CENTRE INTERRÉGIONAL DE FORMATION DES MONTAGNES NEUCHÂTELOISES ECOLE DU SECTEUR TERTIAIRE (CIFOM-ESTER)
LA CHAUX-DE-FONDS
CENTRE PROFESSIONNEL DU LITTORAL NEUCHATELOIS – ECOLE PROFESSIONNELLE COMMERCIALE (CPLN-EPC)
NEUCHÂTEL
LYCÉE JEAN-PIAGET – ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE (LJP-ESCN)
NEUCHÂTEL

MATURITÉ PROFESSIONNELLE COMMERCIALE

MODÈLES 3+1, INTÉGRÉ ET POST-CFC/DIPLÔME
EN ÉCOLE À PLEIN TEMPS OU PAR VOIE DUALE

EXAMEN CANTONAL « *PARTIE ÉCOLE* »

SESSION 2014

EXAMEN ÉCRIT DE MATHÉMATIQUES

***Date de l'examen** : mardi 27 mai 2014*

Nom élève CORRIGE Prénom ....
Classe .... École ....

Durée totale de l'examen 120 minutes
Temps supplémentaire pour élèves avec autorisation 15 minutes
Moyen auxiliaire autorisé Calculatrice non programmable

Cette série comporte 16 pages, y compris cette page de couverture.

Espace réservé aux correcteur-trice-s :

Points : ....

Note obtenue (au demi-point ou à l'entier) .... **Date** ....

Signature des correcteur-trice-s : ....

Nom élève.. Prénom :..

FORMULAIRE

Les conditions de validité des formules sont du ressort de l'utilisateur !

ZÉRO et DIVISION $(x \neq 0)$

$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$ $\qquad \frac{0}{x} = 0$

$\frac{x}{0} =$ impossible $\qquad \frac{0}{0} =$ indéterminé

IDENTITÉS REMARQUABLES

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
$$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

PUISSANCES et RACINES

$x^0 = 1$ $\qquad x^1 = x$

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ $\qquad (x^m)^n = x^{m \cdot n}$

$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ $\qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

$(xy)^n = x^n y^n$ $\qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$ $\qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ $\qquad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$

SYSTÈMES DE COORDONNÉES

Soient deux points $A(x_1; y_1)$ et $B(x_2; y_2)$

On dit que x_1 est l'***abscisse*** et y_1 l'***ordonnée*** du point A.

La distance entre ces points est (Pythagore) :

$$\delta(A\,; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Équation de l'axe horizontal Ox : $\quad \boldsymbol{y = 0}$

Équation de l'axe vertical Oy : $\quad \boldsymbol{x = 0}$

LOGARITHMES

En base 10 : $\quad y = \log(x) \Leftrightarrow 10^y = x$

En base a: $\quad y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$

En base e : $\quad y = \ln(x) \Leftrightarrow e^y = x$

Propriétés (quelle que soit la base) :

$\log(1) = 0$ $\qquad \log(x^n) = n \cdot \log(x)$

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$$

Changement de base :

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

DROITES

Soient deux points distincts $A(x_1; y_1)$ et $B(x_2; y_2)$ et nommons d l'unique droite qui en est issue.

Équation fonctionnelle :

$$\boxed{d: y = mx + h}$$

h : ***ordonnée à l'origine*** ou ***hauteur*** de la droite

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$: ***pente*** de la droite

Si $x_1 = x_2$, la droite est verticale ; sa pente n'existe pas et son équation fonctionnelle non plus. On peut alors donner l'équation suivante :

$$\boxed{d: x = x_{1,2}}$$

Soient à présent deux droites d'équations :

$$\boldsymbol{d_1}: y = m_1 x + h_1 \text{ et } \boldsymbol{d_2}: y = m_2 x + h_2$$

- si $m_1 = m_2$ $\quad \boldsymbol{d_1}$ et $\boldsymbol{d_2}$ sont ***parallèles***.
- si $m_1 \cdot m_2 = -1$ $\quad \boldsymbol{d_1}$ et $\boldsymbol{d_2}$ sont ***perpendiculaires***.

Nom élève.. Prénom : ....

