Lycée Denis-de-Rougemont
Neuchâtel et Fleurier

Mathématiques de niveau 2

EXAMEN DE MATURITE 2013

Corrigé

Problème 1

a) Commençons par le point C : on a $x=0 \Rightarrow f(0)=1-e^{-\cos(0)}=1-e^{-1}\cong 0{,}63$

$\Rightarrow C(0;1-e^{-1})\cong(0;0{,}63)$

Cherchons maintenant B et D : on a $f(x)=0 \Rightarrow 1-e^{-\cos(x)}=0 \Rightarrow 1=e^{-\cos(x)}$

$\Rightarrow e^{\cos(x)}=1 \Rightarrow \cos(x)=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$;

Comme B et D correspondent aux 2 premiers zéros de part et d'autre de l'axe y, on aura $x=\frac{\pi}{2}$ et $x=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow B(-\frac{\pi}{2};0)$ et $D(\frac{\pi}{2};0)$.

Cherchons ensuite A et E : ce sont des points à tangente horizontale de f ; on a $f(x)=$
$=1-e^{-\cos(x)} \Rightarrow f'(x)=-e^{-\cos(x)}\cdot(-(-\sin(x)))=-\sin(x)\,e^{-\cos(x)}$;

$f'(x)=0 \Rightarrow$ soit $\sin(x)=0$, soit $e^{-\cos(x)}=0$ (ce dernier cas est exclu puisque $e^x>0\ \forall x\in\mathbb{R}$) $\Rightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$; Comme A et E correspondent aux 2 premiers points à tangente horizontale de part et d'autre de l'axe y, on aura $x=\pi$ et $x=-\pi$;

avec $x=\pi$, on a $f(x)=1-e^{-\cos(\pi)}=1-e\cong-1{,}72$;

avec $x=-\pi$, on a $f(x)=1-e^{-\cos(-\pi)}=1-e\cong-1{,}72$

$\Rightarrow A(-\pi;1-e)\cong(-3{,}14;-1{,}72)$ et

$B(\pi;1-e)\cong(3{,}14;-1{,}72)$.

b) La pente de la tangente en f sera maximale là où f' atteint un point à tangente horizontale, autrement dit là où $f''(x)=0$.

On a $f''(x)=e^{-\cos(x)}(\cos^2(x)-\cos(x)-1)$.

$f''(x)=0 \Rightarrow e^{-\cos(x)}(\cos^2(x)-\cos(x)-1)=0 \Rightarrow \cos^2(x)-\cos(x)-1=0$ (puisque $e^{-\cos(x)}>0$) $\Rightarrow \cos(x)=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}1{,}618\\-0{,}618\end{cases}$

Comme $-1<\cos(x)<1$, le cas $\cos(x)=1{,}618$ est exclu.

On obtient ainsi $x=2{,}237+k\cdot 2\pi$ et $x=-2{,}237+k\cdot 2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Comme la pente maximale sera (par exemple) entre A et C, on peut prendre $x\cong-2{,}237$.

Avec $x\cong-2{,}237$, on a $f'(x)=-\sin(x)\,e^{-\cos(x)}$ (voir a)) $\cong 1{,}459$.

Ainsi, la pente de la tangente sera maximale en $x\cong-2{,}237$ et vaudra $\cong 1{,}459$.

c) Le polynôme de Taylor-Maclaurin de degré 2 de f est donné par

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2.$$

On a $f(0) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$ (voir a)), $f'(0) = 0$ (C est un point à tangente horizontale et $f''(0) = e^{-\cos(0)}(\cos^2(0) - \cos(0) - 1) = e^{-1}(1-1-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

On obtient ainsi $P_2(x) = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{2e}x^2$.

L'aire de la surface grise est $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx$.

Elle vaut environ $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_2(x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{2e}x^2\right) = \left[x - \frac{1}{e}x - \frac{1}{6e}x^3\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2e} - \frac{\pi^3}{48e} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2e} + \frac{\pi^3}{48e}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2e} - \frac{\pi^3}{48e} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2e} + \frac{\pi^3}{48e} = \pi - \frac{\pi}{e} + \frac{\pi^3}{24e} \cong 1,51.$$

d) On a $y' - m\sin(x)y = -\sin(x)$.

De plus, $f(x) = 1 - e^{-\cos(x)}$ et $f'(x) = -\sin(x)e^{-\cos(x)}$.

