2013 - Série Bleue

Corrigé

Problème 1

a.
$$
\begin{array}{l|l}
1+\sqrt{8x-4} = 2x-3 & -1 \\
\sqrt{8x-4} = 2x-4 & (\ )^2 \\
8x-4 = (2x-4)^2 & \text{Calculs} \\
8x-4 = 4x^2-16x+16 & -8x \\
-4 = 4x^2-24x+16 & +4 \\
4x^2-24x+20=0 & :4 \\
x^2-6x+5=0 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow x = \frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1} = \frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{6\pm4}{2} = \begin{cases} \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Puisqu'on a élevé au carré, on doit vérifier les solutions :

avec $x=5$: $1+\sqrt{8x-4} = 1+\sqrt{8\cdot5-4} = 1+\sqrt{40-4} = 1+\sqrt{36} = 1+6 = 7$;

$2x-3 = 2\cdot5-3 = 10-3 = 7 \Rightarrow$ OK ;

avec $x=1$: $1+\sqrt{8\cdot x-4} = 1+\sqrt{8\cdot1-4} = 1+\sqrt{8-4} = 1+\sqrt{4} = 1+2 = 3$;

$2x-3 = 2\cdot1-3 = 2-3 = -1 \Rightarrow$ Not OK.

Par conséquent, la solution est $\underline{\underline{x=5}}$.

b)
$$
\begin{array}{l|l}
\frac{5}{4}\left(\frac{x}{3}-1\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{5}-1\right) = 2 & \text{Calculs} \\
\frac{5x}{12} - \frac{5}{4} - \frac{3x}{10} + \frac{3}{2} = 2 & \cdot 60 \\
25x - 75 - 18x + 90 = 120 & \text{Réduction} \\
7x + 15 = 120 & -15 \\
7x = 105 & :7 \\
\underline{\underline{x=15}} &
\end{array}
$$

c)
$$
\begin{array}{l|l}
(x-1)(x-4)+1 < (x-3)^2 & \text{Calculs} \\
x^2-5x+4+1 < x^2-6x+9 & \text{Réduction} \\
x^2-5x+5 < x^2-6x+9 & -x^2 \\
-5x+5 < -6x+9 & +6x \\
x+5 < 9 & -5 \\
x < 4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
\frac{x-5}{6} < \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} & \cdot 6 \\
x-5 < 2x-4 & -x \\
-5 < x-4 & +4 \\
-1 < x &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ les solutions sont les x satisfaisant $\underline{\underline{-1 < x < 4}}$.

Problème 2

On utilise la formule $C_n = C_0(1+t)^n$, où C_0 est le capital de base, C_n est le capital après n périodes et t le taux d'intérêts.

a) Ici, $C_0 = 100'000$, $t = 2\% = 0{,}02$ et $n = 5$.

On a $C_n = C_0(1+t)^n = 100'000\,(1+0{,}02)^5 = 100'000 \cdot 1{,}02^5 = 110'408{,}08$.

L'intérêt produit est alors $C_n - C_0 = 110'408{,}08 - 100'000 = \underline{\underline{10'408{,}08 \text{ €}}}$.

b) Ici, $C_0 = 100'000$, $n = 6$, $C_n = 115'969{,}35$.

On a $C_n = C_0(1+t)^n \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
115'969{,}35 &= 100'000\,(1+t)^6 & &: 100'000 \\
1{,}15969335 &= (1+t)^6 & &\sqrt[6]{} \\
1{,}025 &= 1+t & &-1 \\
0{,}025 &= t & &
\end{aligned}
$$

Le taux annuel d'intérêt est donc $0{,}025 = \underline{\underline{2{,}5\%}}$.

c) Ici, $C_0 = 100'000$, $t = 5\% = 0{,}05$ et $C_n = 200'000$.

