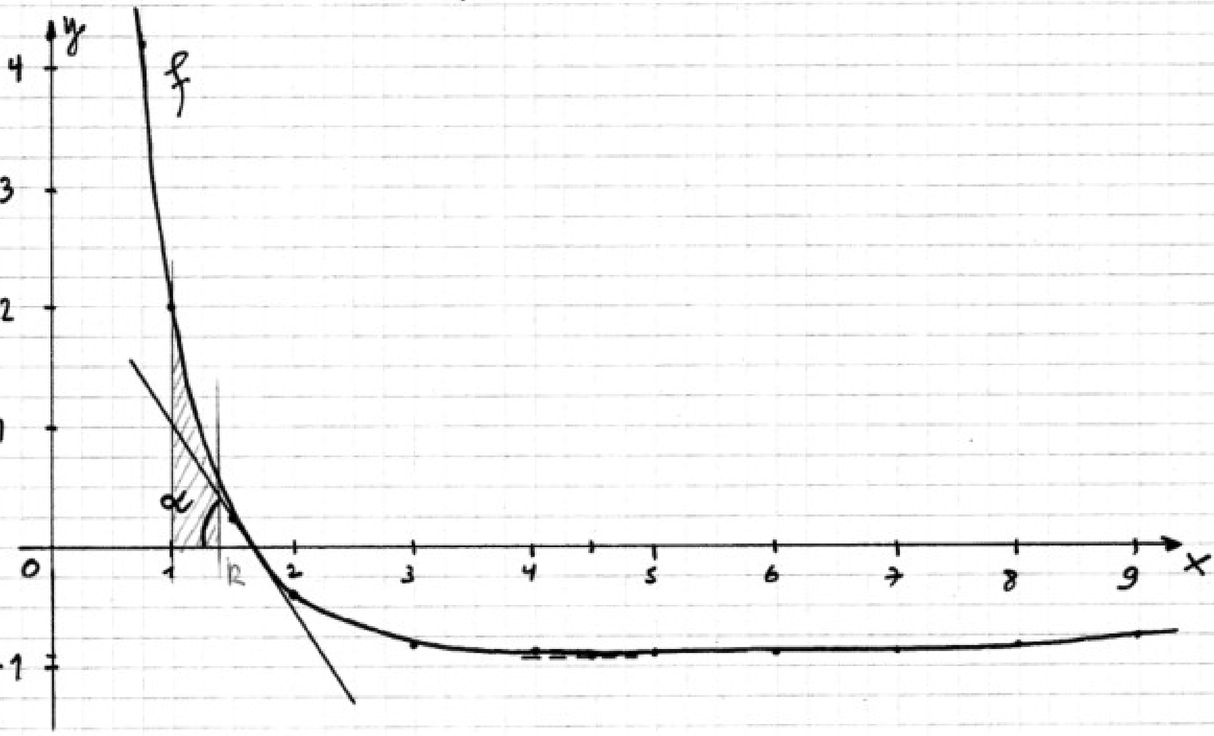
$=\frac{2-4\ln(e^{3/2})}{e^{3/2}}=\frac{2-4\cdot\frac{3}{2}}{e^{3/2}}=\frac{2-6}{e^{3/2}}=\frac{-4}{e^{3/2}}=-4e^{-3/2}$;

ainsi, l'unique point à tangente horizontale est $(e^{3/2};-4e^{-3/2})$;

Comme $\lim_{x \underset{>}{\to} 0} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ et comme $-4e^{-3/2}<0$,

on en déduit que $(e^{3/2};-4e^{-3/2})$ est un minimum de f.

Graphe:



c) L'angle formé par l'axe des x et le graphe de f est l'angle α (voir ci-dessus).
L'angle à chercher est au zéro de f: $x=\sqrt{e}$.
L'angle α est donné par $\tan(\alpha)=|f'(\sqrt{e})|$.
On a, d'après b), $f'(x)=\frac{4\ln(x)-6}{x^2}$. Ainsi $f'(\sqrt{e})=\frac{4\ln(\sqrt{e})-6}{(\sqrt{e})^2}=\frac{4\cdot\frac{1}{2}\ln(e)-6}{e}=$
$=\frac{2\cdot 1-6}{e}=-\frac{4}{e}$.
Ainsi $\tan(\alpha)=\left|-\frac{4}{e}\right| \Rightarrow \tan(\alpha)=\frac{4}{e} \rightsquigarrow \alpha=\tan^{-1}\left(\frac{4}{e}\right)\cong 55,8°$.
L'angle entre l'axe des x et le graphe de f est 55,8°.

d) La surface considérée est représentée ci-dessus en bleu.
On doit avoir $\int_1^k f(x)dx=1$.