Les conditions de validité des formules sont du ressort de l'utilisateur !

ÉQUATIONS DU 2ème DEGRÉ

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \boxed{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

On appelle ***discriminant*** la valeur $\Delta=b^2-4ac$:

- si $\Delta>0$ deux solutions réelles distinctes
- si $\Delta<0$ pas de solution réelle
- si $\Delta=0$ une seule solution réelle

DÉNOMBREMENT

Factoriel : $n!=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$
$0!=1$ par définition

Sans répétitions : r éléments distincts parmi n

Permutation : (ou arrangement) $P(n;r)=A(n;r)=\frac{n!}{(n-r)!}$

Combinaison : $C(n;r)=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}=\frac{P(n;r)}{r!}$

Avec répétitions

Permutation : $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_r!}$

Arrangement : n^r

PROBABILITÉS

$$p=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}},\quad 0\le p\le 1$$

Évènement impossible : $P(A)=0=0\%$

Évènement certain : $P(A)=1=100\%$

Évènement contraire : $P(\bar{A})=1-P(A)$

Réunion d'évènements :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

ALGÈBRE FINANCIÈRE

x	nombre de pièces
$R(x)$	revenus / recettes / produits chiffre d'affaires
$C(x)$	charges / coûts / frais
$R(x)-C(x)$	résultat (bénéfice ou perte)
$R(x)=C(x)$	seuil de rentabilité / point mort

LA PARABOLE

Forme polynomiale : $y=ax^2+bx+c$

Le coefficient a influence la courbure de la parabole.

Les év. zéros x_1 et x_2 s'obtiennent en posant $y=0$.

Le sommet est en $S(x_S;y_S)$ avec :

$$x_S=-\frac{b}{2a}=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad y_S=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

Forme standard : $y=a(x-x_S)^2+y_S$

Forme factorisée : $y=a(x-x_1)(x-x_2)$

STATISTIQUES

On considère n données numériques $(x_i\,;\,y_i)$.

Une variable

Moyenne : $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x_i$

Variance : $\mathrm{Var}(x)=\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$

Écart-type : $\sigma(x)=\sqrt{\mathrm{Var}(x)}$

Deux variables : droite de régression $y=mx+h$

Pente : $m=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$

Ordonnée à l'origine : $h=\bar{y}-m\bar{x}$

Coefficient de corrélation : $-1\le r\le 1$ $\quad r=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}}$

INTÉRÊTS

- C_0 capital initial
- C_n capital final
- t taux d'intérêt
- n nombre d'années
- j nombre de jours (année commerciale)

COMPOSÉS (capitalisation annuelle)	SIMPLES
$C_n=C_0(1+t)^n$	$C_n=C_0+\frac{C_0\cdot t\cdot j}{360}$
$C_n=C_0(1-t)^n$ (en cas d'amortissement)	

Nom élève.. Prénom :..

Exercice 1

Résoudre :

a) $\frac{4x+5}{5} - \frac{3x-3}{4} = 2$ | Dénominateur commun : 20

$\frac{16x+20}{20} - \left(\frac{15x-15}{20}\right) = \frac{40}{20}$ | $\cdot 20$

$16x + 20 - (15x - 15) = 40$ | D

$16x + 20 - 15x + 15 = 40$ | R

$x + 35 = 40$ | -35

$\underline{\underline{x = 5}}$

b) $x^4 - 8x^2 = 9$ | -9

$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ | $y = x^2$

$y^2 - 8y - 9 = 0$ | Éq. du 2e degré

$a = 1,\ b = -8,\ c = -9$

$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2}$

$\frac{18}{2} = 9 = x^2 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3 \text{ ou } x = -3}}$

$\frac{-2}{2} = -1 = x^2$ impossible

c) $(2x-1)^2 = 4x(x-2) + 1$ | $(2x-1)^2 = (2x-1)(2x-1) = 4x^2 - 2x - 2x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$

$4x^2 - 4x + 1 = 4x(x-2) + 1$ | D

$4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - 8x + 1$ | $-4x^2$

$-4x + 1 = -8x + 1$ | $+8x$

$4x + 1 = 1$ | -1

$4x = 0$ | $:4$

$\underline{\underline{x = 0}}$

Nom élève.. Prénom :...