On a $C_n = C_0(1+t)^n \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
200'000 &= 100'000\,(1+0{,}05)^n & &: 100'000 \\
2 &= 1{,}05^n & &\log \\
n &= \frac{\log 2}{\log(1{,}05)} \cong 14{,}21 & &
\end{aligned}
$$

Il faudra donc $\underline{\underline{14{,}21 \text{ années}}}$.

d) Somme de 100'000 € placée à 5% : $C_0 = 100'000$, $t = 4\% = 0{,}04$

$$C_n = C_0(1+t)^n \Rightarrow C_n = 100'000\,(1+0{,}04)^n$$
$$\Rightarrow C_n = 100'000 \cdot 1{,}04^n.$$

Somme de 200'000 € placée à 2% : $C_0' = 200'000$, $t' = 2\% = 0{,}02$

$$C_n' = C_0'(1+t')^n \Rightarrow C_n' = 200'000 \cdot (1+0{,}02)^n$$
$$\Rightarrow C_n' = 200'000 \cdot 1{,}02^n.$$

Les deux placements ont la même valeur acquise $\Rightarrow C_n = C_n'$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow 100'000 \cdot 1{,}04^n &= 200'000 \cdot 1{,}02^n & &: 200'000 \\
\frac{1}{2} \cdot 1{,}04^n &= 1{,}02^n & &: 1{,}05^n \\
\frac{1}{2} &= \frac{1{,}02^n}{1{,}04^n} & & \\
\frac{1}{2} &= \left(\frac{1{,}02}{1{,}04}\right)^n & & \\
0{,}5 &= 0{,}98077^n & &\log \\
n &= \frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}98077)} \cong 35{,}696. & &
\end{aligned}
$$

Il faudra donc $\underline{\underline{35{,}696 \text{ années}}}$.

Problème 3

a) On a les possibilités suivantes : 10 frs / 20 frs / 20 frs ou
20 frs / 10 frs / 20 frs ou
20 frs / 20 frs / 10 frs.

La probabilité cherchée est donc : $\frac{10}{18}\cdot\frac{5}{17}\cdot\frac{4}{16}+\frac{5}{18}\cdot\frac{10}{17}\cdot\frac{4}{16}+\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{17}\cdot\frac{10}{16}=$
$=\frac{25}{612}+\frac{25}{612}+\frac{25}{612}=\underline{\underline{\frac{25}{204}\cong 0{,}1225=12{,}25\%}}.$

b) On a les possibilités suivantes : 10 frs / 10 frs / 10 frs ou
20 frs / 20 frs / 20 frs ou
50 frs / 50 frs / 50 frs.

La probabilité cherchée est donc : $\frac{10}{18}\cdot\frac{9}{17}\cdot\frac{8}{16}+\frac{5}{18}\cdot\frac{4}{17}\cdot\frac{3}{16}+\frac{3}{18}\cdot\frac{2}{17}\cdot\frac{1}{16}=$
$=\frac{5}{34}+\frac{5}{408}+\frac{1}{816}=\underline{\underline{\frac{131}{816}\cong 0{,}1605=16{,}05\%}}.$

c) p(au moins une enveloppe contient 10 frs) $= 1-$ (aucune enveloppe ne contient 10 frs) $=$
$=1-\frac{8}{18}\cdot\frac{7}{17}\cdot\frac{6}{16}=1-\frac{7}{102}=\underline{\underline{\frac{95}{102}\cong 0{,}9314=93{,}14\%}}.$

d) On a les possibilités suivantes : 50 frs / 10 ou 20 frs / 10 ou 20 frs ou
10 ou 20 frs / 50 frs / 10 ou 20 frs ou
10 ou 20 frs / 10 ou 20 frs / 50 frs.

La probabilité cherchée est donc : $\frac{3}{18}\cdot\frac{15}{17}\cdot\frac{14}{16}+\frac{15}{18}\cdot\frac{3}{17}\cdot\frac{14}{16}+\frac{15}{18}\cdot\frac{14}{17}\cdot\frac{3}{16}=$
$=\frac{35}{272}+\frac{35}{272}+\frac{35}{272}=\underline{\underline{\frac{105}{272}\cong 0{,}386=38{,}6\%}}.$

Problème 4

On a la parabole $y_p = 0{,}5x^2+3x-1$ et la droite $y_d = 3x+1$.