Il faut donc trouver une primitive de f.

On a $f(x)=\frac{2-4\ln(x)}{x}=\frac{2}{x}-\frac{4\ln(x)}{x}$. Ainsi $\int f(x)\,dx=\int\frac{2}{x}\,dx-4\int\frac{\ln(x)}{x}\,dx$.

$\int\frac{2}{x}\,dx=2\ln(x)$ (on a $x>0$).

Pour calculer $\int\frac{\ln(x)}{x}\,dx$, on fait le changement de variables $x=e^t$.

On a $x=\frac{dx}{dt}=e^t \Rightarrow dx=e^t\,dt$ et $\ln(x)=\ln(e^t)=t$.

Ainsi $\int\frac{\ln(x)}{x}\,dx=\int\frac{t}{e^t}e^t\,dt=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}$.

Comme $x=e^t$, on a $t=\ln(x)$ et, donc $\int\frac{\ln(x)}{x}\,dx=\frac{\ln^2(x)}{2}$.

Par conséquent, une primitive de f est $F(x)=2\ln(x)-4\frac{\ln^2(x)}{2}=2\ln(x)-2\ln^2(x)=$
$=2\ln(x)(1-\ln(x))$ (+ constante).

Ainsi $\int_1^k f(x)\,dx=F(k)-F(1)=2\ln(k)(1-\ln(k))-2\underbrace{\ln(1)}_{=0}(1-\ln(1))=2\ln(k)(1-\ln(k))$.

$\int_1^k f(x)\,dx=1 \Rightarrow 2\ln(k)(1-\ln(k))=1$.

Le zéro de f est $x=\sqrt{e}$ (voir b.)). Avec $k=\sqrt{e}$, on a $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx=2\ln(\sqrt{e})(1-\ln(\sqrt{e}))=$
$=2\frac{1}{2}\underbrace{\ln(e)}_{=1}(1-\frac{1}{2}\underbrace{\ln(e)}_{=1})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

On aura donc $k>\sqrt{e}$ et, pour que l'aire cherchée soit égale à 1, comme $f(x)<0$ si $x>\sqrt{e}$,
il faut trouver $k>\sqrt{e}$ tel que $\int_1^{\sqrt{e}} f(x)\,dx-\int_{\sqrt{e}}^k f(x)\,dx=1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}-\int_{\sqrt{e}}^k f(x)\,dx=1 \Rightarrow \int_{\sqrt{e}}^k f(x)\,dx=-\frac{1}{2}$.

On a $\int_{\sqrt{e}}^k f(x)\,dx=F(k)-F(\sqrt{e})=2\ln(k)(1-\ln(k))-2\ln(\sqrt{e})(1-\ln(\sqrt{e}))=$
$=2\ln(k)(1-\ln(k))-2\cdot\frac{1}{2}\underbrace{\ln(e)}_{1}(1-\frac{1}{2}\underbrace{\ln(e)}_{1})=2\ln(k)(1-\ln(k))-\frac{1}{2}$.

Ainsi $\int_{\sqrt{e}}^k f(x)\,dx=-\frac{1}{2} \Rightarrow 2\ln(k)(1-\ln(k))-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow 2\ln(k)(1-\ln(k))=0$

$\Rightarrow$ soit $\ln(k)=0$, d'où $k=1$ ce qui est exclu puisque $k>\sqrt{e}>1$, soit
$1-\ln(k)=0 \Rightarrow \ln(k)=1 \Rightarrow k=e$.

Par conséquent, si $k=e$, l'aire entre le graphe de f, l'axe des x et les droites $x=1$ et $x=k$ vaut 1.

e) Soit x_0 l'abscisse du point cherché. Son ordonnée est $f(x_0)$.
L'équation de la tangente en x_0 passant par l'origine est $y=mx$, où $m=f'(x_0)$.

Avec le point $(x_0; f(x_0))$, on a $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0$.

