Lycée Jean-Piaget
Neuchâtel

Mathématiques

Examen de maturité 2012

Corrigé

Exercice 1

1) C_1 : centre $M_1(2;0)$ et rayon $r_1=\sqrt{25}=5$;
C_2 : centre $M_2(-2;-3)$ et rayon $r_2=\sqrt{9}=3$.

On a $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$.
Comme $r_1+r_2=5+3=8>5=\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$, on en déduit que les 2 cercles sont sécants.

2) D'après 1), $M_1M_2=5=r_1 \Rightarrow M_2\in C_1$.
La tangente s est perpendiculaire à $\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
Son équation cartésienne s'écrit donc $4x+3y+c=0$.
Avec $M_2(-2;-3)$, on obtient $4\cdot(-2)+3\cdot(-3)+c=0 \Rightarrow c=17$.
Ainsi, l'équation cartésienne de s est $4x+3y+17=0$.

3) Intersection I de s avec l'axe Ox : $y=0 \Rightarrow 4x+17=0 \Rightarrow x=-\frac{17}{4} \Rightarrow I(-\frac{17}{4};0)$.

4) L'équation de la tangente s' est de la forme $ax+by+c=0$. Comme I et M_1 sont sur l'axe x, si la pente de s est m, la pente de s' est $-m$.
On a s : $4x+3y+17=0 \Rightarrow 3y=-4x-17 \Rightarrow y=-\frac{4}{3}x-\frac{17}{3}$.
On a alors s' : $y=\frac{4}{3}x+c$.
Avec $I(-\frac{17}{4};0)$, on obtient $0=\frac{4}{3}(-\frac{17}{4})+c \Rightarrow c=\frac{17}{3}$.
Ainsi l'équation de s' est $y=\frac{4}{3}x+\frac{17}{3} \Rightarrow 3y=4x+17 \Rightarrow 4x-3y+17=0$.

5) On a $\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.
Ainsi $\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ est perpendiculaire à la droite cherchée. Son équation est donc
$3x-4y+c=0$.
Elle doit être tangente à C_1. On doit donc avoir $\text{dist}(M_1;t)=r_1=5$

$$\Rightarrow \frac{|3\cdot2-4\cdot0+c|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5 \Rightarrow |6+c|=5\cdot5 \Rightarrow |6+c|=25$$

$\Rightarrow$ soit $6+c=25 \Rightarrow c=19$, soit $6+c=-25 \Rightarrow c=-31$
D'après le dessin, on doit avoir $y<0$ si $x=0$.
Comme $4y=3x+c=c$ si $x=0$, pour que $y<0$, il faut que $c<0$.
On a donc $c=-31$ et l'équation de t est : $3x-4y-31=0$.

6) T est l'intersection de C_1 et t : $\begin{cases} (x-2)^2+y^2=25 & ① \\ 3x-4y-31=0 & ② \end{cases}$

② $\Rightarrow$ $4y=3x-31 \Rightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{31}{4}$.

Dans ① $\Rightarrow$ $(x-2)^2+\left(\frac{3}{4}x-\frac{31}{4}\right)^2=25$

$\Rightarrow x^2-4x+4+\frac{9}{16}x^2-\frac{93}{8}x+\frac{961}{16}=25$

$\Rightarrow 16x^2-64x+64+9x^2-186x+961=400$

$\Rightarrow 25x^2-250x+625=0$

$\Rightarrow x^2-10x+25=0$

$\Rightarrow (x-5)^2=0 \Rightarrow x-5=0 \Rightarrow x=5$.

Avec $x=5$, on a $y=\frac{3}{4}\cdot 5-\frac{31}{4}=-4$.

Ainsi, on a $T(5;-4)$.

7) Comme $H_1 \in Ox$, pour que le triangle OAH_1 soit rectangle, il faut que $A \in Oy$.

Autrement dit, on a $A(0;y)$.