Par substitution dans l'équation différentielle, on doit avoir

$-\sin(x)e^{-\cos(x)} - m\sin(x)(1 - e^{-\cos(x)}) = -\sin(x)$

$\Rightarrow \sin(x)e^{-\cos(x)} + m\sin(x)(1 - e^{-\cos(x)}) - \sin(x) = 0$

$\Rightarrow \sin(x)\left(e^{-\cos(x)} + m - me^{-\cos(x)} - 1\right) = 0$

$\Rightarrow e^{-\cos(x)} + m - me^{-\cos(x)} - 1 = 0$ (car $\sin(x) \neq 0$, si $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow m - me^{-\cos(x)} = 1 - e^{-\cos(x)}$

$\Rightarrow m(1 - e^{-\cos(x)}) = 1 - e^{-\cos(x)}$

$\Rightarrow m = 1$ (car $1 - e^{-\cos(x)} \neq 0$ sur l'intervalle considéré).

Il faut donc que $m = 1$.

e) On doit résoudre $y' - 2\sin(x)y = -\sin(x)$.

C'est une équation linéaire. On pose $y = uv$ et on a $y' = u'v + uv'$.

Par substitution, on trouve $u'v + uv' - 2\sin(x)uv = -\sin(x)$

$\Rightarrow (u' - 2\sin(x)u)v + uv' = -\sin(x)$ $(*)$

On va choisir u telle que $u' - 2\sin(x) = 0$.

$u' - 2\sin(x)u = 0 \Rightarrow u' = 2\sin(x)u \Rightarrow \frac{u'}{u} = 2\sin(x) \Rightarrow \ln|u| = -2\cos(x)$

$\Rightarrow |u| = e^{-2\cos(x)}$.

On va choisir $u = e^{-2\cos(x)}$.

On a alors $(*) \Rightarrow uv' = -\sin(x) \Rightarrow e^{-2\cos(x)}v' = -\sin(x) \Rightarrow v' = -\sin(x)e^{2\cos(x)}$

$\Longrightarrow \quad v = \frac{1}{2} e^{2\cos(x)} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Ainsi la solution est $y = uv = e^{-2\cos(x)} \left(\frac{1}{2} e^{2\cos(x)} + c \right) = \frac{1}{2} + c e^{-2\cos(x)}, \ c \in \mathbb{R}.$

Problème 2

Première partie

On a $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$.

a) $\det(M_a) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 + a^3 - 2a - 2a - 2a = a^3 - 6a + 9$.

La matrice M_a n'est pas inversible $\Longleftrightarrow \det(M_a) = 0$.

$\det(M_a) = 0 \Longrightarrow a^3 - 6a + 9 = 0$

Par tâtonnement, on trouve que $a = -3$ est une solution $\left((-3)^2 - 6\cdot(-3) + 9 = 0\right)$.

On a

$$\begin{array}{r|l} a^3 - 6a + 9 & a+3 \\ \cline{2-2} -(a^3 + 3a^2) & a^2 - 3a + 3 \\ \hline -3a^2 - 6a + 9 & \\ -(-3a^2 - 9a) & \\ \hline 3a + 9 & \\ -(3a+9) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

De plus $a^2 - 3a + 3 = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2}$, ce qui est exclu.

Ainsi, l'unique valeur de a pour laquelle $\det(M_a) = 0$ est $a = -3$.

Par conséquent, si $a = -3$, M_a n'est pas inversible.

b) On a $k \cdot M_a = \begin{pmatrix} k & 2k & ka \\ ka & k & 2k \\ 2k & ka & k \end{pmatrix}$, $k \neq 0$.

Une matrice orthogonale est une matrice dont les vecteurs-colonnes (ou les vecteurs-lignes) sont perpendiculaires 2 à 2 et de norme 1.

On a : $\begin{pmatrix} k \\ ka \\ 2k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2k \\ k \\ ka \end{pmatrix} = 2k^2 + k^2 a + 2k^2 a = k^2(2 + 3a)$;

$\begin{pmatrix} 2k \\ k \\ ka \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ka \\ 2k \\ k \end{pmatrix} = 2k^2 a + 2k^2 + k^2 a = k^2(2+3a)$;

$\begin{pmatrix} k \\ ka \\ 2k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ka \\ 2k \\ k \end{pmatrix} = k^2 a + 2k^2 a + 2k^2 = k^2(2+3a)$.

Les 3 produits scalaires seront nuls si $k^2(2+3a) = 0 \Longrightarrow 2 + 3a = 0$ $(k \neq 0) \Longrightarrow a = -\dfrac{2}{3}$.