On a $f(x_0) = \frac{2-4\ln(x_0)}{x_0}$ et $f'(x_0) = \frac{4\ln(x_0)-6}{x_0^2}$ (voir b)).

On obtient donc $\frac{2-4\ln(x_0)}{x_0} = \frac{4\ln(x_0)-6}{x_0^2} x_0 \Rightarrow 2-4\ln(x_0) = 4\ln(x_0)-6$

$\Rightarrow 8\ln(x_0) = 8 \Rightarrow \ln(x_0) = 1 \Rightarrow x_0 = e$.

Avec $x_0 = e$, on a $f(x_0) = \frac{2-4\ln(e)}{e} = \frac{2-4}{e} = -\frac{2}{e}$ et $f'(x_0) = \frac{4\ln(e)-6}{e^2} = \frac{4-6}{e^2} = -\frac{2}{e^2}$.

Ainsi, le point du graphe de f en lequel la tangente passe par l'origine est $(e; -\frac{2}{e})$ et l'équation de cette tangente est $y = -\frac{2}{e^2}x$.

Problème 2

On a l'application linéaire f décrite par $M=\begin{pmatrix}1 & k & 0\\ k & -1 & -k\\ 0 & -k & 1\end{pmatrix}$ dans la base standard, $k\neq 0$.

a) Pour vérifier que $\lambda=1$ est une valeur propre de f, on va chercher un vecteur $\vec{v}$ tel que $M\vec{v}=\vec{v}$. $\vec{v}$ sera alors un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda=1$.

$$M\vec{v}=\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & k & 0\\ k & -1 & -k\\ 0 & -k & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}v_1+kv_2=v_1\\ kv_1-v_2-kv_3=v_2\\ -kv_2+v_3=v_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}v_2=0\\ kv_1-v_2-kv_3=v_2\\ v_2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}v_2=0\\ kv_1-kv_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}v_2=0\\ v_3=v_1\end{cases} \Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ 0\\ v_1\end{pmatrix}$$; en prenant $v_1=1$, le vecteur

$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda=1$.

Par conséquent, $\lambda_1=1$ est bien valeur propre de f et $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est le vecteur propre associé.

b) Soient λ_2 et λ_3 les 2 autres valeurs propres de f.

Leur somme est nulle: $\lambda_2+\lambda_3=0 \Rightarrow \lambda_3=-\lambda_2$.

Leur produit est le déterminant de M: $\lambda_2\lambda_3=\det(M)$.

On a $\det(M)=\begin{vmatrix}1 & k & 0\\ k & -1 & -k\\ 0 & -k & 1\end{vmatrix}=-1-k^2-k^2=-2k^2-1$. Ainsi $\lambda_2\lambda_3=-2k^2-1$.

Avec $\lambda_3=-\lambda_2$, on obtient $-\lambda_2^2=-2k^2-1 \Rightarrow \lambda_2^2=2k^2+1 \Rightarrow \lambda_2=\sqrt{2k^2+1} \Rightarrow \lambda_3=-\sqrt{2k^2+1}$.

Ainsi, les 2 autres valeurs propres de f sont $\lambda_2=\sqrt{2k^2+1}$ et $\lambda_3=-\sqrt{2k^2+1}$.

c) Pour que f admette le vecteur propre $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}$, il faut que $M\vec{v}=\lambda\vec{v}$.

$$M\vec{v}=\lambda\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & k & 0\\ k & -1 & -k\\ 0 & -k & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ 2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-2+3k=-2\lambda & (1)\\ -2k-3-2k=3\lambda & (2)\\ -3k+2=2\lambda & (3)\end{cases}$$

(1) $-2+3k=-2\lambda \Rightarrow 2-3k=2\lambda$.

Avec (3), on obtient $2-3k=-3k+2 \rightarrow$ OK.

Ainsi $M\vec{v}=\lambda\vec{v} \Rightarrow \begin{cases}2-3k=2\lambda & (4)\\ -4k-3=3\lambda & (5)\end{cases}$.

(4) $\Rightarrow \lambda=1-\frac{3}{2}k$.

Dans (5), on obtient $-4k-3=3-\frac{9}{2}k \Rightarrow -6=-\frac{1}{2}k \Rightarrow k=12$.

Ainsi, si $k=12$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f.