Exercice 2

a) Soit la parabole d'équation $P: y = -x^2 - x + 2$:

1. Calculer les coordonnées du sommet de la parabole.

On a $a = -1$, $b = -1$ et $c = 2$.

Ainsi $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2\cdot(-1)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

et $y_S = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\cdot(-1)\cdot 2 - (-1)^2}{4\cdot(-1)} = \frac{-8-1}{-4} = \frac{-9}{-4} = \frac{9}{4}$.

Donc, les coordonnées du sommet sont $\underline{\underline{\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)}}$.

2. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec les deux axes (Ox et Oy).

Avec Ox: on met $y = 0 \Rightarrow -x^2 - x + 2 = 0$ (Éq du 2e degré).

$a = -1, b = -1, c = 2$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \frac{4}{-2} = -2 \Rightarrow \underline{\underline{(-2; 0)}} \\ \frac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{(1; 0)}} \end{cases}$$

Avec Oy: on met $x = 0 \Rightarrow y = -0^2 - 0 + 2 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{(0; 2)}}$

b) Soit la droite d'équation $d: 3x + y = -1$:

Calculer les coordonnées des points d'intersection de d et de P.

Avec $y = -x^2 - x + 2$ dans d, on obtient: $3x - x^2 - x + 2 = -1 \Rightarrow -x^2 + 2x + 2 = -1$

$\Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$, Éq. du 2e degré avec $a = -1$, $b = 2$ et $c = 3$.

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{2}{-2} = -1 \\ \frac{-6}{-2} = 3 \end{cases}$$

Avec $x_1 = -1$ dans d, on trouve $-3 + y_1 = -1 \Rightarrow y_1 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{(-1; 2)}}$.

Avec $x_2 = 3$ dans d, on trouve $9 + y_2 = -1 \Rightarrow y_2 = -10 \Rightarrow \underline{\underline{(3; -10)}}$.

Nom élève.. Prénom : ....

Exercice 3

Un bijoutier crée et vend des bracelets.

Le coût total (en francs) de fabrication C de x bracelets est donné par $C(x) = 2x^2 + 232x + 480$.

Il peut revendre chaque bracelet 300 francs.

a) Si ses coûts se sont élevés à 4120 francs, combien de bracelets a-t-il fabriqués ?

On a $C(x) = 4120 \Rightarrow 2x^2 + 232x + 480 = 4120 \Rightarrow 2x^2 + 232x - 3640 = 0$,

Éq. du 2e degré avec $a = 2$, $b = 232$ et $c = -3640$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-232 \pm \sqrt{53'824 + 29120}}{4} = \frac{-232 \pm \sqrt{82'944}}{4}$$

$$= \frac{-232 \pm 288}{4} = \begin{cases} \frac{56}{4} = 14 \\ -\frac{520}{4} = -130 \rightarrow \text{exclu car } x \geq 0. \end{cases}$$

Ainsi, il y a eu 14 bracelets fabriqués.

b) Donner l'expression de la recette $R(x)$ obtenue pour x bracelets vendus.

Comme chaque bracelet est vendu 300.–, on a $R(x) = 300 \cdot x$.

c) Donner l'expression du bénéfice $B(x)$ obtenu pour x bracelets fabriqués et vendus.

On a $B(x) = R(x) - C(x)$ (revenus – coûts)

$$= 300x - (2x^2 + 232x + 480) = 300x - 2x^2 - 232x - 480$$

$$= -2x^2 + 68x - 480.$$

d) Quel bénéfice fait-il s'il fabrique et vend 11 bracelets ?

Avec $x = 11$, on a $B(x) = -2 \cdot 11^2 + 68 \cdot 11 - 480 = 26$.

Il fait donc un bénéfice de 26.–.

e) Pour quelles quantités de bracelets fabriqués et vendus le bijoutier est-il bénéficiaire ?

Il faut chercher les points morts du bénéfice, autrement dit les x tels que $B(x) = 0$.