Ainsi, si $a = -\dfrac{3}{2}$, les vecteurs-colonnes de kM_a sont perpendiculaires 2 à 2.

Les normes des 3 vecteurs-colonnes sont identiques et valent $\sqrt{k^2 + k^2 a^2 + 4k^2} =$

$= |k|\sqrt{a^2 + 5}$.

Avec $a = -\dfrac{2}{3}$, elles valent $|k|\sqrt{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 + 5} = |k|\sqrt{\dfrac{4}{9} + 5} = |k|\sqrt{\dfrac{49}{9}} = |k| \cdot \dfrac{7}{3}$.

Pour que ces normes valent 1, on doit avoir $|k| \cdot \frac{7}{3} = 1 \Rightarrow |k| = \frac{3}{7} \Rightarrow k = \pm \frac{3}{7}$.

Ainsi la matrice M_a est orthogonale si $a = -\frac{2}{3}$ et $k = \pm \frac{3}{7}$.

Deuxième partie

On a $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (qui est donc M_2).

c) On a $\det(M - \lambda I) = -(\lambda+1)^2(\lambda-5)$ (polynôme caractéristique).

Les solutions de $\det(M-\lambda I) = 0$ nous donnent les valeurs propres $\lambda_1 = -1$ (double) et $\lambda_2 = 5$ (simple).

Cherchons des vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

$\lambda_1 = -1 \Rightarrow M\vec{V} = -\vec{V} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_1 \\ -V_2 \\ -V_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 + 2V_2 + 2V_3 = -V_1 \\ 2V_1 + V_2 + 2V_3 = -V_2 \\ 2V_1 + 2V_2 + V_3 = -V_3 \end{cases} \Rightarrow 2V_1 + 2V_2 + 2V_3 = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 + V_3 = 0$$

Avec $V_1 = 1, V_2 = 0$, on a $V_3 = -1$.

Avec $V_1 = 0, V_2 = 1$, on a $V_3 = -1$.

Des vecteurs propres de M associés à la valeur propre $\lambda_1 = -1$ sont donc $\vec{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 5 \Rightarrow M\vec{V} = 5\vec{V} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5V_1 \\ 5V_2 \\ 5V_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 + 2V_2 + 2V_3 = 5V_1 \\ 2V_1 + V_2 + 2V_3 = 5V_2 \\ 2V_1 + 2V_2 + V_3 = 5V_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4V_1 + 2V_2 + 2V_3 = 0 \\ 2V_1 - 4V_2 + 2V_3 = 0 \\ 2V_1 + 2V_2 - 4V_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2V_1 + V_2 + V_3 = 0 & (1) \\ V_1 - 2V_2 + V_3 = 0 & (2) \\ V_1 + V_2 - 2V_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (2) - (1) \Rightarrow 3V_1 - 3V_2 = 0 \Rightarrow V_1 = V_2 \\ (3) - (2) \Rightarrow 3V_2 - 3V_3 = 0 \Rightarrow V_2 = V_3 \end{array}\right\} \Rightarrow V_1 = V_2 = V_3.$$

Un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\lambda = 5$ est donc $\vec{V_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a alors la base de V_3 $(\vec{V_1}; \vec{V_2}; \vec{V_3})$ où $\vec{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{V_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{V_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vérifions tout de même que $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ sont linéairement indépendants.

On a $\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}+\gamma\vec{v_3}=\vec{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\0\\-\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\beta\\-\beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma\\\gamma\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha+\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\\ -\alpha-\beta+\gamma=0\end{array}\right. \begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\}+\longrightarrow \alpha+\beta+2\gamma=0\\ \longrightarrow -\alpha-\beta+\gamma=0\end{array} \Bigg\} + \rightarrow 3\gamma=0 \Longrightarrow \gamma=0 \Longrightarrow \alpha=\beta=0.$$

Ainsi $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ sont linéairement indépendants et forment donc bien une base de V_3.

Dans la base $(\vec{v_1}\,;\vec{v_2}\,;\vec{v_3})$, la matrice M s'écrit $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.

d) D'après c), on a $\lambda_1=-1 \Longrightarrow v_1+v_2+v_3=0$, ce qui correspond à une symétrie planaire de plan $x+y+z=0$.

De plus $\lambda_2=5 \Longrightarrow v_1=v_2=v_3$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \perp$ plan $x+y+z=0$.

Ainsi M est une affinité orthogonale de facteur -5 par rapport au plan $x+y+z=0$.

