Lycée Denis-de-Rougemont
Neuchâtel et Fleurier

EXAMEN DE MATURITÉ
Mathématiques de niveau 1

Session 2014

CORRIGÉ

Problème 1

Première partie

a) Coordonnées de A : puisque A est l'intersection du graphe de f avec l'axe des y, sa première coordonnée est $x=0$; par substitution dans f, on a alors $f(0)=2e^0=$ $=2\cdot 1=2$; ainsi les coordonnées de A sont $(0;2)$.

Coordonnées de B : puisque B est l'intersection des graphes de f et g, on doit avoir $f(x)=g(x)$ $\Rightarrow 2e^x=4xe^x \Rightarrow 4xe^x-2e^x=0 \Rightarrow 2e^x(2x-1)=0$;
Comme $e^x>0$ pour toute valeur de x, on obtient $2x-1=0 \Rightarrow 2x=1$ $\Rightarrow x=\frac{1}{2}$; avec $x=\frac{1}{2}$ dans $f(x)$ (ou $g(x)$), on a $f(\frac{1}{2})=2e^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{e}$;
ainsi les coordonnées de B sont $(\frac{1}{2};2\sqrt{e})\cong(\frac{1}{2};3{,}3)$.

b) Pour trouver les coordonnées du minimum du graphe de g, on doit résoudre $g'(x)=0$.
On a $g(x)=4xe^x=u\cdot v$ avec $u=4x$ et $v=e^x$. Comme $u'=4$ et $v'=e^x$, on obtient $g'(x)=u'v+uv'=4e^x+4xe^x=4(x+1)e^x$.
Ainsi $g'(x)=0 \Rightarrow 4(x+1)e^x=0$; comme $e^x>0$ pour toute valeur de x, on obtient $x+1=0 \Rightarrow x=-1$.
Avec $x=-1$, on a $g(x)=g(-1)=4\cdot(-1)e^{-1}=-\frac{4}{e}$.
D'après le graphique on sait que c'est un minimum.
Les coordonnées de ce minimum sont donc $(-1;-\frac{4}{e})\cong(-1;-1{,}47)$.

c) L'équation de la tangente au graphe de f en $A(0;2)$ est de la forme $y=mx+h$, où $m=f'(0)$.
On a $f'(x)=2e^x$ et, donc $f'(0)=2\cdot e^0=2\cdot 1=2$, d'où $m=2$.
L'équation de la tangente s'écrit donc $y=2x+h$.
Avec le point $A(0;2)$, par substitution, on a $2=2\cdot 0+h$, d'où $h=2$.
Ainsi, l'équation de la tangente au graphe de f en A est $y=2x+2$.

d) Comme $A(0;2)$ et $B(\frac{1}{2};2\sqrt{e})$, l'aire de la surface grise OBA est donnée par $\int_0^{1/2}(f(x)-g(x))\,dx=\int_0^{1/2}(2e^x-4xe^x)\,dx=2\int_0^{1/2}(1-2x)e^x\,dx$.
On va chercher une primitive de $(1-2x)e^x$ en intégrant par parties.
La formule d'intégration par parties est $\int uv'\,dx=uv-\int u'v\,dx$.

En posant $u = 1-2x$ et $v' = e^x$, on a $u' = -2$ et $v = e^x$.
Ainsi $\int (1-2x)e^x\,dx = \int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx = (1-2x)e^x - \int (-2)e^x\,dx =$
$= (1-2x)e^x + 2\int e^x\,dx = (1-2x)e^x + 2e^x = (3-2x)e^x$.
Ainsi, l'aire de la surface grise OBA est $2\int_0^{1/2} (1-2x)e^x\,dx = 2\left[(3-2x)e^x\right]_0^{1/2} =$
$= 2\left[(3-2\cdot\frac{1}{2})e^{\frac{1}{2}} - (3-2\cdot 0)e^0\right] = 2\left(2e^{\frac{1}{2}} - 3\right) = 4e^{\frac{1}{2}} - 6 \cong 0{,}595$.

