LYCEE JEAN-PIAGET

3M
MAI-JUIN 2014

NOM : **PRÉNOM :** **CLASSE :**

MATHÉMATIQUES

Niveau 1

Matériel distribué : Un grand cahier pour la rédaction des solutions.

Matériel personnel : Calculatrice standard autorisée, **règle, équerre, compas**, crayons et stylos, « Formulaires et tables » de CRM (sans annotation).

Consignes à respecter strictement :

- Durant l'examen, aucun matériel ne circule d'un étudiant à l'autre.
- Les solutions seront rédigées proprement au stylo ou à l'encre sur les pages de droite du cahier des solutions; les pages de gauche seront réservées aux essais et brouillons.
- Toute réponse doit être justifiée.

Remarque :

Dans la correction de votre épreuve, il sera tenu compte de la clarté et de la rigueur de vos développements ainsi que de la qualité de votre présentation.

Problème 1 ANALYSE

Les parties *A*, *B* et *C* sont indépendantes.

Partie A

On considère la fonction définie par son expression fonctionnelle :

$$f(x) = (x-2)\cdot e^{2x}$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f et le(s) zéro(s) de la fonction f.

2. Déterminer le(s) point(s) d'intersection avec l'axe y.

3. Établir le tableau de signes de la fonction f.

4. Donner les équations des éventuelles asymptotes.

5. Montrer que la dérivée première est $f'(x) = (2x-3)\cdot e^{2x}$ et établir le tableau de croissance.

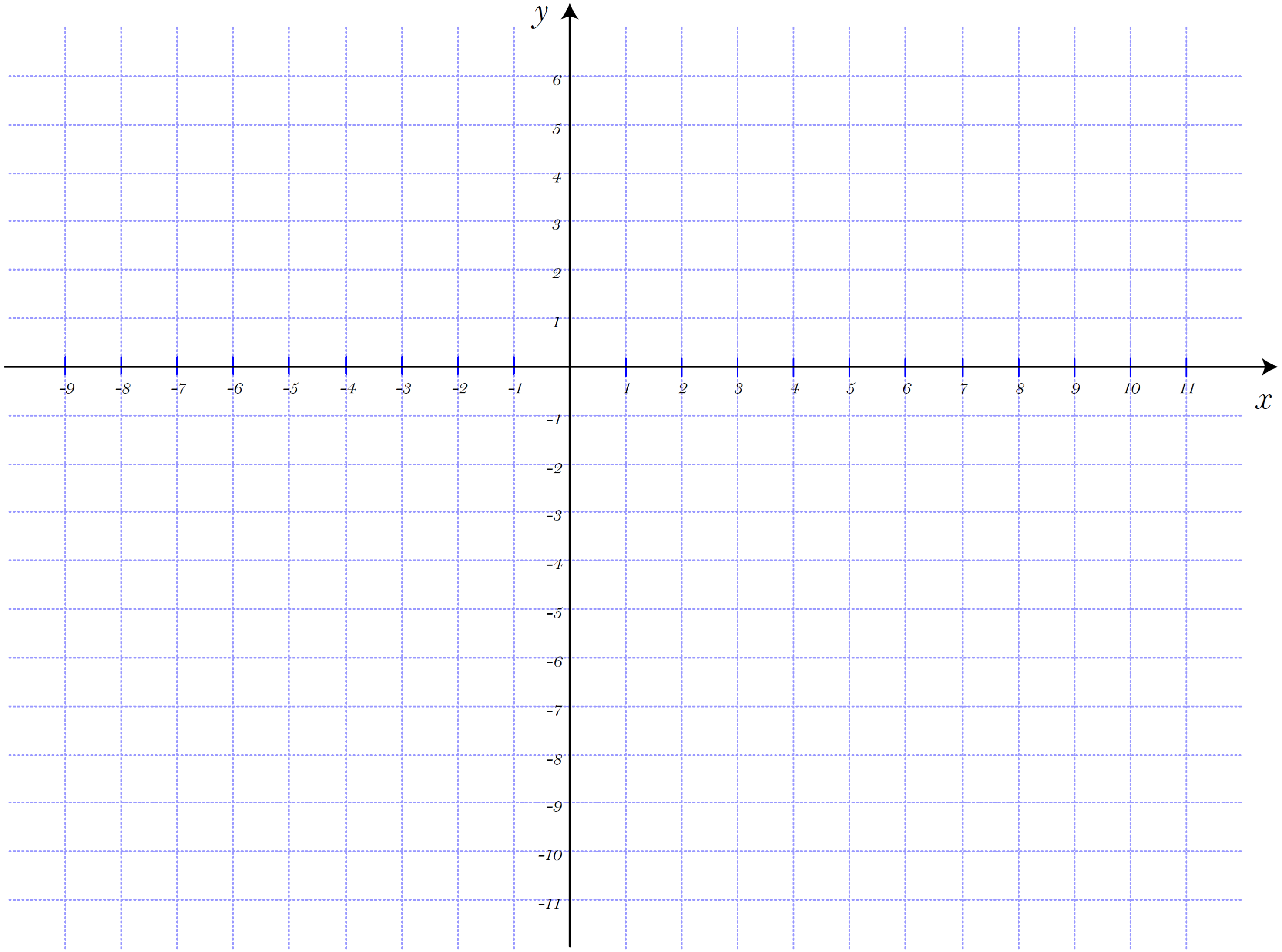
6. Calculer la dérivée seconde $f''(x)$ et établir le tableau de courbure.