On en déduit que M^2 est une affinité orthogonale de facteur $(-5)^2=25$ par rapport au plan $x+y+z=0$.

e) Avec $M=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$, on a $M^2=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{pmatrix}$.

Ainsi $M^2-4M=\begin{pmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&8&8\\8&4&8\\8&8&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}=5I$.

Comme M est inversible (voir question a)), on a alors

$$M^{-1}(M^2-4M)=5M^{-1} \Longrightarrow M-4I=5M^{-1} \Longrightarrow M^{-1}=\frac{1}{5}M-\frac{4}{5}I.$$

Ainsi, il suffit de prendre $\alpha=\frac{1}{5}$ et $\beta=-\frac{4}{5}$.

Problème 3

On a $P(z) = z^3 + (-2\sqrt{3} - i)z^2 + (7 + 2\sqrt{3}i)z - 7i$.

a) On a $P(i) = i^3 + (-2\sqrt{3} - i)i^2 + (7 + 2\sqrt{3}i)i - 7i =$

$= -i + 2\sqrt{3} + i + 7i - 2\sqrt{3} - 7i = 0$.

Ainsi $z = i$ est un zéro de $P(z)$.

On a :

$$\begin{array}{r|l} z^3 + (-2\sqrt{3}-i)z^2 + (7+2\sqrt{3}i)z - 7i & z - i \\ \hline -(z^3 - iz^2) \qquad\qquad\qquad\qquad & z^2 - 2\sqrt{3}z + 7 \\ \hline -2\sqrt{3}z^2 + (7+2\sqrt{3}i)z - 7i & \\ -(-2\sqrt{3}z^2 + 2\sqrt{3}iz) \qquad & \\ \hline 7z - 7i & \\ -(7z - 7i) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

De plus $z^2 - 2\sqrt{3}z + 7 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 28}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 28}}{2} =$

$= \dfrac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3} \pm 4i}{2} = \sqrt{3} \pm 2i$.

Ainsi, les solutions de $P(z)$ sont $z = i$, $z = \sqrt{3} - 2i$ et $z = \sqrt{3} + 2i$.

b) On a $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{\sqrt{3} + 2i - i}{\sqrt{3} - 2i - i} = \dfrac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - 3i} = \dfrac{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} + 3i)}{(\sqrt{3} - 3i)(\sqrt{3} + 3i)} = \dfrac{3 + 4\sqrt{3}i - 3}{3 + 9} = \dfrac{4\sqrt{3}i}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$.

Le module de $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ est donc $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et son argument est $\dfrac{\pi}{2}$ (on est sur l'axe imaginaire).

On a $f(z) = (1 + i)z + 1$.

c) Les points fixes de f sont les z tels que $f(z) = z$.

$f(z) = z \Rightarrow (1+i)z + 1 = z \Rightarrow z + zi + 1 = z \Rightarrow zi + 1 = 0 \Rightarrow zi = -1$

$\Rightarrow z = -\dfrac{1}{i} = -\dfrac{i}{i^2} = i$.

Ainsi, l'unique point fixe de f est $z = i$.

La fonction $z \longmapsto (1+i)z + 1$ correspond à une homothétie de rapport $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ et de centre $C(0;1)$ $(z = 1)$, suivie d'une rotation de $45°$ $(= \tan^{-1}(\frac{1}{1}))$ de centre $C(0;1)$ $(z = 1)$.

On a $g_n(z) = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}})(z)$

d) En utilisant le résultat de c), g_4 sera une homothétie de rapport $(\sqrt{2})^4 = 4$ et de centre $C(0;1)$, suivie d'une rotation de $4 \cdot 45° = 180°$ de centre $C(0;1)$.

e) Déterminons à quel sommet le triangle ABC est rectangle.
En utilisant les coordonnées cartésiennes réelles, on a $A(0;1)$, $B(\sqrt{3};2)$ et $C(\sqrt{3};-2)$.
On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-3\end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-3\end{pmatrix} = (\sqrt{3})^2 + 1(-3) = 3-3 = 0$.

Ainsi $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ et, donc, le triangle est rectangle en A.

L'aire du triangle ABC vaut $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-3)^2} =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{3+1} \cdot \sqrt{3+9} = \frac{1}{2}\sqrt{4} \cdot \sqrt{12} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Par une homothétie de facteur $\sqrt{2}$, l'aire est multipliée par $(\sqrt{2})^2 = 2$.
Par n homothéties de facteur $\sqrt{2}$, l'aire est multipliée par 2^n.
Comme les rotations ne changent pas les aires, le nombre minimale de $n \in \mathbb{N}$ de sorte que la fonction g_n envoie le triangle ABC sur un triangle dont l'aire est supérieure à 100 sera le plus petit n tel que $2^n \cdot 2\sqrt{3} > 100$.