e) L'aire du triangle OP_0P s'écrit $\frac{OP_0 \cdot P_0P}{2}$. Comme $OP_0 = x$ et $P_0P = h(x) = 2e^{-x}$, l'aire du triangle OP_0P s'écrit $\frac{x \cdot 2e^{-x}}{2} = xe^{-x}$.
On doit chercher x pour lequel $A(x) = xe^{-x}$ est maximum.
On a $A'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$ et $A'(x) = 0 \Rightarrow (1-x)e^{-x} = 0$
$\Rightarrow 1-x = 0$ car $e^{-x} > 0$ pour tout $x \Rightarrow x = 1$.
Comme $A(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} A(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ (puisque $e^{-x} \to 0$ et que l'exponentielle gagne), $x = 1$ correspond bien à l'aire maximale.
On a de plus $A(1) = 1\cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$.
Ainsi, l'aire sera maximale en $x = 1$ et elle vaudra alors $\frac{1}{e} \cong 0{,}37$.

Deuxième partie

On a $f(x) = \frac{2x^2+cx}{x^2+1}$.

a) Comme $x^2+1 > 0$ pour tout x, f n'a pas d'exclu et, donc, pas d'asymptote verticale.
Effectuons la division euclidienne du numérateur par le dénominateur :

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+cx & x^2+1 \\ \cline{2-2} -(2x^2+2) & 2 \\ \hline cx-2 & \end{array}$$

Ainsi, $y = 2$ est l'unique asymptote de f (asymptote horizontale).

b) Il faut résoudre $f'(x) = 0$.
On a $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = 2x^2+cx$ et $v = x^2+1$. Comme $u' = 4x+c$ et $v' = 2x$,
on a $f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{(4x+c)\cdot(x^2+1) - (2x^2+cx)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$
$= \frac{4x^3+4x+cx^2+c-4x^3-2cx^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-cx^2+4x+c}{(x^2+1)^2}$.
Ainsi $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-cx^2+4x+c}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -cx^2+4x+c = 0$
$\Rightarrow cx^2-4x-c = 0$.

Si $c \neq 0$, le discriminant de cette équation du 2^e degré est $(-4)^2 - 4 \cdot c \cdot (-c) =$
$= 16 + 4c^2$ et il est toujours positif. Ainsi l'équation aura toujours 2 solutions.
Par conséquent, le graphe de f a exactement 2 points à tangente horizontale pour toute valeur non nulle de c.

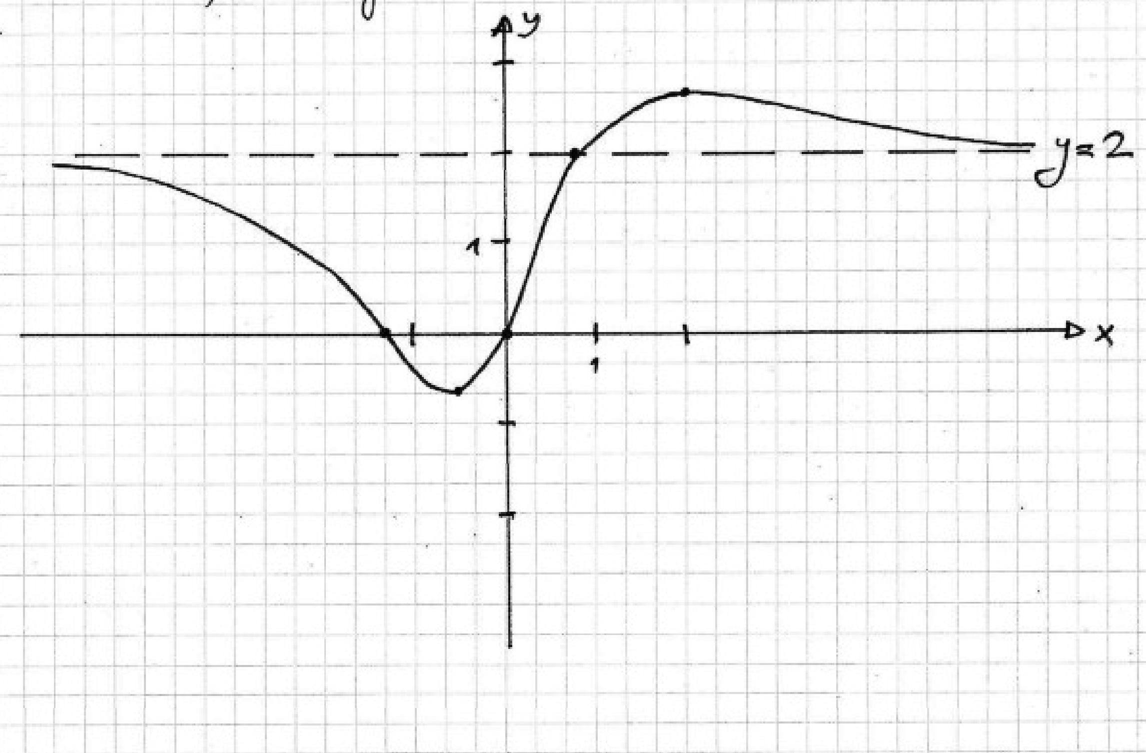
h) On a $c = \frac{8}{3}$, $f(x) = \frac{6x^2+8x}{3x^2+3}$ et $f'(x) = \frac{-8x^2+12x+8}{3(x^2+1)^2}$.