a) Le sommet de la parabole est donné par $(x_S ; y_S)$ où $x_S = -\frac{3}{2\cdot 0{,}5} = -\frac{3}{1} = -3$
et $y_S = 0{,}5x_S^{\,2}+3x_S-1 = 0{,}5\cdot(-3)^2+3\cdot(-3)-1 = 0{,}5\cdot 9-9-1 = 4{,}5-10 = -5{,}5$.
Le sommet de la parabole est donc $\underline{\underline{(-3;-5{,}5)}}$.

b) Intersections avec l'axe x : on pose $y_p = 0 \Rightarrow 0{,}5x^2+3x-1=0$
$\Rightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 0{,}5\cdot(-1)}}{2\cdot 0{,}5} = \frac{-3\pm\sqrt{9+2}}{1} = -3\pm\sqrt{11}$;
ainsi, les intersections avec l'axe x sont :
$\underline{\underline{(-3+\sqrt{11};0) \cong (0{,}317;0) \text{ et } (-3-\sqrt{11};0) \cong (-6{,}317;0)}}$.

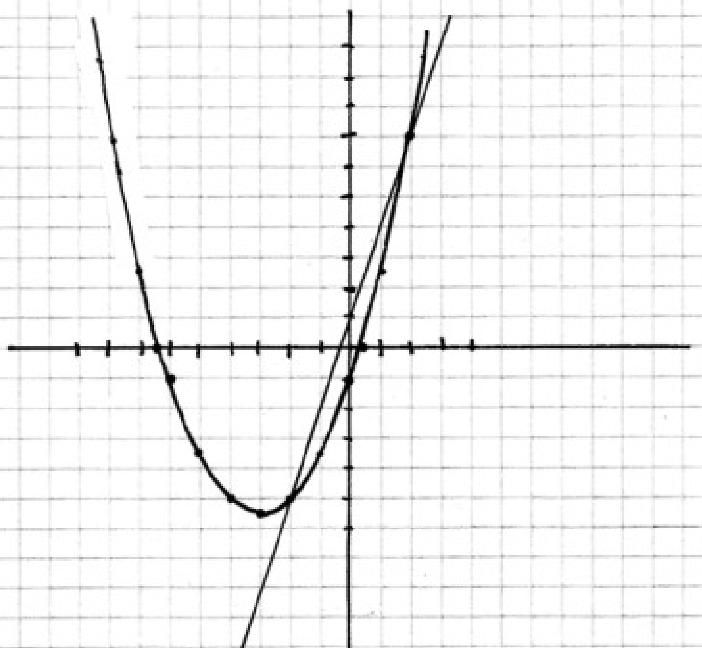
Intersection avec l'axe y : on pose $x=0 \Rightarrow y_p = 0{,}5\cdot 0^2+3\cdot 0-1 = -1$;
ainsi, l'intersection avec l'axe y est $\underline{\underline{(0;-1)}}$.

c) Là où les intersections de la droite et de la parabole sont données par $y_d = y_p$:

$$
\begin{array}{rcl|l}
y_d = y_p \Rightarrow 3x+1 &=& 0{,}5x^2+3x-1 & -3x \\
1 &=& 0{,}5x^2-1 & +1 \\
2 &=& 0{,}5x^2 & \cdot 2 \\
4 &=& x^2 & \sqrt{\ } \\
\pm 2 &=& x &
\end{array}
$$

Avec $x=2$, on obtient $y_d = 3\cdot 2+1 = 6+1 = 7$ $(=y_p)$.
Avec $x=-2$, on obtient $y_d = 3\cdot(-2)+1 = -6+1 = -5$ $(=y_p)$.
Ainsi, les intersections de la droite et de la parabole sont $\underline{\underline{(2;7) \text{ et } (-2;-5)}}$.

d)



Problème 5

a) Coût de fabrication de x grille-pains : $C(x) = 0{,}1x^2 + 10x + 90$.

Chiffre d'affaire pour x grille-pains vendus : $CA(x) = 25x$.