On prend $k=2$. $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$ est alors la matrice de f dans la base standard $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$.

d) On a $\vec{a}=\vec{u_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

On a $\vec{b} = f(\vec{a}) = M\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix}1&2&0\\2&-1&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et

$\vec{c} = f(\vec{b}) = M\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}1&2&0\\2&-1&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+4\\2-2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\-4\end{pmatrix}.$

$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix}5\\0\\-4\end{pmatrix}$ sont clairement linéairement indépendants.

$(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ forme donc une base de V_3.

La matrice de passage de la base $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$ à la base $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ est $P = \begin{pmatrix}1&1&5\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$

La matrice N de f dans la base $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ sera donnée par $N = P^{-1}MP$.

On a $\det(P) = \begin{vmatrix}1&1&5\\0&2&0\\0&0&-4\end{vmatrix} = -8$, $P_{11} = \begin{vmatrix}2&0\\0&-4\end{vmatrix} = -8$, $P_{21} = \begin{vmatrix}1&5\\0&-4\end{vmatrix} = -4$,

$P_{31} = \begin{vmatrix}1&5\\2&0\end{vmatrix} = -10$, $P_{12} = \begin{vmatrix}0&0\\0&-4\end{vmatrix} = 0$, $P_{22} = \begin{vmatrix}1&5\\0&-4\end{vmatrix} = -4$, $P_{32} = \begin{vmatrix}1&5\\0&0\end{vmatrix} = 0$,

$P_{13} = \begin{vmatrix}0&2\\0&0\end{vmatrix} = 0$, $P_{23} = \begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix} = 0$, $P_{33} = \begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix} = 2$.

Ainsi, $P^{-1} = \frac{1}{-8}\,{}^t\begin{pmatrix}-8&0&0\\4&-4&0\\-10&0&2\end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-8&4&-10\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1/2&5/4\\0&1/2&0\\0&0&-1/4\end{pmatrix}$

Par conséquent, $MP = \begin{pmatrix}1&2&0\\2&-1&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&5\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&5&5\\2&0&18\\0&-4&-4\end{pmatrix}$ et

$N = P^{-1}MP = \begin{pmatrix}1&-1/2&5/4\\0&-1/2&0\\0&0&-1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5&5\\2&0&18\\0&-4&-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&-9\\1&0&9\\0&1&1\end{pmatrix}.$

e) L'image d'un plan par une application linéaire est un plan.
On va chercher l'image de 3 points, puis l'équation contenant les 3 points images.
On choisit dans le plan $\pi: 2x+3y-z=0$ les points $O(0;0;0)$, $A(1;0;2)$ et $B(0;1;3)$. Ainsi, $\vec{OO} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{OA} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{OB} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$.

On a $\vec{OO'} = M\vec{OO} = \begin{pmatrix}1&2&0\\2&-1&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,

$\vec{OA'} = M\vec{OA} = \begin{pmatrix}1&2&0\\2&-1&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$,

$\vec{OB'} = M\vec{OB} = \begin{pmatrix}1&2&0\\2&-1&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-7\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, les points images sont $O' = O(0;0;0)$, $A'(1;-2;2)$ et $B'(2;-7;1)$.
Pour trouver l'équation du plan image, on va chercher un vecteur normal à ce plan. Pour cela, on calcule $\vec{OA'} \wedge \vec{OB'}$:

$$\overrightarrow{OA'} \wedge \overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.1-2.(-7) \\ 2.2-1.1 \\ 1.(-7)-(-2).2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+14 \\ 4-1 \\ -7+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Comme il contient le point O, l'équation du plan image par f de Π : $2x+3y-z=0$ est $4x+y-z=0$.

f) L'application $f \circ f$ est représentée par la matrice M^2.

On a $M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 9 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

L'image de $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par $f \circ f$ est $M^2 \vec{v} =$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 9 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x-4z \\ 9y \\ -4x+5z \end{pmatrix}.$$

Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, cela signifie qu'il appartient au plan $x+z=0$.

On a donc $z=-x$.

Par conséquent, on a $M^2 \vec{v} = \begin{pmatrix} 5x+4x \\ 9y \\ 4z+5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x \\ 9y \\ 9z \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 9\vec{v}$.

Ainsi M^2 envoie $\vec{v}$ sur $9\vec{v}^2$.

On peut donc dire que $f \circ f$ agit sur les vecteurs considérés comme une homothétie de facteur 9.