7. Donner l'équation de la tangente t au graphe de f en son point d'inflexion.

8. Dessiner, dans le même système d'axes (Annexe 1, page 3), le graphe de f ainsi que la tangente t.

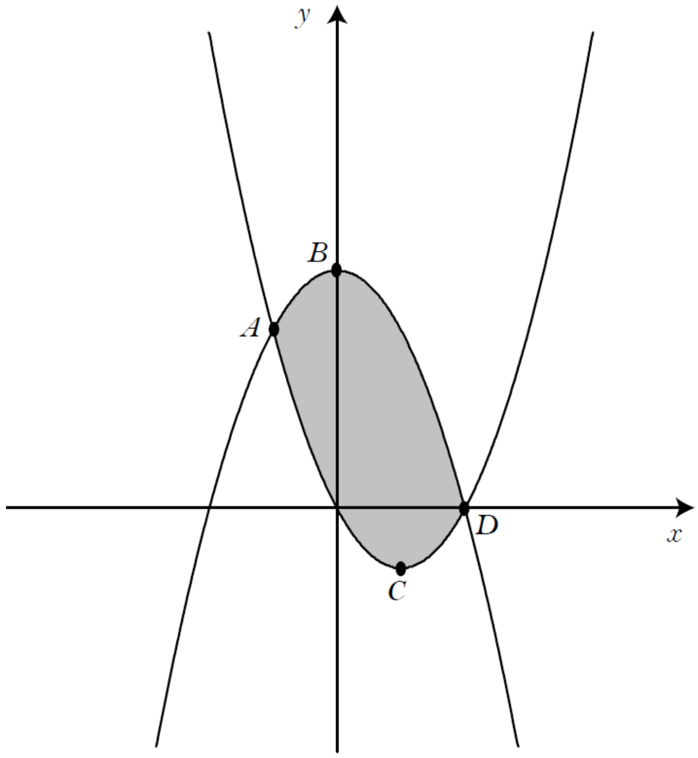
9. Hachurer la surface fermée délimitée par le graphe de f, l'axe des abscisses ainsi que les droites verticales $x = 0$ et $x = 2$ et calculer l'aire de cette surface.

Problème 1 **Partie A** **Annexe 1**



Partie B

On considère les deux fonctions f et g données par $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = -x^2 + 4$, et dont les graphes sont esquissés ci-dessous.