$A \in C_2 \Rightarrow (0+2)^2+(y+3)^2=9 \Rightarrow 4+(y+3)^2=9 \Rightarrow (y+3)^2=5$

$\Rightarrow y+3=\pm\sqrt{5} \Rightarrow y=-3\pm\sqrt{5} \cong \begin{cases} -0{,}76 \\ -5{,}24 \end{cases}$.

Ainsi, on a 2 possibilités pour A : $(0;-0{,}76)$ et $(0;-5{,}24)$.

Exercice 2

On a $f(x)=(10x-5)e^{-x}$.

1) Domaine de définition: $D=\mathbb{R}$.

Asymptotes verticales: aucune puisque $D=\mathbb{R}$.

Asymptotes non verticales: on a $\lim\limits_{x\to-\infty}(10x-5)e^{-x}=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}(10x-5)e^{-x}=(+\infty)\cdot 0=0$ puisque e^{-x} gagne

$\Rightarrow$ $y=0$ est asymptote horizontale lorsque $x\to+\infty$;

comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(10x-5)e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{10x-5}{x}e^{-x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x(10-\frac{5}{x})}{x}e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(10-\frac{5}{x})e^{-x}=10\cdot(+\infty)=$

$=+\infty$, il n'y a pas d'asymptote non verticale lorsque

$x\to-\infty$.

2) On a $f(0)=-5e^{0}=-5$ $\Rightarrow$ la courbe coupe l'axe Oy en $(0;-5)$.

3) A: $f(x)=0 \Rightarrow (10x-5)e^{-x}=0 \Rightarrow 10x-5=0$ car $e^{-x}>0$ pour tout x

$\Rightarrow 10x=5 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow A(\frac{1}{2};0)$.

B: $f(x)=uv$ avec $u=10x-5$ et $v=e^{-x}$ $\Rightarrow u'=10$ et $v'=-e^{-x}$

$\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'=10e^{-x}+(10x-5)(-e^{-x})=(10-10x+5)e^{-x}=$

$=(-10x+15)e^{-x}$;

$f'(x)=0 \Rightarrow (-10x+15)e^{-x}=0 \Rightarrow -10x+15=0$ car $e^{-x}>0$ pour tout x

$\Rightarrow 10x=15 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$;

avec $x=\frac{3}{2}$, on a $f(x)=(10\cdot\frac{3}{2}-5)e^{-\frac{3}{2}}=(15-5)e^{-\frac{3}{2}}=10e^{-\frac{3}{2}}\cong 2{,}23$

$\Rightarrow B(\frac{3}{2};10e^{-\frac{3}{2}})\cong(1{,}5;2{,}23)$.

C: intersection de $y=(10x-5)e^{-x}$ et $y=x-\frac{1}{2}$;

$y=(10x-5)e^{-x}=10(x-\frac{1}{2})e^{-x}$;

on obtient ainsi $10(x-\frac{1}{2})e^{-x}=x-\frac{1}{2} \Rightarrow 10(x-\frac{1}{2})e^{-x}-(x-\frac{1}{2})=$

$=(x-\frac{1}{2})(10e^{-x}-1)=0$

$\Rightarrow$ soit $x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$,

soit $10e^{-x}-1=0 \Rightarrow 10e^{-x}=1 \Rightarrow e^{-x}=0{,}1 \Rightarrow -x=\ln(0{,}1)$

$\Rightarrow x=-\ln(0{,}1)=\ln(\frac{1}{0{,}1})=\ln(10)$;

$x=\frac{1}{2}$ correspond au point $A\neq C$;

on a donc $x=\ln(10)$;

$x=\ln(10) \Rightarrow f(x)=(10\ln(10)-5)e^{-\ln(10)}=(10\ln(10)-5)e^{\ln(\frac{1}{10})}=$

$=(10\ln(10)-5)\cdot\frac{1}{10}=\ln(10)-\frac{1}{2}$;

ainsi, on a $C\left(\ln(10);\ln(10)-\frac{1}{2}\right)\cong(2{,}3;1{,}8)$.