$B(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 68x - 480 = 0$, éq. du 2e degré avec $a = -2$, $b = 68$ et $c = -480$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-68 \pm \sqrt{4624 - 3840}}{-4} = \frac{-68 \pm 28}{-4} = \begin{cases} 10 \\ 24 \end{cases}$$

Pour que $B(x) > 0$, il faut que x soit entre 10 et 24 : $10 < x < 24$.

Ainsi il sera bénéficiaire pour une quantité de bracelets entre 10 et 24.

f) Combien doit-il fabriquer et vendre de bracelets pour avoir un bénéfice maximum ?

Il faut trouver la 1e coordonnée du sommet du bénéfice.

On a $B(x) = -2x^2 + 68x - 480$ et $a = -2$, $b = 68$ et $c = -480$.

Ainsi $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{68}{-4} = 17$.

Il doit donc fabriquer 17 bracelets pour avoir un bénéfice maximal.

Nom élève.. Prénom :...

Exercice 4

On utilise la formule $C_n = C_0(1+t)^n$, où C_0 est le capital de départ, t est le taux d'intérêts, n le nombre d'années et C_n le capital après n années.

On se place dans le contexte des intérêts composés.

1. Trouver le capital obtenu après 14 ans si, au départ, il se montait à 12'000.- francs (taux annuel : 2,5%)

   On a $C_0 = 12'000$, $t = 2{,}5\% = 0{,}025$ et $n = 14$.

   Ainsi $C_n = 12'000 \cdot (1+0{,}025)^{14} = 12'000 \cdot 1{,}025^{14} \cong \underline{\underline{16'955{,}70}}$.

2. Combien d'années doit-on placer un capital de 2000.- francs au taux annuel de 3% pour récolter 2500.- francs d'intérêts ?

   On a $C_0 = 2000$, $t = 3\% = 0{,}03$ et $C_n = 2500 + 2000 = 4500$ (2500 est ce qui s'ajoute à C_0).

   Ainsi $4500 = 2000 \cdot (1+0{,}03)^n \Rightarrow 4500 = 2000 \cdot 1{,}03^n \Rightarrow 1{,}03^n = 2{,}25$

   $\Rightarrow n = \dfrac{\log(2{,}25)}{\log(1{,}03)} \cong 27{,}43$, soit $\underline{\underline{28 \text{ ans}}}$.

3. On emprunte 250'000.- francs à une banque pour agrandir notre atelier de production. Cette dernière exige un amortissement annuel de 15%.

   a) Après 10 ans, quel montant restera-t-il à rembourser?

   On a $C_0 = 250'000$, $t = -15\% = -0{,}15$ ("–" car c'est un amortissement) et $n = 10$.

   Ainsi, $C_n = 250'000 \cdot (1-0{,}15)^{10} = 250'000 \cdot 0{,}85^{10} = \underline{\underline{49'218{,}60}}$.

   b) Après combien d'années aurons-nous remboursé 240'000.- francs ?

   On a $C_n = 250'000 - 240'000 = 10'000$, $t = -15\% = -0{,}15$ et $C_0 = 250'000$.

   Ainsi $10'000 = 250'000(1-0{,}15)^n \Rightarrow 10'000 = 250'000 \cdot 0{,}85^n$

   $\Rightarrow 0{,}85^n = 0{,}04 \Rightarrow n = \dfrac{\log(0{,}04)}{\log(0{,}85)} \cong 19{,}81$, soit $\underline{\underline{20 \text{ ans}}}$.

   c) Si la banque avait voulu que la moitié de la dette soit remboursée après 10 ans, quel taux d'amortissement (en %) aurait-elle dû proposer ?

   On a $C_0 = 250'000.-$, $C_n = \dfrac{C_0}{2} = 125'000$ et $n = 10$.

   Ainsi $125'000 = 250'000 \cdot (1-t)^{10} \Rightarrow (1-t)^{10} = 0{,}5 \Rightarrow 1-t = \sqrt[10]{0{,}5}$

   $\Rightarrow t = 1 - \sqrt[10]{0{,}5} \cong 0{,}067 = \underline{\underline{6{,}7\%}}$

Nom élève.. Prénom : ....

