2013 - Série Rouge
Corrigé

Problème 1

a.

$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=7+\frac{x}{4}$	$\cdot 12$
$6x+4x=84+3x$	Réduction
$10x=84+3x$	$-3x$
$7x=84$	$:7$
$\underline{\underline{x=12}}$	

b. $\begin{cases} y-5=2x \Rightarrow y=2x+5 \\ 12-5x=15-x-y \end{cases}$

$12-5x=15-x-(2x+5)$	calculs
$12-5x=15-x-2x-5$	réduction
$12-5x=10-3x$	$+5x$
$12=10+2x$	-10
$2=2x$	$:2$
$\underline{\underline{x=1}}$	

Avec $x=1$, on a $y=2.1+5 \Rightarrow \underline{\underline{y=7}}$.

c. $7x^3+8=x^6 \Rightarrow x^6-7x^3-8=0 \Rightarrow (x^3)^2-7x^3-8=0$.

On pose $u=x^3$. L'équation s'écrit alors $u^2-7u-8=0$.

Ses solutions sont $u=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4.1.(-8)}}{2.1}=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{7\pm 9}{2}=$ $\frac{7+9}{2}=8$; $\frac{7-9}{2}=-1$.

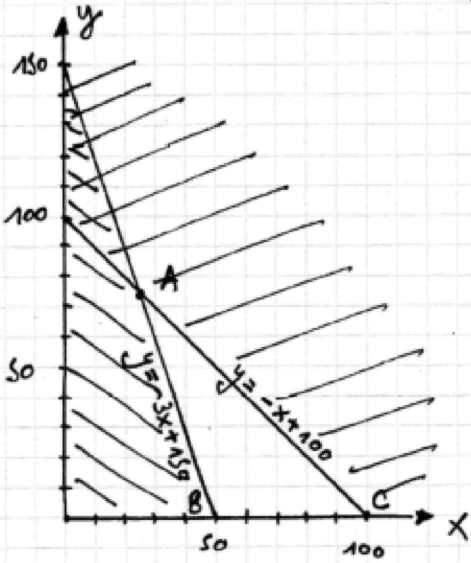
Avec $u=8$ et $u=x^3$, on a $x^3=8 \Rightarrow x=\sqrt[3]{8}=2$.

Avec $u=-1$ et $u=x^3$, on a $x^3=-1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{-1}=-1$.

Les solutions sont donc $\underline{\underline{x=2 \text{ et } x=-1}}$.

Problème 2

Notons x le nombre de lièvres et y le nombre de faisans.
On doit clairement avoir $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
Comme l'espace est pour 100 animaux au maximum, on doit avoir $x+y \leq 100$
$\Rightarrow y \leq -x+100$.
Le revenu des x lièvres et y faisans est $30x + 10y$.
Comme il faut un revenu au minimum de 1500.−, on doit avoir
$30x+10y \leq 1500 \Rightarrow 10y \leq -30x+1500 \Rightarrow y \leq -3x+150$.
Géométriquement, on a:



On doit donc être dans la partie blanche ci-dessus. Cette zone donne toutes les solutions possibles pour $(x;y)$.
Si on recherche le revenu maximal qu'il peut obtenir, on sait qu'aux points A et B, le revenu sera de 1500.−, alors qu'au point $C(100;0)$, le revenu est de $30 \cdot 100 + 10 \cdot 0 = 3000$.−. C'est donc avec 100 lièvres et 0 faisans qu'il aurait un revenu maximum.

Problème 3

On utilise la formule $C_n = C_0(1+t)^n$, où C_0 est le capital de départ, C_n le capital après n périodes et t le taux d'intérêt pour une période.

a) Ici, $C_0 = 100'000$, $n = 5$ et $t = 5\% = 0{,}05$.

On a $C_n = 100'000(1+0{,}05)^5 = 100'000 \cdot 1{,}05^5 = 127'628{,}16$.

Ainsi, le capital produit est de $\underline{\underline{127'628{,}16}}$.

b) Ici, $C_0 = 200'000$, $n = 10$ et $t = 3\% = 0{,}03$.

On a $C_n = 200'000(1+0{,}03)^{10} = 200'000 \cdot 1{,}03^{10} = 268'783{,}28$.

Ainsi, l'intérêt produit est $C_n - C_0 = 268'783{,}28 - 200'000 = \underline{\underline{68'783{,}28}}$.

c) Ici, on a $C_n = 3C_0$ et $n = 10$.

$$
\begin{array}{rcll|l}
\text{On a } C_n = C_0(1+t)^{10} & \Rightarrow & 3C_0 &= C_0(1+t)^{10} & :C_0 \\
& & 3 &= (1+t)^{10} & \sqrt[10]{} \\
& & 1{,}1161 &= 1+t & -1 \\
& & 0{,}1161 &= t &
\end{array}
$$

Ainsi, le taux devra être de $0{,}1161 = \underline{\underline{11{,}61\%}}$.

d) Ici, on a $C_n = 2C_0$ et $t = 5\% = 0{,}05$.

$$
\begin{array}{rcll|l}
\text{On a } C_n = C_0(1+t)^n & \Rightarrow & 2C_0 &= C_0(1+0{,}05)^n & :C_0 \\
& & 2 &= 1{,}05^n & \log \\
& & n &= \dfrac{\log(2)}{\log(1{,}05)} \cong 14{,}21 &
\end{array}
$$

Il faudra donc $\underline{\underline{14{,}21 \text{ années}}}$.