Problème 3

On a $f(z)=m+\frac{8+6i}{z-3}$, $m \in \mathbb{C}$.

a) On doit avoir $f(-4+i)=2-i \Rightarrow m+\frac{8+6i}{-4+i-3}=2-i \Rightarrow m+\frac{8+6i}{-7+i}=2-i$

$\Rightarrow m=2-i-\frac{8+6i}{-7+i} \Rightarrow m=2-i+\frac{8+6i}{7-i} \Rightarrow m=2-i+\frac{(8+6i)(7+i)}{(7-i)(7+i)}$

$\Rightarrow m=2-i+\frac{56+8i+42i+6i^2}{49-i^2} \Rightarrow m=2-i+\frac{56+50i-6}{49+1}$

$\Rightarrow m=2-i+\frac{50+50i}{50} \Rightarrow m=2-i+1+i \Rightarrow m=3.$

Avec $m=3$, on a $f(z)=3+\frac{8+6i}{z-3}$.

b) On a $w=3+\frac{8+6i}{z-3} \Rightarrow w-3=\frac{8+6i}{z-3} \Rightarrow (w-3)(z-3)=8+6i$

$\Rightarrow z-3=\frac{8+6i}{w-3} \Rightarrow z=3+\frac{8+6i}{w-3}.$

Par conséquent $f^{-1}(z)=3+\frac{8+6i}{z-3}=f(z)$.

c) Les points fixes de f sont les z tels que $f(z)=z$.

$f(z)=z \Rightarrow 3+\frac{8+6i}{z-3}=z \Rightarrow \frac{8+6i}{z-3}=z-3 \Rightarrow 8+6i=(z-3)^2$

$\Rightarrow 8+6i=z^2-6z+9 \Rightarrow z^2-6z+1-6i=0.$

C'est une équation du 2e degré de la forme $az^2+bz+c=0$ avec $a=1$, $b=-6$ et $c=1-6i$.

On a $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4.1.(1-6i)=36-4+24i=32+24i.$

On doit chercher $\sqrt{\Delta}$, autrement dit les racines carrées de $32+24i$.

Le module de $32+24i$ est $\sqrt{32^2+24^2}=40$ et l'argument de $32+24i$ est $\tan^{-1}\left(\frac{24}{32}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$.

On a ainsi $32+24i=40\operatorname{cis}\left(\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

Ainsi le module de $\sqrt{32+24i}$ est $\sqrt{40}$ et les 2 arguments possibles de $\sqrt{32+24i}$ sont $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ et $\frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)+2\pi\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)+\pi$.

Les racines de $\sqrt{32+24i}$ sont donc:

1) $\sqrt{40}\operatorname{cis}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right)=\sqrt{40}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right)\right)=6+2i$ et

2) $\sqrt{40}\operatorname{cis}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)+\pi\right)=\sqrt{40}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)+\pi\right)+i\sin\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)+\pi\right)\right)=$

$=-6-2i=-(6+2i).$

On peut donc prendre $\sqrt{\Delta}=6+2i$.

Les solutions de $z^2-6z+1-6i=0$ sont alors:

$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+6+2i}{2} = \frac{12+2i}{2} = 6+i$ et

$z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-(6+2i)}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$.

Par conséquent, les points fixes de f sont $z_1 = 6+i$ et $z_2 = -i$

d) Avec $z = x+yi$, on a $f(z) = f(x+yi) = 3 + \frac{8+6i}{x+yi-3} =$

$= 3 + \frac{8+6i}{x-3+yi} = 3 + \frac{(8+6i)(x-3-yi)}{(x-3+yi)(x-3-yi)} =$

$= 3 + \frac{8x-24-8yi+6ix-18i+6y}{(x-3)^2-(yi)^2} =$

$= 3 + \frac{8x+6y-24+(6x-8y-18)i}{(x-3)^2+y^2} =$

$= 3 + \frac{8x+6y-24}{(x-3)^2+y^2} + \frac{6x-8y-18}{(x-3)^2+y^2} i = u+vi$ avec

$u = 3 + \frac{8x+6y-24}{(x-3)^2+y^2}$ et $v = \frac{6x-8y-18}{(x-3)^2+y^2}$.

e) L'axe réel est l'ensemble des $x+yi$ avec $y=0$.