Bénéfice : $B(x) = CA(x) - C(x) = 25x - (0{,}1x^2 + 10x + 90) =$

$= 25x - 0{,}1x^2 - 10x - 90 = -0{,}1x^2 + 15x - 90$.

Les points morts sont les x tels que $B(x) = 0$.

$B(x) = 0 \Rightarrow -0{,}1x^2 + 15x - 90 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4\cdot(-0{,}1)\cdot(-90)}}{2\cdot(-0{,}1)} =$

$= \dfrac{-15 \pm \sqrt{225-36}}{-0{,}2} = \dfrac{-15 \pm \sqrt{189}}{-0{,}2} = \dfrac{-15 \pm 17}{-0{,}2} =$

$\rightarrow \dfrac{-15+17}{-0{,}2} = \dfrac{2}{-0{,}2} = -10$

$\rightarrow \dfrac{-15-17}{-0{,}2} = \dfrac{-32}{-0{,}2} = 160$.

Comme $x = -10$ n'est pas réaliste, l'unique point mort est $\underline{\underline{x = 160}}$.

Le bénéfice maximal sera le sommet de la parabole $B(x) = -0{,}1x^2 + 15x - 90$.

Il sera en $x_S = -\dfrac{15}{2\cdot(-0{,}1)} = -\dfrac{15}{-0{,}2} = \dfrac{15}{0{,}2} = 75$.

Avec $x_S = 75$, on a $B(x_S) = -0{,}1\cdot 75^2 + 15\cdot 75 - 90 = -562{,}5 + 1125 - 90 = 472{,}5$

Ainsi, le bénéfice maximal sera de $\underline{\underline{472{,}50 \text{ frs}}}$.

b) Le prix de vente d'un grille pain à partir de $x = 30$ est $20 - (x-30)\cdot 0{,}1$ frs.

Le revenu du grossiste sera donc $R(x) = x\,(20 - (x-30)\cdot 0{,}1) =$

$= x\,(20 - 0{,}1x + 3) = x\,(23 - 0{,}1x) = 23x - 0{,}1x^2 = -0{,}1x^2 + 23x$.

La quantité qui maximisera le revenu correspond au sommet.

On a $x_S = -\dfrac{23}{2\cdot(-0{,}1)} = -\dfrac{23}{-0{,}2} = \dfrac{23}{0{,}2} = 115$.

La quantité qui maximisera le revenu du grossiste est donc $\underline{\underline{115}}$.

Problème 6

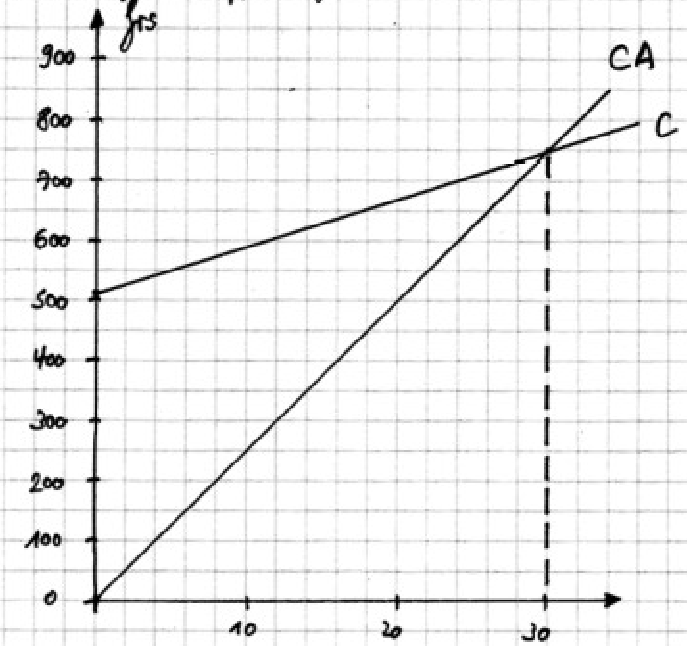
a) L'équation du coût est donné par les frais fixes + le prix d'une chemise · le nombre de chemise.

Le coût de x chemises est donc $\underline{\underline{C(x) = 510 + 8x}}$.

