gymnase
Yverdon

Examens d'admission à l'École de Maturité

Corrigé

Mai 2012

1ère année
OSPM Application des mathématiques

Durée :	90 minutes
Matériel autorisé apporté par l'élève :	règle, équerre, rapporteur, compas

Consignes :

1. Les points attribués à chaque problème sont indiqués sur l'énoncé.
2. Après avoir, si nécessaire, travaillé sur un brouillon, le candidat rédige à l'encre les **solutions directement sur les feuilles de données** dans l'espace prévu à cet effet sous le problème. Lorsqu'exceptionnellement cet espace n'est pas suffisant, le candidat l'indique clairement dans sa réponse. Il utilise alors une des feuilles blanches à la fin de ce document (en y mentionnant le numéro de l'exercice en question) pour terminer sa rédaction.
   Les feuilles de brouillon ne sont pas corrigées.
   La rédaction doit être soignée.
   Les calculs et les raisonnements doivent être détaillés.
   La réponse est soulignée ou encadrée à la fin du problème.
   Si la présentation est insuffisante, le problème ne sera pas corrigé et aucun point ne sera attribué.

Nom : .... Prénom : ....

Problème 1 [8pts]
Soit l'équation
$$\frac{x^2}{m^2-1}+\frac{4x}{m+1}-8=0$$
Pour quelles valeurs de m cette équation admet-elle une seule solution ?
Calculer cette solution.

Solution : On remarque tout d'abord que $m^2-1=(m+1)(m-1)$ (identité remarquable).
L'équation s'écrit donc $\frac{x^2}{m^2-1}+\frac{4x(m-1)}{m^2-1}-\frac{8(m^2-1)}{m^2-1}=0$, c'est-à-dire
$x^2+4(m-1)x-8(m^2-1)=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme
$ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=4(m-1)$ et $c=-8(m^2-1)$. On a $\Delta=b^2-4ac=$
$=(4(m-1))^2-4\cdot1\cdot(-8(m^2-1))=16(m-1)^2+32(m^2-1)=16(m^2-2m+1)+32(m^2-1)=$
$=16m^2-32m+16+32m^2-32=48m^2-32m-16=16(3m^2-2m-1)$.
L'équation aura une solution unique si $\Delta=0 \Rightarrow 16(3m^2-2m-1)=0$
$\Rightarrow 3m^2-2m-1=0$, ce qui est aussi une équation du 2e degré de la forme
$Ax^2+Bx+C=0$ avec $A=3$, $B=-2$ et $C=-1$. Ici $\Delta=B^2-4AC=(-2)^2-4\cdot3\cdot(-1)=$
$=4+12=16$, d'où $\sqrt{\Delta}=\sqrt{16}=4$. Les solutions sont :
$m_1=\frac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{2+4}{2\cdot3}=\frac{6}{6}=1$ et $m_2=\frac{-B-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-4}{2\cdot3}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$.
Si $m=1$, l'équation de départ n'a pas de sens car $m^2-1=0$.
Ainsi, l'unique m pour lequel l'équation de départ admet une seule solution
est $\underline{\underline{m=-\frac{1}{3}}}$.

Nom : .... Prénom : ....

Problème 2 [6pts]
Résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} = -14 & \text{(1)} \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{y} = 3 & \text{(2)} \end{cases}$$

Solution : De (1), on tire $\frac{1}{x} = \frac{2}{y} - 14$.

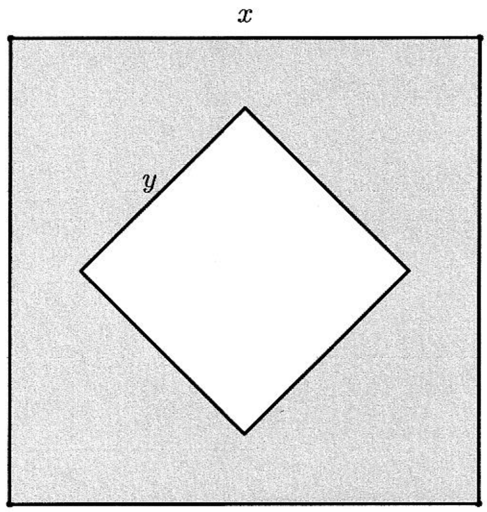
Par substitution dans (2), on obtient

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{2}{y} - 14\right) - \frac{1}{y} &= 3 && \text{distributivité} \\ \frac{6}{y} - 42 - \frac{1}{y} &= 3 && \text{réduction} \\ \frac{5}{y} - 42 &= 3 && +42 \\ \frac{5}{y} &= 45 && \cdot y \\ 5 &= 45y && :45 \\ y &= \frac{5}{45} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Avec $y = \frac{1}{9}$, on a $\frac{1}{y} = 9$ et, ainsi, $\frac{1}{x} = \frac{2}{y} - 14 = 2 \cdot 9 - 14 = 18 - 14 = 4$, d'où $x = \frac{1}{4}$.

La solution est donc $\underline{\underline{x = \frac{1}{4} \text{ et } y = \frac{1}{9}}}$.