4) t est la tangente au graphe de f au point $A(\frac{1}{2};0)$.
Son équation est $t: y=mx+h$, où $m=f'(\frac{1}{2})$ et $h=f(\frac{1}{2})-m\cdot\frac{1}{2}$.
D'après 2), on a $f'(x)=(-10x+15)e^{-x}$.
Ainsi $f'(\frac{1}{2})=(-10\cdot\frac{1}{2}+15)e^{-\frac{1}{2}}=(-5+15)e^{-\frac{1}{2}}=10e^{-\frac{1}{2}}$.
Par conséquent, la pente de t est $10e^{-\frac{1}{2}}=\frac{10}{\sqrt{e}}\cong 6{,}07$.
On a alors $h=f(\frac{1}{2})-m\cdot\frac{1}{2}=0-\frac{10}{\sqrt{e}}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{10}{2\sqrt{e}}=-\frac{5}{\sqrt{e}}$.
L'équation de t s'écrit alors $y=\frac{10}{\sqrt{e}}x-\frac{5}{\sqrt{e}} \Rightarrow \sqrt{e}y=10x-5$
$\Rightarrow 10x-\sqrt{e}y-5=0$.

5) La pente de t est $m_1=\frac{10}{\sqrt{e}}$ (voir 4)).
La pente de d est $m_2=1$.
D'après Formulaires et Tables p. 51, l'angle φ entre t et d est alors donné par
$$\tan(\varphi)=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{\frac{10}{\sqrt{e}}-1}{1+\frac{10}{\sqrt{e}}\cdot 1}\right|=\left|\frac{10-\sqrt{e}}{\sqrt{e}+10}\right|\cong 0{,}717$$
$\Rightarrow \varphi\cong 35{,}64°$.