Exercice 5

Une classe a reçu 4 billets pour le cirque Knie. Sachant que cette classe est composée de 18 élèves, calculer le nombre de façons de distribuer ces 4 billets dans chacun des cas suivants :

a) les billets sont numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet ;

b) les billets sont numérotés et chaque élève peut recevoir plusieurs billets ;

c) les billets ne sont pas numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet.

a) Ici, l'ordre est important car les billets sont numérotés.

On a:

1er billet	2e	3e	4e
18 possibilités (18 élèves)	17	16	15

$\Rightarrow 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = \underline{\underline{73'440 \text{ possibilités}}}$

b) Ici:

1er billet	2e	3e	4e
18 possibilités	aussi 18 puisque les élèves peuvent recevoir plusieurs billets	18	18

$\Rightarrow 18 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 18 = 18^4 = \underline{\underline{104'976 \text{ possibilités}}}$

c) Ici, l'ordre n'est pas important, puisque les billets ne sont pas numérotés.
On a donc des combinaisons:

$$C(18;4) = \underline{\underline{3060 \text{ possibilités}}}$$

Exercice 6

On possède une cage avec 12 lapins et 4 hamsters de laquelle on sort simultanément 3 animaux.

Quelles sont les probabilités d'avoir...

a) 3 hamsters ?

b) exactement 1 lapin ?

c) au moins 1 lapin ?

d) trois animaux de la même espèce ?

Dans cet exercice, l'ordre du choix n'est pas important. On utilise donc les combinaisons :

1) 3 hamsters parmi 4 et 0 lapins parmi 12

$$\Rightarrow \frac{C(4;3)\cdot C(12;0)}{C(16;3)} \cong 0{,}00714 = \underline{\underline{0{,}714\,\%}}.$$

2) 1 lapin parmi 12 et 2 hamsters parmi 4

$$\Rightarrow \frac{C(12;1)\cdot C(4;2)}{C(16;3)} \cong 0{,}1286 = \underline{\underline{12{,}86\,\%}}.$$

3) prob (au moins 1 lapin) = 1 − prob (zéro lapin) = 1 − prob (3 hamsters)

$$\cong 1 - 0{,}00714 \cong 0{,}9929 = \underline{\underline{99{,}29\,\%}}.$$

voir 1)

4) Soit 3 hamsters parmi 4 et 0 lapin parmi 12

Soit 0 hamsters parmi 4 et 3 lapins parmi 12

$$\Rightarrow \frac{C(4;3)\cdot C(12;0)}{C(16;3)} + \frac{C(4;0)\cdot C(12;3)}{C(16;3)} = 0{,}4 = \underline{\underline{40\,\%}}.$$

Nom élève.. Prénom :..

Exercice 7

Situation

Un fabricant de skis produit deux modèles. Il dispose pour ce faire d'une unique chaîne de production (qui tourne 24 heures sur 24) et de quatre ouvriers (chacun travaille 7 heures par jour).

Les modèles fabriqués sont :

- ✓ Le modèle LIGHT : une paire nécessite 20 minutes en chaîne de production et aucune intervention humaine n'est nécessaire.
- ✓ Le modèle ULTRA : une paire occupe la chaîne de production pendant un quart d'heure ; avant cela, une intervention humaine de 30 minutes est nécessaire.

Les frais de production d'une paire de skis LIGHT sont de 200.- francs ; ceux d'une paire de skis ULTRA sont de 400.- francs. L'investissement quotidien disponible pour la production est de 18'400.- francs.

Le patron cherche à déterminer combien de paires de skis de chaque modèle il doit fabriquer en une journée de 24 heures, sachant que le bénéfice est de 200 francs par modèle LIGHT et de 800 francs par modèle ULTRA.

On pose deux inconnues :

x : nombre de paires de skis LIGHT fabriquées en une journée
y : nombre de paires de skis ULTRA fabriquées en une journée

Travail à faire :

a) Exprimer en inéquations toutes les contraintes présentées ci-dessus.