1. Indiquer sur le dessin, en justifiant votre réponse, le graphe de f et celui de g.

2. Calculer les coordonnées des points A, B, C et D.

3. Calculer l'aire du domaine grisé.

Partie C

Pour quelle valeur du nombre entier n a-t-on $\int_0^1 x^{2n} \, dx = \frac{1}{7}$?

L·Y·C·E·E JEAN-PIAGET

Problème 2 GÉOMÉTRIE PLANE ET GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Les parties *A* et *B* sont indépendantes.

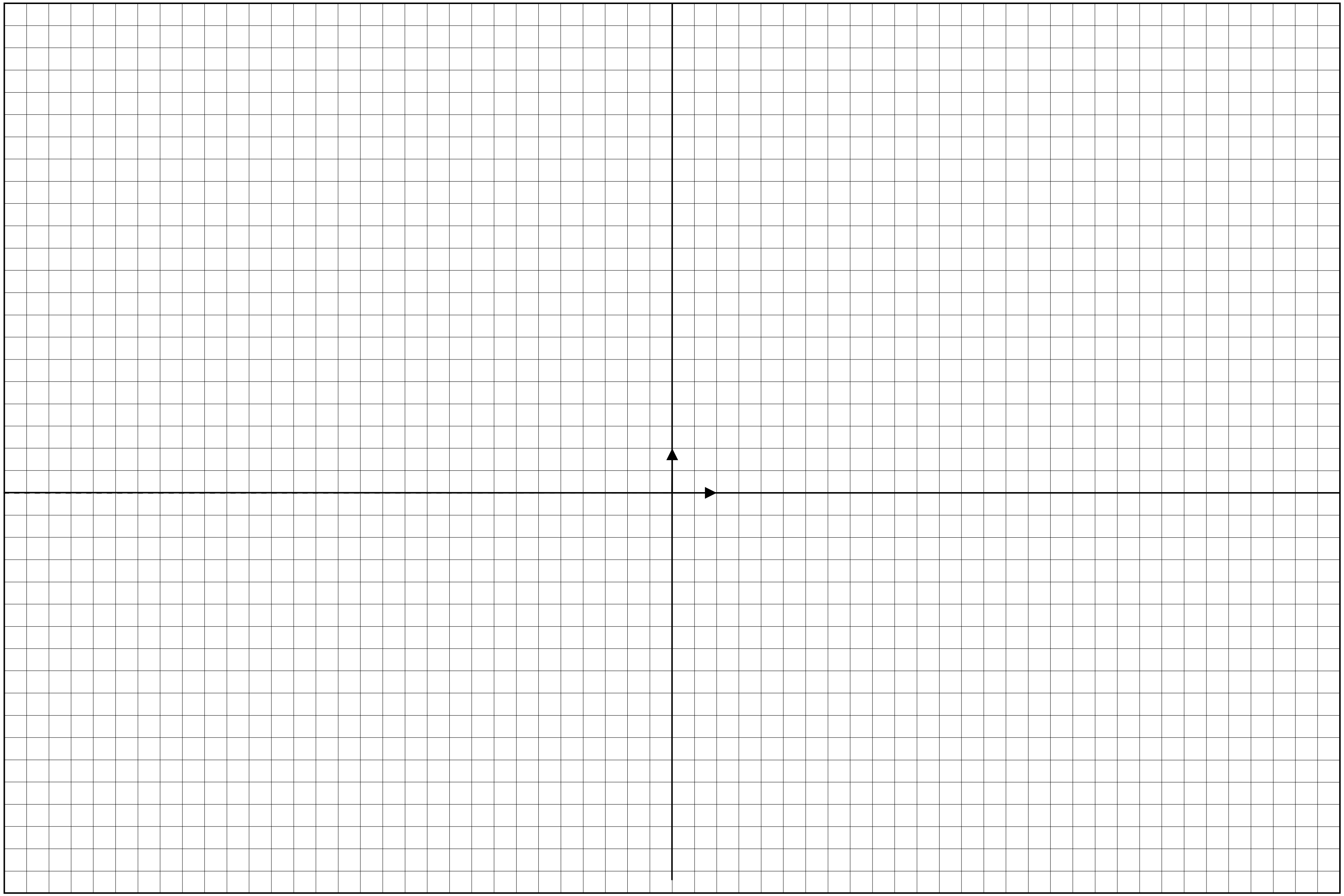
Partie A GÉOMÉTRIE PLANE

ATTENTION : Les questions doivent être résolues analytiquement et non pas graphiquement. Tous les calculs doivent figurer sur la feuille !

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$, on donne :

- le cercle $C_1 : x^2 + y^2 - 4y = 0$ de centre M_1 et de rayon r_1,
- le cercle C_2 de centre $M_2(3;2)$ et de rayon $r_2 = 5$,
- la droite d de représentation paramétrique: $d : \begin{cases} x = 6 - \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$ $\lambda \in$ R.

1. Montrer que $M_1(0;2)$ est le centre du cercle C_1 et que son rayon est $r_1 = 2$.
2. Soient A et B les points d'intersection de la droite d et du cercle C_2. Déterminer leurs coordonnées.
3. Montrer que C_1 et C_2 sont tangents en un point I et que C_1 est à l'intérieur de C_2.
4. Donner une équation cartésienne de la droite tangente t au point I.
5. Déterminer l'angle aigu entre la droite d et la tangente t.
6. Calculer la distance entre le point I et la droite d.
7. Calculer l'aire du triangle ABI.
8. Dans un même système d'axes (Annexe 2, page 6), dessiner les points A, B et I, les cercles C_1 et C_2 et les droites t et d.