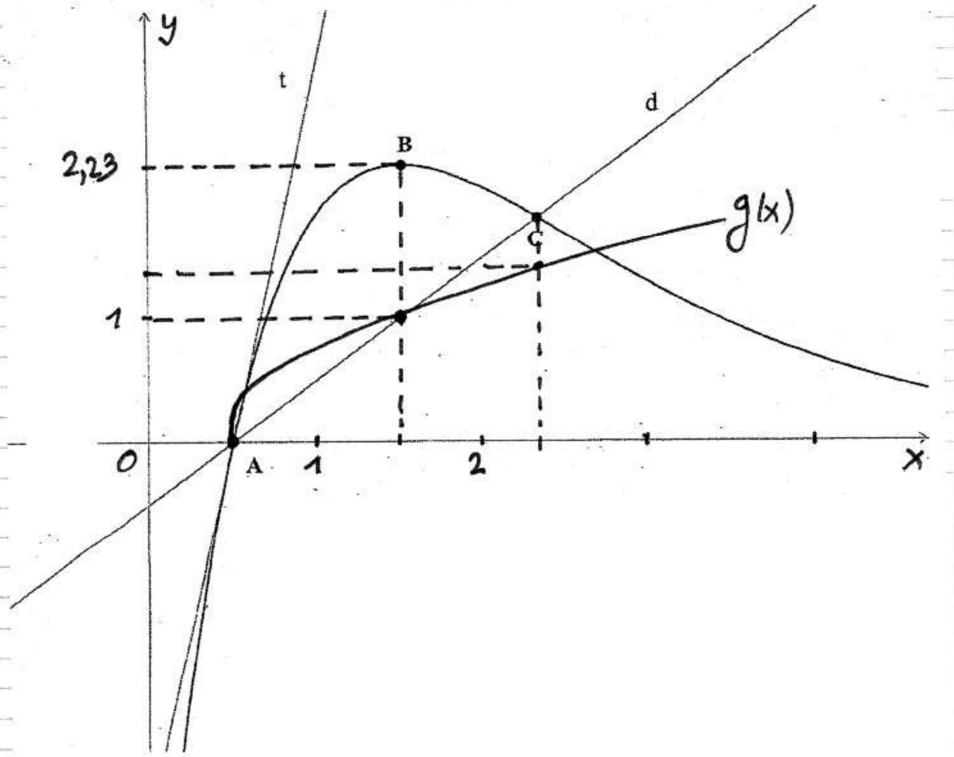
6) On a $A=(\frac{1}{2};0)$ et $C\left(\ln(10);\ln(10)-\frac{1}{2}\right)$.
L'aire de la surface est donc $\int_{1/2}^{\ln(10)}(f(x)-d(x))dx=\int_{1/2}^{\ln(10)}\left((10x-5)e^{-x}-(x-\frac{1}{2})\right)dx=$
$$=\int_{1/2}^{\ln(10)}(10x-5)e^{-x}dx-\int_{1/2}^{\ln(10)}x\,dx+\int_{1/2}^{\ln(10)}\frac{1}{2}dx=$$
$$=\int_{1/2}^{\ln(10)}(10x-5)e^{-x}dx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{\ln(10)}+\left[\frac{1}{2}x\right]_{1/2}^{\ln(10)}=$$
$$=\int_{1/2}^{\ln(10)}(10x-5)e^{-x}dx-\frac{\ln^2(10)}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ln(10)-\frac{1}{4}.$$
Reste à trouver une primitive de $f(x)=(10x-5)e^{-x}$.
On va utiliser la formule d'intégration par parties: $\int uv'dx=uv-\int u'v\,dx$.
Avec $u=10x-5$ et $v'=e^{-x}$, on a $u'=10$ et $v=-e^{-x}$.
Ainsi, $\int(10x-5)e^{-x}dx=\int uv'dx=uv-\int u'v\,dx=$
$$=(10x-5)(-e^{-x})-\int 10(-e^{-x})dx=(-10x+5)e^{-x}+10\int e^{-x}dx=$$
$$=(-10x+5)e^{-x}-10e^{-x}=(-10x-5)e^{-x}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$
L'aire de la surface est ainsi $\left[(-10x-5)e^{-x}\right]_{1/2}^{\ln(10)}-\frac{\ln^2(10)}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ln(10)-\frac{1}{4}=$
$$=(-10\ln(10)-5)e^{-\ln(10)}-(-10\cdot\tfrac{1}{2}-5)e^{-\frac{1}{2}}-\frac{\ln^2(10)}{2}+\frac{1}{2}\ln(10)-\frac{1}{8}=$$
$$=(-10\ln(10)-5)e^{\ln(\frac{1}{10})}+10e^{-\frac{1}{2}}-\frac{\ln^2(10)}{2}+\frac{1}{2}\ln(10)-\frac{1}{8}=$$

$$= \left(-10\ln(10)-5\right)\cdot\frac{1}{10}+10e^{-\frac{1}{2}}-\frac{\ln^2(10)}{2}+\frac{1}{2}\ln(10)-\frac{1}{8}=$$

$$=-\ln(10)-\frac{1}{2}+\frac{10}{\sqrt{e}}-\frac{\ln^2(10)}{2}+\frac{1}{2}\ln(10)-\frac{1}{8}=$$

$$=\frac{10}{\sqrt{e}}-\frac{\ln^2(10)}{2}-\frac{1}{2}\ln(10)-\frac{5}{8}\cong 1,638.$$

7) On a



Exercice 3

Partie A

1) Elle choisit déjà 1 groupe de 4 élèves (C_4^{15}), puis un 2e groupe de 4 élèves (C_4^{11}), puis un 3e groupe de 4 élèves (C_4^{7}) et le groupe de 3 élèves (C_3^3).
Il y a donc $C_4^{15} \cdot C_4^{11} \cdot C_4^{7} \cdot C_3^{3} = 15'765'750$ possibilités.