Avec $y=0$, on a, d'après d), $u = 3 + \frac{8x-24}{(x-3)^2}$ et $v = \frac{6x-18}{(x-3)^2}$. On doit avoir $x \neq 3$.

On remarque que $v = \frac{6x-18}{(x-3)^2} = 6\frac{x-3}{(x-3)^2} = \frac{6}{8}\,\frac{8x-24}{(x-3)^2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{8x-24}{(x-3)} = \frac{3}{4}(u-3)$.

Ainsi $4v = 3(u-3) \Rightarrow 4v = 3u-9 \Rightarrow 3u-4v-9=0$.

Comme $\frac{8x-24}{(x-3)^2} = \frac{8}{x-3}$, on a $u \neq 3$.

Ainsi, l'image de l'axe réel privé du point $(3;0)$ est la droite $3u-4v-9=0$ privé du point $(3;0)$.

f) Avec $f(z) = u+vi$, on doit avoir $u=2$.

$u=2 \Rightarrow 3 + \frac{8x+6y-24}{(x-3)^2+y^2} = 2$.

On remarque que si $x=3$ et $y=0$, on a $(x-3)^2+y^2=0$, ce qui est exclu dans l'équation ci-dessus. On doit donc dire $(x;y) \neq (3;0)$.

$3 + \frac{8x+6y-24}{(x-3)^2+y^2} = 2 \Rightarrow \frac{8x+6y-24}{(x-3)^2+y^2} = -1 \Rightarrow 8x+6y-24 = -(x-3)^2-y^2$

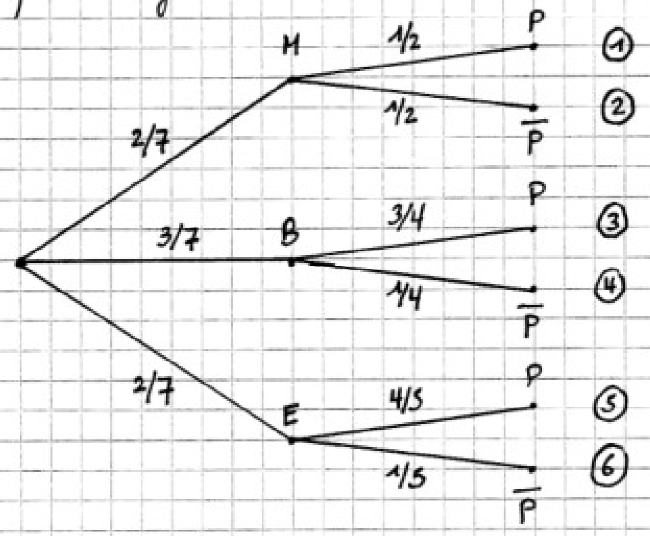
$\Rightarrow 8x+6y-24 = -x^2+6x-9-y^2 \Rightarrow x^2+2x+y^2+6y-15=0$

$$\Rightarrow (x+1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 - 15 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y+3)^2 = 25 = 5^2.$$

Ainsi, l'ensemble des $(x;y)$ tels que $f(x+yi)$ a une partie réelle égale à 2 est le cercle de centre $(-1;-3)$ et de rayon 5 privé du point $(3;0)$ ($(3;0)$ est un point du cercle de centre $(-1;-3)$ et de rayon 5 car $(3+1)^2 + (0+3)^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$).

Problème 4

En notant M la forme moyenne, B la bonne forme et E la forme excellente, on a :
$P(B) = \frac{3}{7}$ et $P(M) = P(E) = \frac{1-3/7}{2} = \frac{4/7}{2} = \frac{2}{7}$.
En notant P un podium pour Cuche, on a :
$P(P|M) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $P(P|B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et $P(P|E) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.
On peut alors faire un arbre :



a) $P(\overline{P}) =$ chemins ② + ④ + ⑥ $= \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{5} = \frac{43}{140} \cong 0{,}307 = 30{,}7\%$.

b) C'est une probabilité conditionnelle : $P(U|V) = \frac{P(U\cap V)}{P(V)}$, où U = forme excellente (E) et V = sur le podium (P).
On a $U \cap V$ = forme excellente (E) et sur le podium (P), $p(U\cap V) = \frac{2}{7}\cdot\frac{4}{5} = \frac{8}{35}$ et
$p(U) = p(P) = 1 - p(\overline{P}) = 1 - \frac{43}{140} = \frac{97}{140}$ d'après a).
Ainsi $p(U|V) = \frac{p(U\cap V)}{p(V)} = \frac{8/35}{97/140} = \frac{32}{97} \cong 0{,}33 = 33\%$.