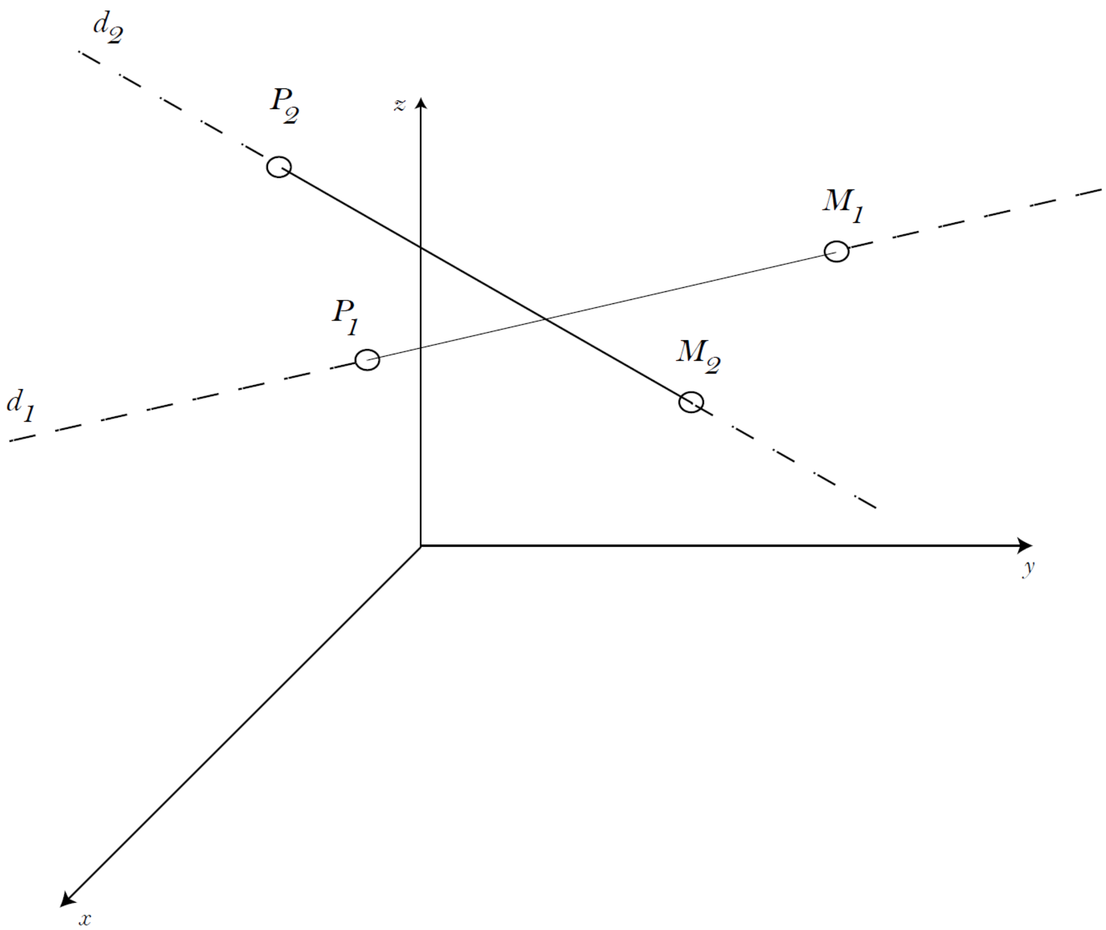
L·Y·C·E·E
JEAN-PIAGET

Partie B GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

ATTENTION : Les constructions géométriques doivent être faites directement sur cette page et de préférence au crayon de papier!

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Soient les deux droites d_1 et d_2 définies par leurs traces sur le mur et sur la paroi. Les deux droites d_1 et d_2 sont-elles sécantes? Justifier la réponse par une construction géométrique.