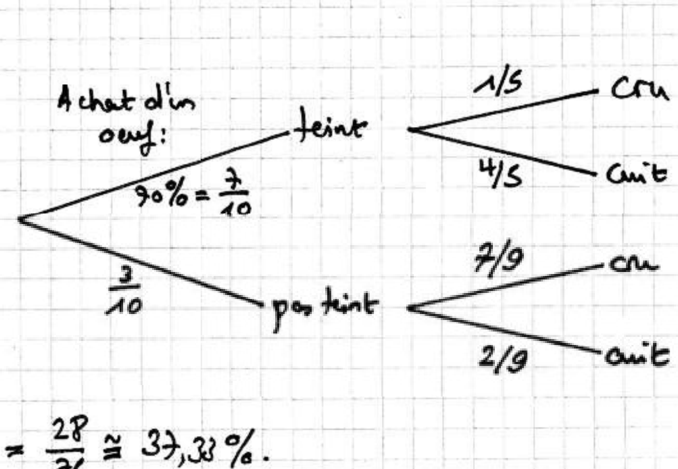
2) 1e semaine: $\text{prob} = \frac{1}{15}$
2e semaine: $\text{prob} = \frac{1}{15}$
3e semaine: $\text{prob} = \frac{1}{15}$
$\Rightarrow$ prob interrogé 3 semaines de suite $= \left(\frac{1}{15}\right)^3 = \frac{1}{3375} \cong 0{,}03\,\%$.

3) S'il y a 16 chaises, il y a 16 possibilités d'avoir une chaise vide.
S'il y a 17 chaises, il y a $C_2^{17} = 136$ possibilités d'avoir 2 chaises vides.
S'il y a 18 chaises, il y a $C_3^{18} = 816$ possibilités d'avoir 3 chaises vides.
Il y a donc 18 chaises.

4) Il y a 4 groupes qu'on peut permuter: $4!$ possibilités.
Possibilités dans le groupe aux yeux bleus: $5!$.
Possibilités dans le groupe aux yeux verts: $3!$.
Possibilités dans le groupe aux yeux bruns: $6!$.
Possibilités dans le groupe aux yeux noirs: 1.
Au total, il y a donc $4! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 6! \cdot 1 = 12'441'600$ possibilités.

Partie B

On a la situation suivante:



1) $\text{prob}(\text{cru}) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{75} \cong 37{,}33\,\%$.

2) $\text{prob}(\text{cru} \mid \text{non teint}) = \dfrac{\text{prob}(\text{cru et non teint})}{\text{prob}(\text{non teint})} = \dfrac{\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{7}{9} \cong 77{,}78\,\%$.

3) $\text{prob}(\text{teint} \mid \text{cru}) = \dfrac{\text{prob}(\text{cru et teint})}{\text{prob}(\text{cru})} = \dfrac{\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{28}{75}} = \frac{3}{8} = 37{,}5\,\%$

4) prob (au moins 5 crus | non-teints) =
= prob (5 crus | non-teints) + prob (6 crus | non-teints) =
$= C_5^6 \left(\text{prob}(\text{cru} \mid \text{non-teint})\right)^5 \left(\text{prob}(\text{cuit} \mid \text{non-teint})\right)^1 + \left(\text{prob}(\text{cru} \mid \text{non-teint})\right)^6 =$
$= C_5^6 \left(\frac{7}{9}\right)^5 \cdot \frac{2}{9} + \left(\frac{7}{9}\right)^6 \cong 60{,}09\%.$

5) Elle va acheter n oeufs.
prob (au moins 1 cru | non teints) > 99,99%
$\Rightarrow$ 1 − prob (zéro cru | nonteints) > 0,9999
$\Rightarrow$ prob (zéro cru | nonteints) < 0,0001
$\Rightarrow$ prob (n cuits | nonteint) < 0,0001
$\Rightarrow \left(\frac{2}{9}\right)^n < 0{,}0001$
$\Rightarrow \log\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n\right) < \log(0{,}0001)$ car $a<b \Rightarrow \log(a)<\log(b)$
$\Rightarrow n \log\left(\frac{2}{9}\right) < \log(0{,}0001)$ car $\log(a^n) = n\log(a)$
$\Rightarrow n > \frac{\log(0{,}0001)}{\log(2/9)} \cong 6{,}12$ car $\log\left(\frac{2}{9}\right) < 0$
$\Rightarrow$ Elle doit donc acheter 7 oeufs.