Zéros de f: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{6x^2+8x}{3x^2+3} = 0 \Rightarrow 6x^2+8x = 0 \Rightarrow 2x(3x+4) = 0$
$\Rightarrow$ soit $x = 0$, soit $3x+4 = 0 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$;
les zéros de f sont donc $x = 0$ et $x = -\frac{4}{3}$.

intersection avec l'asymptote: d'après a), l'asymptote est $y = 2$; on doit résoudre
$f(x) = 2 \Rightarrow \frac{6x^2+8x}{3x^2+3} = 2 \Rightarrow 6x^2+8x = 2(3x^2+3)$
$\Rightarrow 6x^2+8x = 6x^2+6 \Rightarrow 8x = 6 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$;
comme $y = 2$, l'intersection est $\left(\frac{3}{4}; 2\right)$.

points à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-8x^2+12x+8}{3(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -8x^2+12x+8 = 0$
$\Rightarrow 2x^2 - 3x + 2 = 0$
$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$;
avec $x = 2$, on a $f(x) = f(2) = \frac{6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2}{3 \cdot 2^2 + 3} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$;
avec $x = -\frac{1}{2}$, on a $f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3} = \frac{\frac{3}{2} - 4}{\frac{3}{4} + 3} = -\frac{2}{3}$;
les points à tangente horizontale sont donc $\left(2; \frac{8}{3}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right)$.

graphe:



Problème 2

a) On va montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, ce qui assurera que ABCD est un parallélogramme. Puis, on montrera que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AD}\|$, ce qui assurera que ABCD est un losange.

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} =$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

On a $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + (-8)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1+64+25} = \sqrt{90}$.

Comme $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $\|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{(-5)^2 + (-8)^2 + 1^2} =$

$= \sqrt{25+64+1} = \sqrt{90}$. Donc $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AD}\|$.

ABCD est donc bien un losange.

L'angle α en A, qui est le même qu'en C, est donné par $\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AD}\|}$.

On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-5) + (-8) \cdot (-8) + (-5) \cdot 1 = -5 + 64 - 5 = 54$

et $\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{90} \cdot \sqrt{90} = 90$.

Ainsi $\cos(\alpha) = \dfrac{54}{90} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \alpha \cong 53{,}13°$.

L'angle β en B, qui est le même qu'en D, est alors donné par $\dfrac{360° - 2\alpha}{2} =$
$= 180° - \alpha \cong 180° - 53{,}13° \cong 126{,}87°$.

L'aire du losange est $\dfrac{\text{petite diagonale} \cdot \text{grande diagonale}}{2} = \dfrac{\|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{BD}\|}{2}$.

On a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-16)^2 + (-4)^2} =$

$= \sqrt{16 + 256 + 16} = \sqrt{288}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ et

$\|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{(-6)^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$.