c) On va utiliser la loi binomiale : $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
Ici, X compte le nombre de podiums, k est le nombre de podiums obtenus, n est le nombre de courses ($n=5$), p est la probabilité d'être sur le podium avec une forme bonne ($p =$ chemin ③ $= \frac{3}{4}$).
c1) On a $k = 3 \Rightarrow p(X=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(1-\frac{3}{4}\right)^{5-3} = 10\cdot\frac{27}{64}\cdot\frac{1}{16} = \frac{135}{512} \cong 0{,}264 = 26{,}4\%$.
c2) On a $k \geq 2 \Rightarrow p(X\geq 2) = 1 - p(X=0) - p(X=1) =$
$= 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(1-\frac{3}{4}\right)^{5-0} - \binom{5}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(1-\frac{3}{4}\right)^{5-1} = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5 - 5\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4 =$
$= 1 - \frac{1}{1024} - \frac{15}{1024} = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64} \cong 0{,}984 = 98{,}4\%$.

Notons G la victoire de Cuche contre un adversaire et $\overline{G}$ sa défaite.
On a $p(G) = 90\% = \frac{9}{10}$ et $p(\overline{G}) = 1 - p(G) = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$.

d) On a $P(X=2)=P(G\overline{G})=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{9}{100}=0{,}09=9\%$,

$P(X=3)=P(GG\overline{G})=\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{81}{1000}=0{,}081=8{,}1\%$ et

$P(X=n)=P(\underbrace{GG\ldots G}_{n-1}\overline{G})=\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{10}=\frac{9^{n-1}}{10^n}$.

e) La probabilité que Cuche gagne les 8 premières courses est $P(GGGGGGGG)=\left(\frac{9}{10}\right)^8\cong$
$=0{,}4305=43{,}05\%$

f) La probabilité que Cuche fasse moins de 12 courses est $P(X<12)=\sum_{i=1}^{11}P(X=i)=$
$=\sum_{i=1}^{11}\frac{9^{i-1}}{10^i}$ (voir d)).

On a alors $P(X<12)=\sum_{i=1}^{11}\frac{1}{10}\cdot\frac{9^{i-1}}{10^{i-1}}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{11}\left(\frac{9}{10}\right)^{i-1}$

La suite $\left(\frac{9}{10}\right)^{i-1}$ est une suite géométrique de raison $r=\frac{9}{10}$.

D'après Formulaires et Tables p. 86, on a $\sum_{i=1}^{11}\left(\frac{9}{10}\right)^{i-1}=\sum_{j=0}^{10}\left(\frac{9}{10}\right)^j=\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{11}}{1-\frac{9}{10}}=$
$=\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{11}}{\frac{1}{10}}=10\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{11}\right)$.

Par conséquent $P(X<12)=\frac{1}{10}\cdot10\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{11}\right)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{11}\cong0{,}686=68{,}6\%$.

g) On doit trouver k tel que $P(x<k)>98\%=0{,}98$.

Similairement à f), on a $P(x<k)=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{9}{10}\right)^{i-1}=\frac{1}{10}\sum_{j=0}^{k-2}\left(\frac{9}{10}\right)^j=$
$=\frac{1}{10}\,\frac{1-\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}}{1-\frac{9}{10}}=\frac{1}{10}\cdot10\cdot\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\right)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$.

On doit donc avoir $1-\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}>0{,}98\Rightarrow\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}<0{,}02$.

Comme la fonction log est strictement croissante ($x<y\Rightarrow\log(x)<\log(y)$),
on obtient $\log\left(\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\right)<\log(0{,}02)$.

Par une propriété du log, on a $\log\left(\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\right)=(k-1)\log\left(\frac{9}{10}\right)$.

On obtient donc $(k-1)\log\left(\frac{9}{10}\right)<\log(0{,}02)$.

Comme $\log\left(\frac{9}{10}\right)<0$, on trouve $k-1>\frac{\log(0{,}02)}{\log(9/10)}\Rightarrow k>1+\frac{\log(0{,}02)}{\log(9/10)}\cong38{,}13$.

Cuche doit donc faire au minimum 39 courses.