Inscrire votre nom et prénom sur cette page, ainsi que votre classe :

NOM : .... PRENOM : .... CLASSE : ....

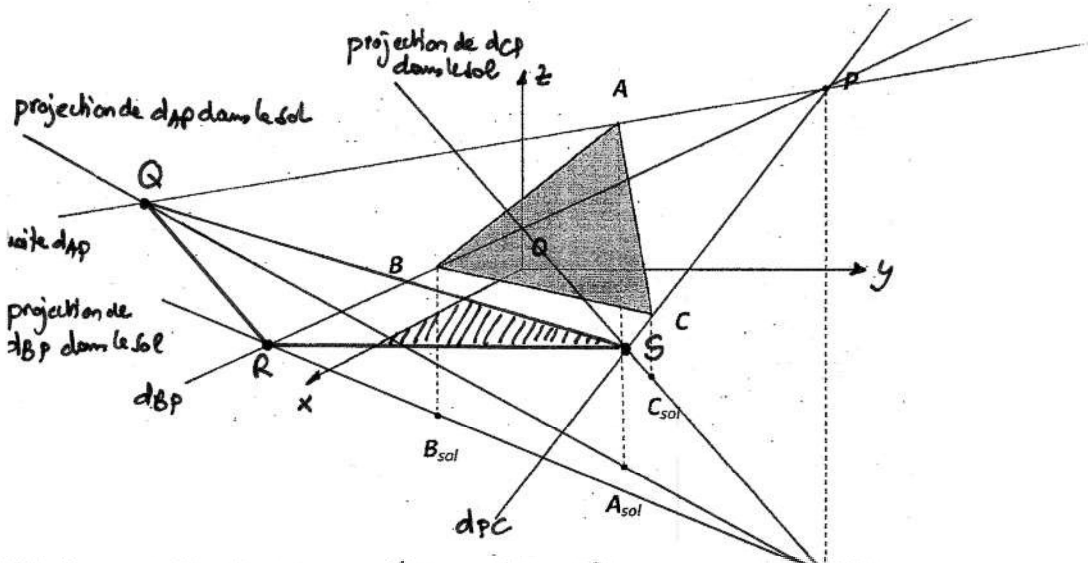
<u>EXERCICE 4</u> GEOMETRIE DANS L'ESPACE

EXERCICE EN 3 PARTIES A EFFECTUER DIRECTEMENT SUR LES PAGES 6 ET 7 !

CONSEIL : FAIRE LES CONSTRUCTIONS AU CRAYON DE PAPIER !

<u>Partie 1</u>

Construire les traces dans le sol des droites AP, BP et CP puis hachurer la partie visible du triangle formé par ces trois traces.