Ainsi, l'aire du losange vaut $\dfrac{\sqrt{288} \cdot \sqrt{72}}{2} = \dfrac{\sqrt{20736}}{2} = \dfrac{144}{2} = 72$.

b) M est le milieu de AC (ou de BD). Comme $A(6;0;12)$ et $C(2;-16;8)$, on a $M\left(\dfrac{6+2}{2}; \dfrac{0+(-16)}{2}; \dfrac{12+8}{2}\right) = (4;-8;10)$.

b1) Le rayon de la sphère sera la distance du point M passant par la droite contenant A et B (par exemple).

En utilisant la formule qui permet de calculer la distance d'un point à une droite dans l'espace, on a rayon = dist $(M;AB) = \dfrac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$.

On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\-8\\-5\end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{90}$ (voir a)).

De plus $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}4\\-8\\10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\0\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-8\\-2\end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix}1\\-8\\-5\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-2\\-8\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-8)\cdot(-2)-(-5)\cdot(-8)\\(-5)\cdot(-2)-1\cdot(-2)\\1\cdot(-8)-(-8)\cdot(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16-40\\10+2\\-8-16\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}-24\\12\\-24\end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{(-24)^2+12^2+(-24)^2} = \sqrt{576+144+576} = \sqrt{1296}$

$= 36$.

Ainsi rayon $= \dfrac{36}{\sqrt{90}} = \sqrt{\dfrac{1296}{90}} = \sqrt{14{,}4}$.

L'équation de la sphère est ainsi $(x-4)^2+(y+8)^2+(z-10)^2 = 14{,}4$.

La droite passant par A et B a pour équations paramétriques $\begin{cases} x = 6+\lambda \\ y = -8\lambda \\ z = 12-5\lambda. \end{cases}$

Par substitution dans l'équation de la sphère, on obtient

$$(6+\lambda-4)^2 + (-8\lambda+8)^2 + (12-5\lambda-10)^2 = 14{,}4$$
$$\Rightarrow (\lambda+2)^2 + (-8\lambda+8)^2 + (2-5\lambda)^2 = 14{,}4$$
$$\Rightarrow \lambda^2+4\lambda+4+64\lambda^2-128\lambda+64+4-20\lambda+25\lambda^2 = 14{,}4$$
$$\Rightarrow 90\lambda^2-144\lambda+72 = 14{,}4 \Rightarrow 90\lambda^2-144\lambda+57{,}6 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{144\pm\sqrt{20736-20736}}{180} = \frac{144}{180} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Avec $\lambda = 0{,}8$, on obtient $x = 6+0{,}8 = 6{,}8$, $y = -8\cdot 0{,}8 = -6{,}4$ et $z = 12-5\cdot 0{,}8 = 12-4 = 8$.

Le point de tangence est donc $T(6{,}8; -6{,}4; 8)$.

b2) Le plan α cherché est perpendiculaire à $\overrightarrow{MT}$.

On a $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix}6{,}8\\-6{,}4\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-8\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}8\\1{,}6\\-2\end{pmatrix}$, qui est parallèle à $\begin{pmatrix}14\\8\\-10\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}7\\4\\-5\end{pmatrix}$.

Ainsi, l'équation de α s'écrit $7x+4y-5z+d=0$.

Le plan contient $A(6;0;12)$. On a donc $7\cdot 6+4\cdot 0-5\cdot 12+d = 0$

$\Rightarrow 42-60+d=0 \Rightarrow -18+d=0 \Rightarrow d=18$.

L'équation du plan α est donc $7x+4y-5z+18=0$.

c) Le centre de S' est $M'(0;-6;6)$ et son rayon est $r' = \sqrt{225} = 15$.

Pour trouver le centre du cercle d'intersection de S' et de Π : $2x-y+2z-36=0$, on cherche l'intersection de Π et de la droite d perpendiculaire à Π et passant par M'.

Un vecteur directeur de d est $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Des équations paramétriques de d sont donc $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -6-\lambda \\ z = 6+2\lambda \end{cases}$.