On a $2^n \cdot 2\sqrt{3} > 100 \Rightarrow 2^{n+1} > \frac{100}{\sqrt{3}} \Rightarrow \log(2^{n+1}) > \log\left(\frac{100}{\sqrt{3}}\right)$ (puisque la fonction $\log$ est strictement croissante $\Rightarrow (n+1)\log(2) > \log\left(\frac{100}{\sqrt{3}}\right)$.
Puisque $\log(2) > 0$, on obtient $n+1 > \dfrac{\log\left(\frac{100}{\sqrt{3}}\right)}{\log(2)} \cong 5,85 \Rightarrow n > 4,85$.

Le plus petit entier n est donc $n = 5$.

Problème 4

a) Il y a $1+2+3=6$ boîtes gagnantes et, donc, 4 boîtes vides.
La probabilité qu'un concurrent ne gagne rien est donc la probabilité qu'il tire une boîte vide à la 1re tentative et vaut donc $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

b) $\text{prob}(300.-) = \text{prob}(100.- + 100.- + 100.- + 0.-) + \text{prob}(100.- + 200.- + 0.-) +$
$+\text{prob}(200.- + 100.- + 0.-) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{7} + \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8} + \frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{4}{8} =$
$= \frac{1}{210} + 2\cdot\frac{1}{30} = \frac{1}{14}$.

c) $\text{prob}(\text{gain} + \text{gain} + \text{gain} + 0.-) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{2}{21}$.

d) C'est une probabilité conditionnelle: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

On a: A = rien gagné et B = gain $< 200.-$;
$A\cap B$ = rien gagné; $p(A\cap B) = \frac{2}{5}$ (voir a));
$p(B) = P(0) + p(100+0) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10}\cdot\frac{4}{9} = \frac{8}{5}$.
$\Rightarrow P(A|B) = \frac{2/5}{8/15} = \frac{3}{4}$.

e) $\text{prob}(1100.-) = \text{prob}(400+200+200+100+100+100+0)$. Nb de possibilités de permuter les 6 premiers résultats $= \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!}$
(il y a des répétitions dans les permutations)
$\Rightarrow \text{prob}(1100.-) = 60\cdot\frac{1}{12600} = \frac{1}{210}$.

f) On utilise la loi binomiale: $P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, où X dénombre les concurrents qui ne gagnent rien, k est le nombre de concurrents qui ne gagnent rien, $n=5$ est le nombre de concurrents totaux et $p=\frac{2}{5}$ est la probabilité qu'un concurrent ne gagne rien (voir a)).

Ainsi $P(X>2) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) =$

$= \binom{5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(1-\frac{2}{5}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(1-\frac{2}{5}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^5\left(1-\frac{2}{5}\right)^0 =$

$= 10\cdot\frac{8}{125}\cdot\frac{9}{25} + 5\cdot\frac{16}{625}\cdot\frac{3}{5} + 1\cdot\frac{32}{3125}\cdot 1 =$

$= \frac{720}{3125} + \frac{240}{3125} + \frac{32}{3125} = \frac{992}{3125} \cong 0{,}31744$.

g) On a $\text{prob}(\text{au moins 1 d'entre les } N \text{ ne gagne rien}) = 1 - \text{prob}(\text{tous les } N \text{ gagnent}) =$
$= 1 - \left(1-\frac{2}{5}\right)^N$ (voir a)) $= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^N$.

On cherche la valeur minimale de N telle que $1-\left(\frac{3}{5}\right)^N > 99{,}9\% = 0{,}999$.

$$1-\left(\frac{3}{5}\right)^N > 0{,}999 \Rightarrow -\left(\frac{3}{5}\right)^N > -0{,}001 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^N < 0{,}001$$

$\Rightarrow \log\left(\left(\frac{3}{5}\right)^N\right) < \log(0{,}001)$ (puisque la fonction log est strictement croissante)

$\Rightarrow N \log\left(\frac{3}{5}\right) < \log(0{,}001)$.

Comme $\log\left(\frac{3}{5}\right) < \log(1) = 0$, on obtient $N > \dfrac{\log(0{,}001)}{\log\left(\frac{3}{5}\right)} \simeq 13{,}52$.

Ainsi, la valeur minimal de N est 14.