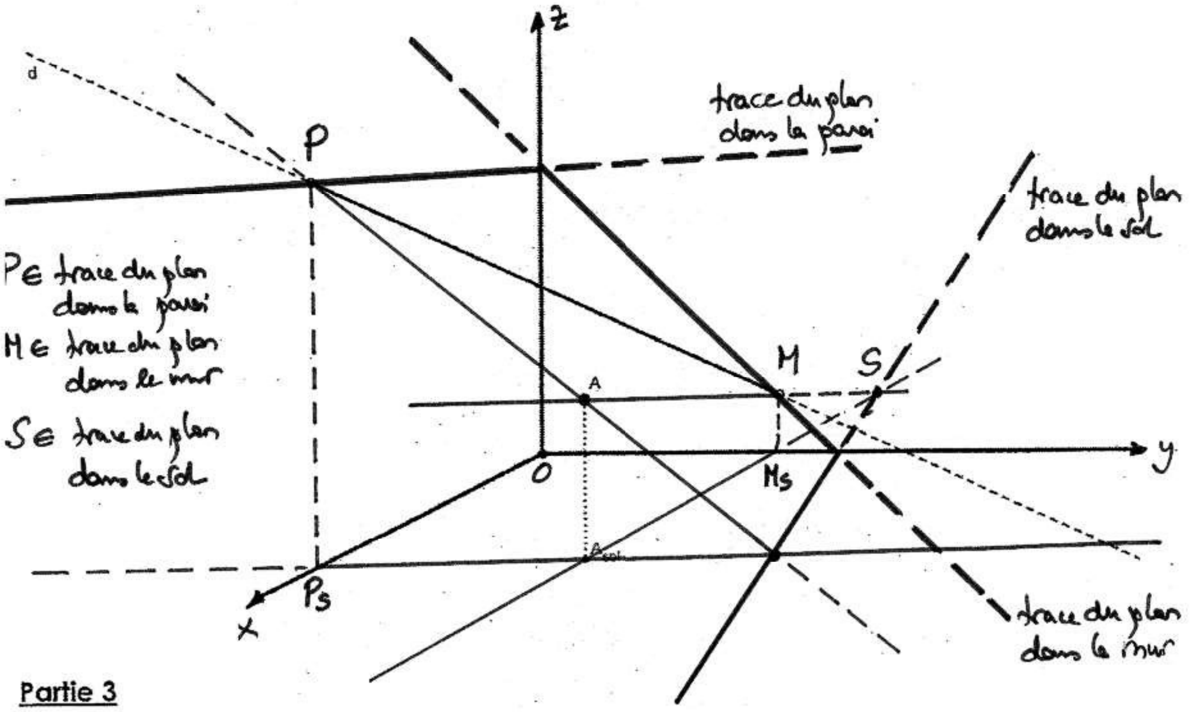
Q : trace de d_{AP} dans le sol (derrière la paroi)
R : trace de d_{BP} dans le sol (derrière la paroi)
S : trace de d_{CP} dans le sol (visible).

Inscrire votre nom et prénom sur cette page, ainsi que votre classe :

NOM : .... PRENOM : .... CLASSE : ....

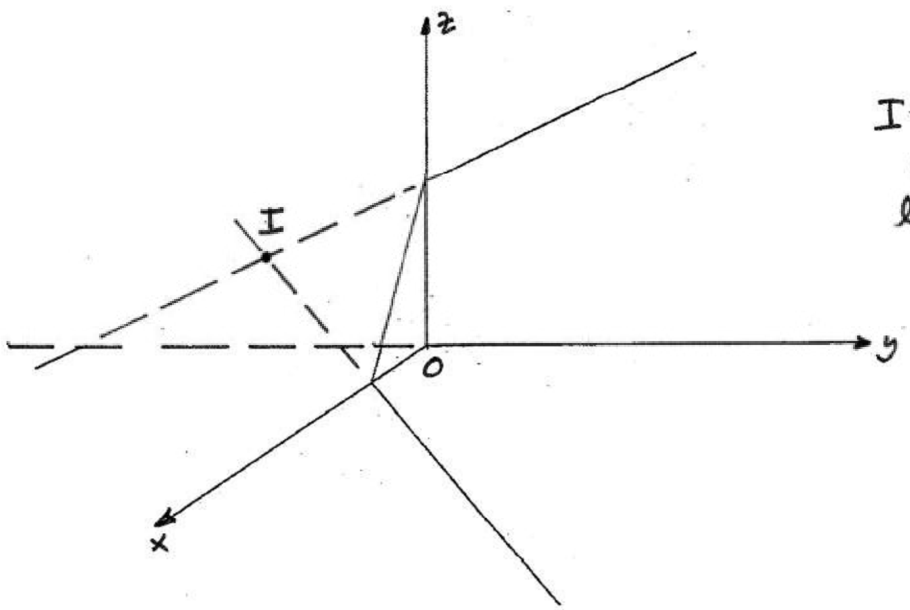
Partie 2

En respectant les conventions de dessin, construire les traces du plan contenant la droite d et le point A.



Partie 3

S'agit-il des traces d'un plan ?
Répondre à la question à l'aide d'une construction claire.



I devrait appartenir à Oy, mais ce n'est pas le cas ⟹ non !