Le chiffre d'affaire est donné par le prix de vente d'une chemise · le nombre de chemises.

Le chiffre d'affaire pour x chemises est donc $\underline{\underline{CA(x) = 25x}}$.

b)



c) Le seuil de rentabilité (point mort) est le x tel que $C(x) = CA(x)$:

$$\begin{array}{l|l} 510 + 8x = 25x & -8x \\ 510 = 17x & :17 \\ 30 = x & \end{array}$$

Ainsi, le seuil de rentabilité est $\underline{\underline{x = 30}}$ et on a alors $C(x) = CA(x) = 25 \cdot 30 = 750$.

d) Coûts de fabrication de 200 chemises $= C(200) = 510 + 8 \cdot 200 = 2110$.

Chiffre d'affaire pour 50 chemises vendues à p francs l'unité $= 50 \cdot p$.

Pour couvrir les coûts de fabrication, on doit avoir

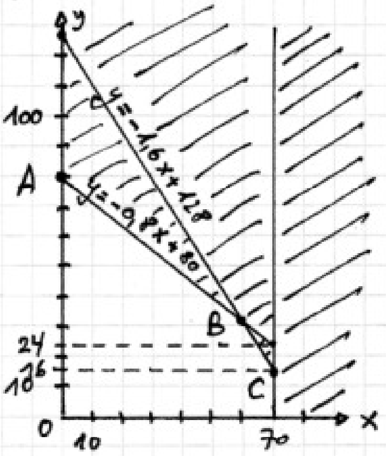
$$\begin{array}{r|l} 50p = 2110 & :50 \\ p = 42.20 & \end{array}$$

Il devra donc fixer un prix de vente de la chemise à $\underline{\underline{42.20 \text{ frs}}}$.

Problème 7

Appelons x le nombre de voitures vendues et y le nombre de camions vendus.
On doit avoir clairement $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.
Le nombre de voitures vendues ne dépassent pas 70 $\Rightarrow x \leq 70$.
Pour les x voitures et les y camions, le temps mis par la classe A pour les découper est $4x+5y$. Comme la classe A dispose de 20 élèves travaillant 20 heures par semaine, on doit avoir $4x+5y \leq 20 \cdot 20 \Rightarrow 4x+5y \leq 400 \Rightarrow 5y \leq -4x+400$
$\Rightarrow y \leq -0{,}8x+80$.
Pour les x voitures et les y camions, le temps mis par la classe B pour les peindre est $8x+5y$. Comme la classe B dispose de 20 élèves travaillant 32 heures par semaine, on doit avoir $8x+5y \leq 20 \cdot 32 \Rightarrow 8x+5y \leq 640 \Rightarrow 5y \leq -8x+640$
$\Rightarrow y \leq -1{,}6x+128$.
On a donc les contraintes suivantes : $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x \leq 70$, $y \leq -0{,}8x+80$ et $y \leq -1{,}6x+128$.

On doit trouver x et y pour que le bénéfice soit maximal, autrement dit que $25x+35y$ soit maximal.
Géométriquement, on a



On a 3 points à considérer : $A(0;80)$, $C(70;16)$ et B.
Les coordonnées de B sont données par la solution de
$$\begin{cases} y=-0{,}8x+80 \\ y=-1{,}6x+128 \end{cases};$$
par soustraction, on obtient $0=0{,}8x-48 \Rightarrow 0{,}8x=48$
$\Rightarrow x=60 \Rightarrow y=32$
$\Rightarrow B(60;32)$.

$25x+35y$ avec $A\,(x=0;y=80)$: $25\cdot 0+35\cdot 80 = 2800.-$
$25x+35y$ avec $B\,(x=60;y=32)$: $25\cdot 60+35\cdot 32 = 2620.-$
$25x+35y$ avec $C\,(x=70;y=16)$: $25\cdot 70+35\cdot 16 = 2310.-$
Ainsi, le bénéfice est maximal en $A(x=0;y=80)$; autrement dit, le bénéfice sera maximal si on produit <u>80 camions et 0 voiture.</u>