Problème 3 [8pts]
Un parterre est délimité par deux carrés.
Il a fallu 144 m de grillage pour entourer les deux carrés, et l'on a répandu du gravier sur les 144 m^2 de surface qui délimite les deux carrés (surface grisée sur la figure).
Calculer les côtés des deux carrés.

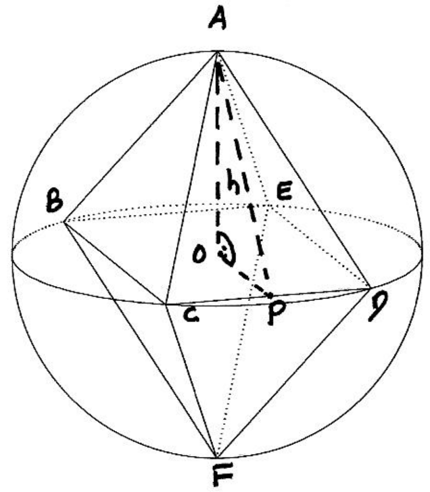


Solution : Périmètre de la surface grisée : $4x+4y=144 \Rightarrow x+y=36 \Rightarrow y=36-x$.
Aire de la surface grisée : $x^2-y^2=144$.
Avec $y=36-x$, on obtient :

$$\begin{aligned}
x^2-(36-x)^2 &= 144 && \text{identité remarquable}\\
x^2-(1296-72x+x^2) &= 144 && \text{parenthèse}\\
x^2-1296+72x-x^2 &= 144 && \text{réduction}\\
-1296+72x &= 144 && +1296\\
72x &= 1440 && :72\\
x &= 20 &&
\end{aligned}$$

Avec $x=20$, on a $y=36-x=36-20=16$.
Par conséquent, la solution est $\underline{\underline{x=20m \text{ et } y=16m}}$.

Problème 4 [8pts]
Calculer l'aire de l'octaèdre régulier inscrit dans une sphère de rayon 10 cm.

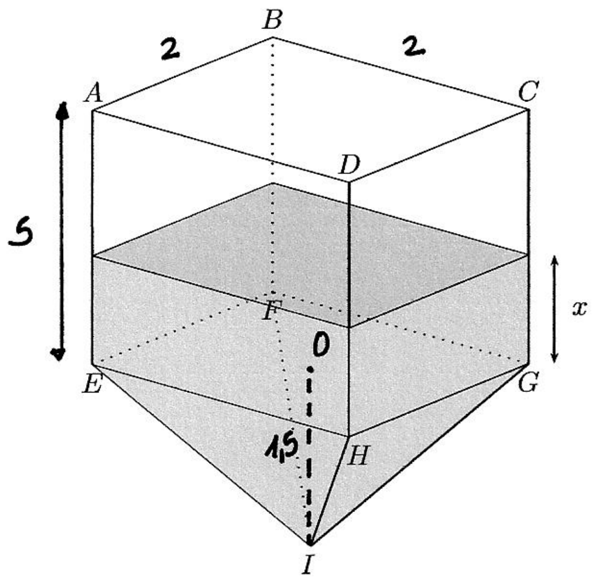


Solution : BCDE est un carré dont la diagonale est $BD = CE$ = diamètre de la sphère =
$= 2 \cdot 10 = 20$ cm. Comme $BC = CD = DE = EB$, par le théorème de Pythagore, on a
$CE^2 = BC^2 + BE^2 = BC^2 + BC^2 = 2BC^2 \Rightarrow 20^2 = 2BC^2 \Rightarrow 400 = 2BC^2 \Rightarrow BC^2 = 200$
$\Rightarrow BC = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ cm.
Il nous faut la hauteur d'un des triangles formant la surface de l'octaèdre.
Dans le triangle rectangle OAP, on a OA = rayon de la sphère = 10 cm et
$OP = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ cm.
Par le théorème de Pythagore, on a $AP^2 = OA^2 + OP^2 \Rightarrow h^2 = 10^2 + (5\sqrt{2})^2 =$
$= 100 + 50 = 150 \Rightarrow h = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$.
L'aire du triangle ACD est alors $\frac{CD \cdot h}{2} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{6}}{2} = \frac{50\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} =$
$= \frac{50 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}$ cm^2.
L'aire de l'octaèdre est donc $8 \cdot 50\sqrt{3} = \underline{\underline{400\sqrt{3} \cong 692{,}82 \text{ cm}^2}}$.

Nom : .... Prénom : ....

Problème 5 [10pts]
Un réservoir est constitué d'une pyramide régulière à base carrée surmontée d'un parallélépipède rectangle (voir figure).
On a : $AB = BC = 2$ m , $AE = 5$ m , $OI = 1,5$ m (OI est la hauteur de la pyramide). On verse de l'eau dans ce réservoir.