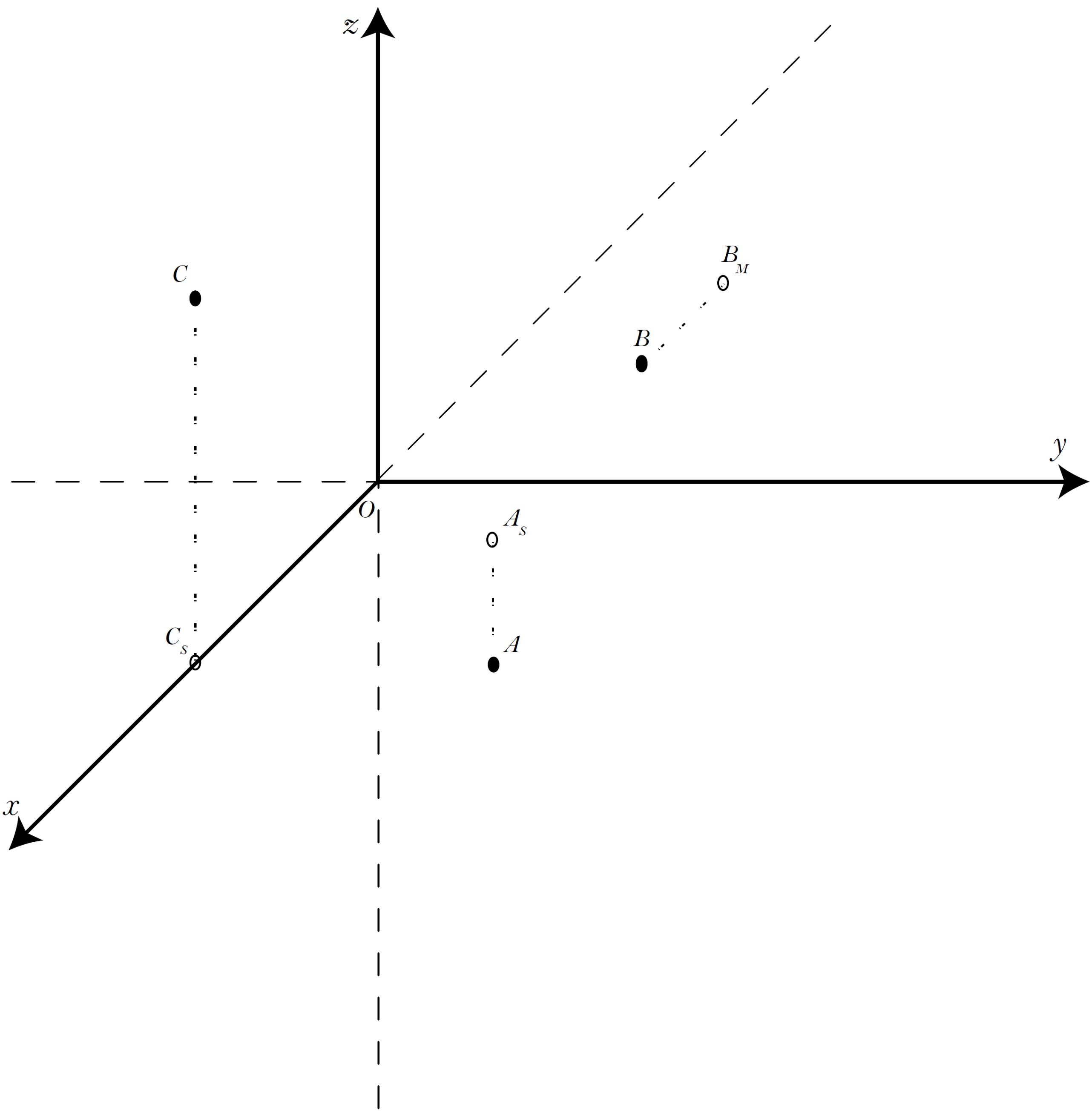


2. On considère les points A, B et C dans l'espace

   a. Dans quel octant se trouve le point A, respectivement le point B et dans quel plan de référence se trouve le point C ?

   b. Dessiner la trace (T_x T_y) sur le sol du plan ABC. ($T_x = ABC \cap Ox$ et $T_y = ABC \cap Oy$)

   c. Hachurer la partie visible du triangle ABC.



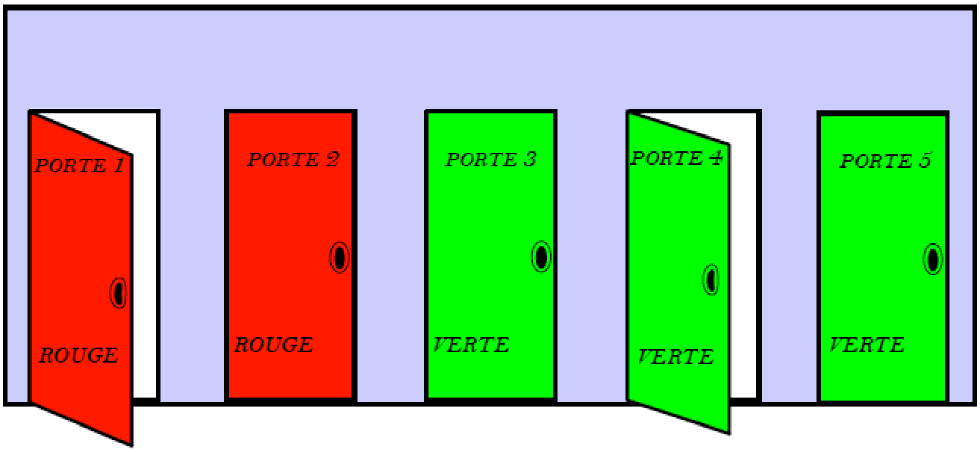
<u>Problème 3</u> COMBINATOIRE ET PROBABILITÉS

Rappel des consignes : des calculs détaillés et précis sont exigés ; des solutions obtenues par approximation ou par des essais successifs ne seront pas prises en considération.

Les parties *A* et *B* sont indépendantes.

<u>Partie A</u> COMBINATOIRE

On considère cinq portes numérotées, les deux premières sont rouges et trois suivantes sont vertes. Une porte peut être ouverte ou fermée.