Par substitution dans l'équation de Π, on obtient :

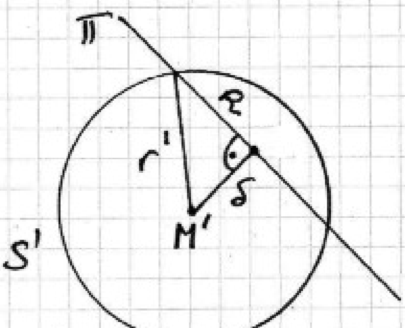
$$2(2\lambda) - (-6-\lambda) + 2(6+2\lambda) - 36 = 0$$
$$\Longrightarrow 4\lambda + 6 + \lambda + 12 + 4\lambda - 36 = 0$$
$$\Longrightarrow 9\lambda - 18 = 0 \Longrightarrow 9\lambda = 18 \Longrightarrow \lambda = 2.$$

Avec $\lambda = 2$, on trouve $x = 2\cdot 2 = 4$, $y = -6-2 = -8$ et $z = 6+2\cdot 2 = 10$.

Le centre du cercle d'intersection de S' et de Π est donc $(4; -8; 10)$, ce qui est exactement le centre du losange (voir b)).

Pour trouver le rayon du cercle d'intersection de S' et de Π, on va utiliser le théorème de Pythagore.

On a la situation schématique suivante :



On a $\delta = \text{dist}(M'; \Pi) = \dfrac{|2\cdot 0 - (-6) + 2\cdot 6 - 36|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \dfrac{|-18|}{3} = 6.$

Le rayon du cercle d'intersection de S' et de Π vaut alors $\sqrt{r'^2 - \delta^2} =$
$= \sqrt{15^2 - 6^2} = \sqrt{225-36} = \sqrt{189} \cong 13{,}75.$

d) D'après a), les diagonales du losange ABCD valent $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{288} \cong 16{,}97$ et $\|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{72} \cong 8{,}49$.

Comme le cercle d'intersection de S' et de Π a un diamètre de $\sim 2\cdot 13{,}75 \cong 27{,}5$ et que le centre du cercle et le centre du losange coïncident, on en déduit que le losange est entièrement à l'intérieur du cercle d'intersection de S' et Π.

Deuxième partie

e) Pour déterminer les traces du plan Π : $x+2y-z-6=0$, on cherche ses intersections avec les axes de référence.

Avec l'axe x : on pose $y=z=0 \Longrightarrow x-6=0 \Longrightarrow x=6 \Longrightarrow I_x(6;0;0)$

Avec l'axe y : on pose $x = z = 0 \Rightarrow 2y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow I_y(0;3;0)$.
Avec l'axe z : on pose $x = y = 0 \Rightarrow -z - 6 = 0 \Rightarrow z = -6 \Rightarrow I_z(0;0;-6)$.
On peut alors dessiner les traces du plan (voir feuille suivante).

f) On dessine A (voir feuille suivante).
A_s est la projection de A dans le sol.
Comme d doit être parallèle au mur, la projection de d dans le sol est parallèle à l'axe y et passe par A_s. Cette projection coupe la trace de Π dans le sol en J. Comme d est dans le plan Π, J appartient à d et est donc la trace de d dans le sol. On peut alors dessiner la droite d (elle n'a pas d'intersection avec le mur).

g) On connaît déjà le point $A(4;3;4)$.
J est l'intersection de la projection de d dans le sol et de la trace de Π dans le sol.
La projection de d dans le sol est la droite $\begin{cases} x = 4 \\ y = \lambda \\ z = 0. \end{cases}$

La trace de Π dans le sol est $x + 2y - 6 = 0$ (on pose $z = 0$ dans l'équation de Π).
Par substitution des équations de la projection de d dans l'équation de la trace de Π dans le sol, on obtient $4 + 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow 2\lambda - 2 = 0$
$\Rightarrow \lambda = 1$.
Cela nous donne $x = 4$, $y = 1$ et $z = 0$. Ainsi, on a $J(4;1;0)$.
Un vecteur directeur de d est donc parallèle à $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OA} =$
$= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Donc, un vecteur directeur de d est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