1. Calculer le volume du réservoir lorsqu'il est plein.
2. Pour quelle valeur de x le réservoir est il plein au tiers ?

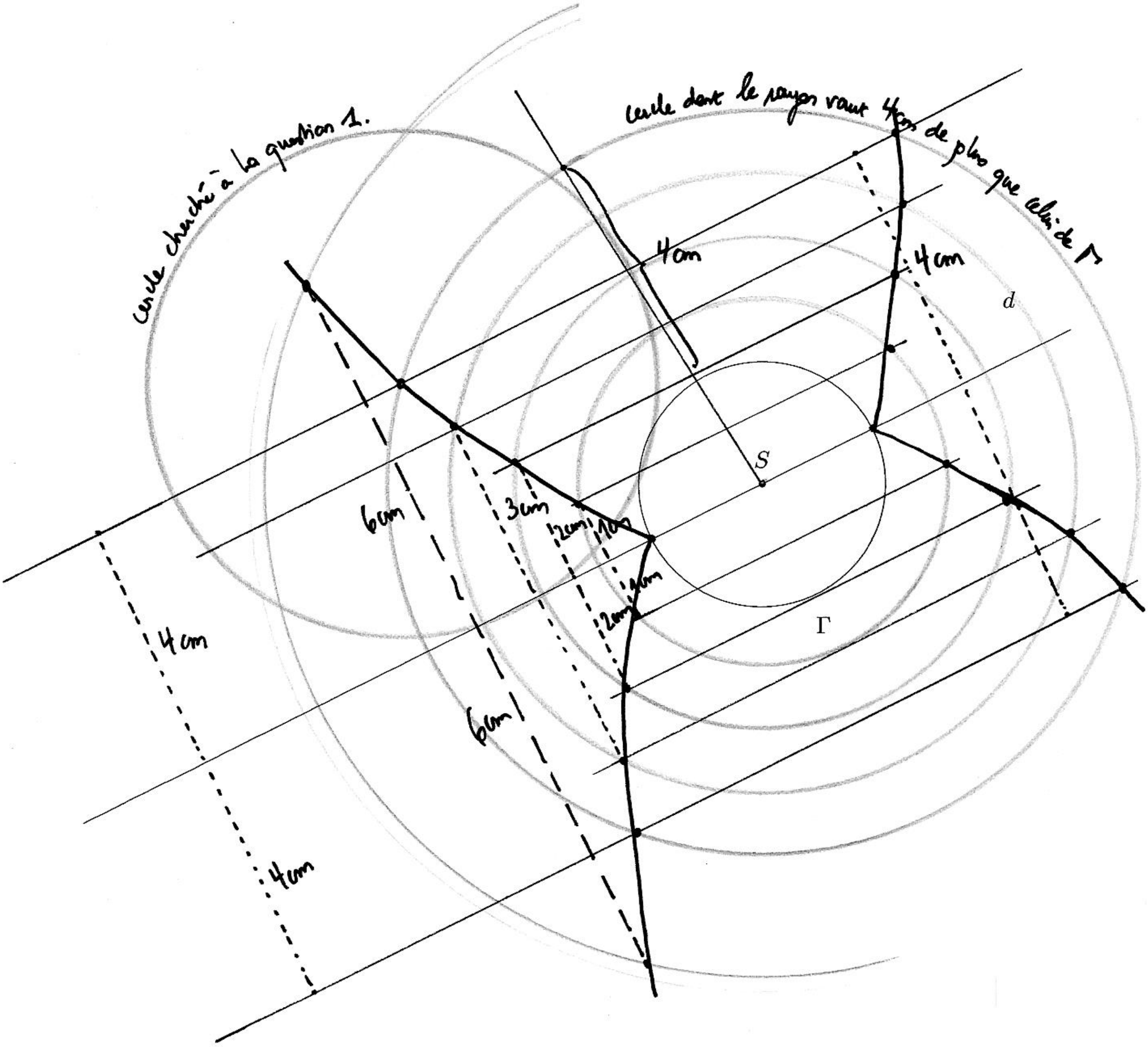


Solution :

1. Le volume de la pyramide est $\frac{2^2 \cdot 1{,}5}{3} = 2\ m^3$.
   Le volume du parallélipipède est $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20\ m^3$.
   Ainsi, le volume du réservoir est $2 + 20 = 22\ m^3$.
2. Si le réservoir est plein au tiers, le volume du liquide est de $\frac{22}{3}\ m^3$.
   $2\ m^3$ vont dans la pyramide, restent $\frac{22}{3} - 2 = \frac{16}{3}\ m^3$ dans le parallélipipède.
   On doit avoir $2^2 \cdot x = \frac{16}{3} \Rightarrow 4x = \frac{16}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}\ m$.
   Ainsi, la valeur de x est $\underline{\underline{\frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}\ m}}$.

Nom : .... Prénom : ....

Problème 6 [10 pts]
On donne une droite d et un cercle Γ dont le centre S est sur d.



1. Construire un cercle tangent extérieurement à Γ et à d dont le rayon vaut 4 cm. Voir ci-dessus.
2. Construire 9 autres points du lieu des centres des cercles tangents extérieurement à Γ et tangents à d. Voir ci-dessus.
3. Décrire ce lieu. Cela donne les 2 courbes dessinées ci-dessus, ensemble des points à égale distance de d et Γ.