1. Combien y a-t-il de configurations possibles quant à l'ouverture /fermeture de ces cinq portes ?

2. Combien y a-t-il de possibilités d'avoir exactement trois portes ouvertes ?

3. Combien y a-t-il de possibilités qu'au moins une porte soit ouverte ?

4. Dans combien de configurations, la porte 2 est-elle ouverte ?

5. Dans combien de configuration, une porte rouge est ouverte et l'autre est fermée, une porte verte est fermée et les deux autres sont ouvertes ?

Partie B PROBABILITÉS

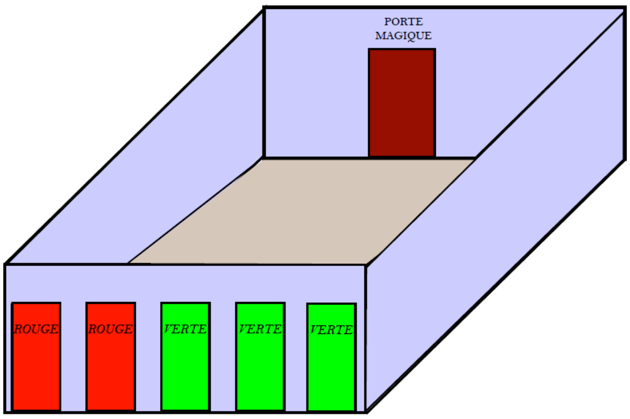
La « porte magique » est un jeu télévisé dans lequel un joueur peut gagner un voyage à Zanzibar.

À son entrée sur le plateau du jeu, le joueur arrive face à 5 portes (deux rouges et trois vertes). L'une d'entre elles s'ouvre de **manière aléatoire**.

Le jeu commence et se déroule en deux phases :

1ère phase : Réussir la première phase permet au joueur de passer la porte ouverte. Il se retrouve dans une pièce qui conduit à la « porte magique ».

2ème phase : Réussir la deuxième phase revient à gagner le jeu : la « porte magique » s'ouvre et le joueur pourra s'envoler vers Zanzibar.



1ère phase : Franchir la première porte

Le déroulement de cette phase dépend de la couleur de la porte ouverte aléatoirement à l'entrée du joueur sur le plateau :

- Une porte ouverte de couleur **verte** implique que le joueur peut franchir la porte et continuer le jeu
- Si la porte ouverte est **rouge** une étape supplémentaire est nécessaire : le joueur doit lancer un dé cubique, bien équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
  - S'il obtient un numéro inférieur ou égal à 2, il passe à l'intérieur et continue le jeu.
  - Dans le cas contraire, il perd.

2ème phase : Franchir la « porte magique »

A l'intérieur de la pièce, on a placé une urne. Cette dernière contient 17 boules rouges, 2 boules vertes et une seule boule blanche. Le joueur extrait **sans remise** une seule boule. La suite du jeu dépend de la couleur de la boule tirée :

- Si la boule est **verte**, alors la porte magique s'ouvre et le joueur gagne le voyage.
- Si la boule est **rouge**, alors le joueur perd.
- Si la boule est **blanche**, alors un deuxième tirage est obligatoire :
  - Dans le cas où le joueur tire une boule **verte**, la porte magique s'ouvre et il gagne le voyage.
  - Dans le cas où le joueur tire une boule **rouge**, il perd.

1. Décrire ce jeu à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Quelle est la probabilité de franchir une porte rouge lors de la 1ère phase du jeu ?
3. Montrer que la probabilité de gagner le jeu est d'environ 7,72%.
4. Quelle est la probabilité que le joueur perde le jeu ?
5. Sachant qu'un joueur a gagné, quelle est la probabilité qu'il soit passé par une porte verte ?
6. Si 10 candidats ont joué, quelle est la probabilité que 2 aient gagné, et 8 aient perdu ?
7. Combien de parties faut-il jouer afin d'atteindre 70% de chances de gagner au moins une fois le jeu ?