LYCÉE DENIS-DE-ROUGEMONT
Neuchâtel et Fleurier

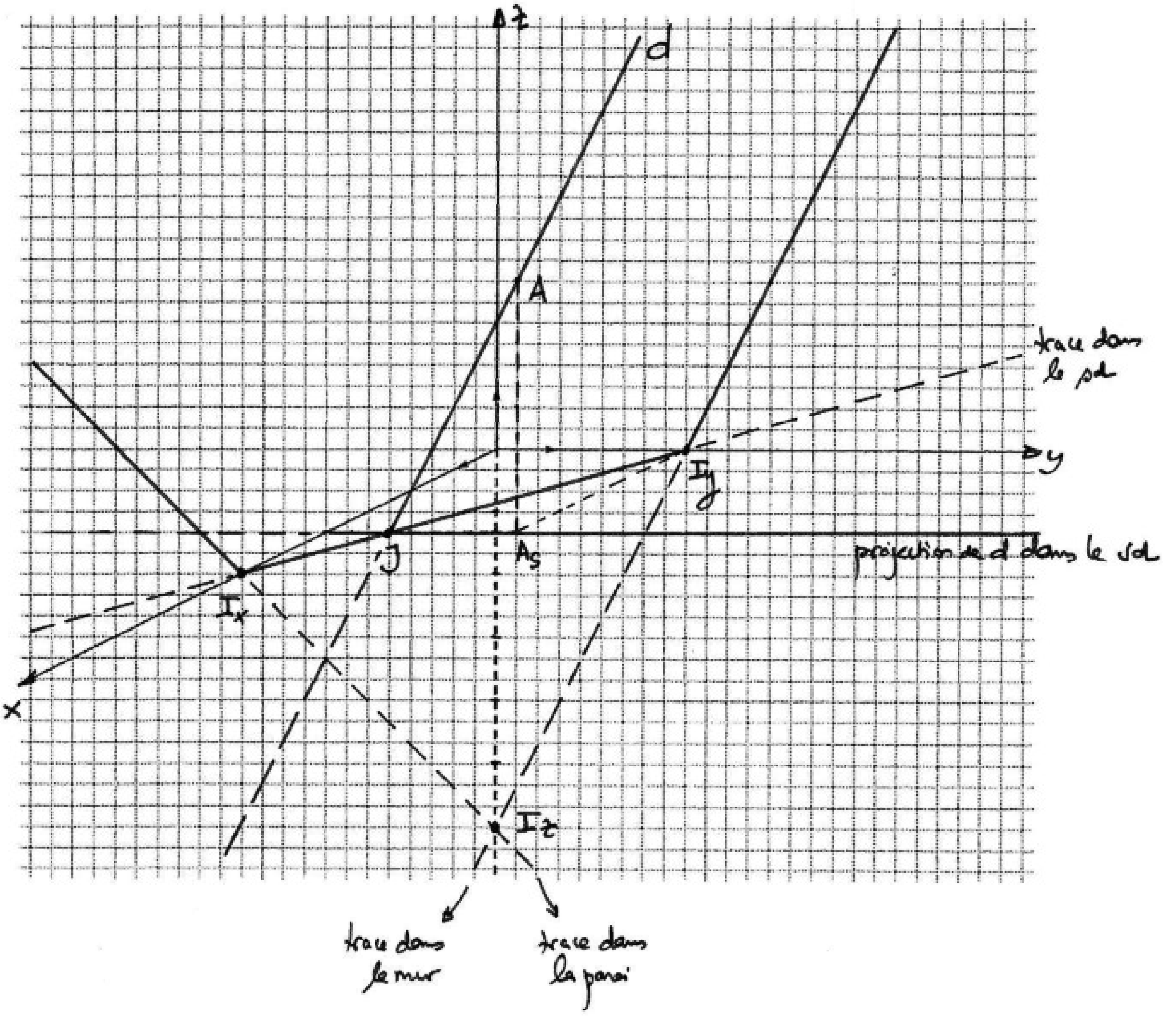
EXAMEN DE MATURITÉ
Mathématiques de niveau 1