Problème 4

On a, pour les cabriolets, $y_C = -\frac{2}{3}x^2 + 8x - 12$ et, pour les 4x4, $y_{4x4} = \frac{x^2}{4} - \frac{7x}{2} + \frac{57}{4}$.

a) On cherche le maximum de y_C : on a $x_S = -\frac{8}{2(-2/3)} = -\frac{8}{-4/3} = \frac{8}{4/3} = 8 : \frac{4}{3} = 8 \cdot \frac{3}{4} = \frac{24}{4} = 6$.

Avec $x = 6$, on a $y_C = -\frac{2}{3} \cdot 6^2 + 8 \cdot 6 - 12 = -\frac{2}{3} \cdot 36 + 48 - 12 = -24 + 36 = 12$.

Ainsi, au mois 6 (juin), on a le maximum de ventes de cabriolet et ce maximum est 12.

b) Il faut résoudre $y_C = y_{4x4} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{3}x^2 + 8x - 12 &= \frac{x^2}{4} - \frac{7x}{2} + \frac{57}{4} && \cdot 12 \\
-8x^2 + 96x - 144 &= 3x^2 - 42x + 171 && +8x^2 \\
96x - 144 &= 11x^2 - 42x + 171 && -96x \\
-144 &= 11x^2 - 138x + 171 && +144 \\
0 &= 11x^2 - 138x + 315
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = \frac{138 \pm \sqrt{138^2 - 4 \cdot 11 \cdot 315}}{2 \cdot 11} = \frac{138 \pm \sqrt{19'044 - 13860}}{22} = \frac{138 \pm \sqrt{5184}}{22} = \frac{138 \pm 72}{22} =$$

$$= \begin{cases} \frac{138+72}{22} = 9,\overline{54} \\ \frac{138-72}{22} = 3 \end{cases}$$

Ainsi, les ventes seront identiques aux mois 3 (mars) et 9 (septembre).

c) Cherchons la différence entre le nombre de 4x4 et le nombre de cabriolets :

$$y_{4x4} - y_C = \frac{x^2}{4} - \frac{7x}{2} + \frac{57}{4} - \left(-\frac{2}{3}x^2 + 8x - 12\right) =$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{7x}{2} + \frac{57}{4} + \frac{2}{3}x^2 - 8x + 12 = \frac{11}{12}x^2 - \frac{23}{2}x + \frac{105}{4}.$$

Cette différence sera maximale si $x = \frac{23/2}{2 \cdot 11/12} = \frac{23/2}{11/6} = \frac{23}{2} : \frac{11}{6} = \frac{23}{2} \cdot \frac{6}{11} = \frac{69}{11} = 6,\overline{27}$.

C'est donc au mois 6 que la différence sera maximale.

Cette différence vaut $\left|\frac{11}{12}\left(\frac{69}{11}\right)^2 - \frac{23}{2} \cdot \frac{69}{11} + \frac{105}{4}\right| = \left|-\frac{108}{11}\right| = \frac{108}{11} = 9,\overline{81}$.

Problème 5

a. $C_{11}^{3} =$ 165 possibilités.

b. $C_3^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 = 3 \cdot 4 \cdot 4 =$ 48 possibilités.

c. 2 salades : $C_4^2 = 6$

1 autre chose : $C_7^1 = 7$ au total $6 \cdot 7 = 42$

ou

3 salades : $C_4^3 = 4$

au total $42 + 4 =$ 46 possibilités.

d. Dans ce cas, il y a 11 possibilités par choix : au total, $11^3 =$ 1331 possibilités.

Exercice 6

a) $\dfrac{C_5^1 \cdot C_6^2 \cdot C_7^1}{C_{18}^4} = \dfrac{5.15.7}{3060} = \dfrac{525}{3060} \cong 0,1716 = 17,16\%.$

b) $\dfrac{C_5^4}{3060} = \dfrac{5}{3060} = 0,0016 = 0,16\%.$

c) $p(\text{au moins } 1 \text{ jaune}) = 1 - p(\text{zéro jaune}) = 1 - \dfrac{C_{11}^4}{C_{18}^4} = 1 - \dfrac{330}{3060} = \dfrac{2730}{3060} \cong$
$\cong 0,8922 = 89,22\%.$

d) $p(3 \text{ rouges}) + p(3 \text{ bleus}) + p(3 \text{ jaunes}) = \dfrac{C_5^3 \cdot C_{13}^1}{C_{18}^4} + \dfrac{C_6^3 \cdot C_{12}^1}{C_{18}^4} + \dfrac{C_7^3 \cdot C_{11}^1}{C_{18}^4} =$
$= \dfrac{10 \cdot 13}{3060} + \dfrac{20 \cdot 12}{3060} + \dfrac{35 \cdot 11}{3060} = \dfrac{130 + 240 + 385}{3060} = \dfrac{755}{3060} = 0,2467 = 24,67\%.$

Exercice 7

Soit x le prix d'une tondeuse $(x \geq 100)$.

Le nombre de tondeuses vendues est alors $300 - 2(x-100)$.

Le revenu est ainsi $x(300-2(x-100)) = x(300-2x+200) = x(500-2x) =$

$= -2x^2 + 500x$.

Le revenu maximum (= sommet de la parabole $-2x^2+500x$) est donné par

$x_S = -\frac{500}{2\cdot(-2)} = \frac{500}{4} = 125.$

Avec $x_S = 125$, on a $-2x_S^2 + 500x_S = -2\cdot 125^2 + 500\cdot 125 = -31250 + 62500 =$

$= 31250.$

Ainsi, le revenu est maximum si le prix à l'unité est de 125 \$ et il vaut 31'250 \$.