Session 2014

Nom et prénom :

Classe :

Annexe pour le problème 2



Problème 3

a) prob (au moins un mammifère sur les 10) = 1 − prob (zéro mammifère sur les 10)

$= 1 - \left(\frac{12+12+12}{4 \cdot 12}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \cong 0,9437 = 94,37\%.$

b) On va devoir utiliser la loi binomiale : $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, où X compte le nombre de mammifères, k est le nombre de mammifères voulus (ici 4), n le nombre total d'"expériences" (ici 10), p est la probabilité d'avoir un mammifère sur une "expérience" (ici $\frac{12}{48} = \frac{1}{4}$).

On a donc $P(X=4) = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(1-\frac{1}{4}\right)^{10-4} = 210 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 \cong 0,1460 \cong 14,60\%.$

c) On a prob (recevoir un animal sans défaut) =

= prob (recevoir un mammifère sans défaut ou un oiseau sans défaut ou un reptile sans défaut ou un poisson sans défaut) =

= prob (recevoir un mammifère et qu'il soit sans défaut) +
prob (recevoir un oiseau et qu'il soit sans défaut) +
prob (recevoir un reptile et qu'il soit sans défaut) +
prob (recevoir un poisson et qu'il soit sans défaut) =

$= \frac{12}{48} \cdot \frac{5}{6} + \frac{12}{48} \cdot \frac{7}{8} + \frac{12}{48} \cdot 1 + \frac{12}{48} \cdot 1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{89}{96} \cong 22,47\%.$

d) C'est une probabilité conditionnelle : $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

On a : A = mammifère,
B = sans défaut,
$A \cap B$ = mammifère sans défaut,
$p(A \cap B) = \frac{12}{48} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{24}$,
$p(B) = \frac{89}{96}$ (voir c)).

Ainsi, $P(A|B) = \frac{5/24}{89/96} = \frac{20}{89} \cong 22,47\%.$

e) On a prob (avoir au moins un mammifère) = 1 − prob (avoir zéro mammifère) > 0,95.

On a $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$ chances d'avoir autre chose qu'un mammifère sur un sachet.

Si on a n sachets (n à déterminer), on obtient $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > 0,95$

$\Rightarrow 1 > 0,95 + \left(\frac{3}{4}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n < 0,05 \Rightarrow \log\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) < \log(0,05)$

(car $x<y \Rightarrow \log(x) < \log(y)$) $\Rightarrow n \log\left(\frac{3}{4}\right) < \log(0,05)$

$\Rightarrow n > \frac{\log(0,05)}{\log(3/4)}$ car $\log\left(\frac{3}{4}\right) < 0 \Rightarrow n > 10,41 \Rightarrow n = 11.$

Comme elle a un sachet pour chaque 20.− dépensé, elle doit donc dépenser

$11 \cdot 20 = 220.-$ au minimum.

f) On a prob (moins de 4 sachets) = prob (1 sachet) + prob (2 sachets) + + prob (3 sachets).

De plus prob (1 sachet) = prob (obtenir 1 mammifère dans un sachet) = $\frac{1}{4}$,
prob (2 sachets) = prob (pas de mammifère dans le 1er et mammifère dans le 2e) = $= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$ et, similairement, prob (3 sachets) $= \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$.

Ainsi, prob (moins de 4 sachets) $= \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} = \frac{37}{64} \cong 57{,}81\%$.

g) Si on note p la probabilité d'obtenir un dinodor, la probabilité d'obtenir un des 4 animaux de départ $= 2p$.

Comme on est sûr d'obtenir un des 5 animaux (mammifère, oiseau, reptile, poisson ou dinodors), on doit avoir $p + 4 \cdot 2p = 1 \Rightarrow 9p = 1$
$\Rightarrow p = \frac{1}{9}$.

Ainsi, la probabilité d'obtenir un dinodor est $\frac{1}{9} \cong 11{,}11\%$.