On a:

	heures chaîne de production	heures ouvriers	frais de production	bénéfice
x	$20\text{min} \to 20x$	$0 \to 0x$	$200 \to 200x$	$200 \to 200x$
y	$15\text{min} \to 15y$	$30\text{min} \to 30y$	$400 \to 400y$	$800 \to 800y$
$x \geqslant 0$ $y \geqslant 0$	$20x + 15y \leq 24h \cdot 60 = 1440$	$30y \leq 4 \cdot 7h \cdot 60 = 1680$	$200x + 400y \leq 18'400$	$200x + 800y$

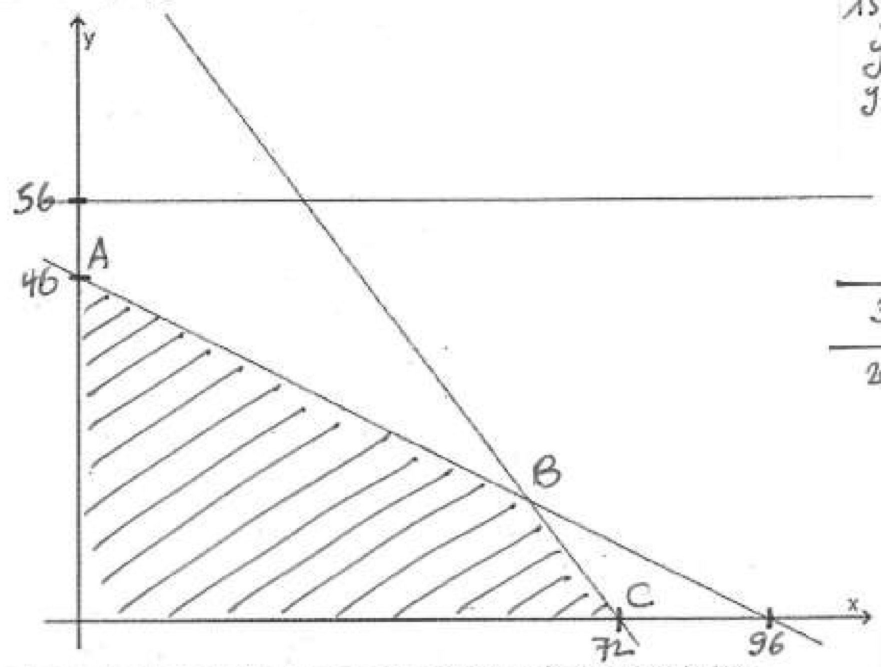
Les contraintes sont donc:

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \ y \geqslant 0 \\ 20x + 15y \leq 1440 \\ 30y \leq 1680 \\ 200x + 400y \leq 18'400 \end{cases}$$

Nom élève.. Prénom :..

b) Voici un début de représentation graphique pour les contraintes.

- ✓ Graduer les axes à l'endroit des 4 intersections visibles qu'ils forment avec les droites.
- ✓ Colorier le polygone de solution.



$20x + 15y \leq 1440$

$15y \leq 1440 - 20x$

$y \leq 96 - \frac{4}{3}x$

$y = 96 - \frac{4}{3}x$:

$x = 0 \Rightarrow y = 96$

$y = 0 \Rightarrow 96 - \frac{4}{3}x = 0$

$\Rightarrow \frac{4}{3}x = 96$

$\Rightarrow x = 72$

$30y \leq 1680 \Rightarrow y \leq 56$

$200x + 400y \leq 18'400$

$400y \leq 18'400 - 200x$

$y \leq 46 - 0,5x$

$y = 46 - 0,5x$

$x = 0 \Rightarrow y = 46$

$y = 0 \Rightarrow 46 - 0,5x = 0$

$\Rightarrow 0,5x = 46$

$x = 96$

c) Déterminer la production à effectuer de manière à maximiser le bénéfice.

Le bénéfice est donné par $b = 200x + 800y$.

Pour A, on a $x = 0$ et $y = 46 \Rightarrow b = 200 \cdot 0 + 800 \cdot 45 = 36800$.

Pour C, on a $x = 72$ et $y = 0 \Rightarrow b = 200 \cdot 72 + 800 \cdot 0 = 14'400$.

Pour B : c'est l'intersection de $y = 96 - \frac{4}{3}x$ et $y = 46 - 0,5x$;

on doit avoir $96 - \frac{4}{3}x = 46 - 0,5x$ $\quad | \cdot 3$

$288 - 4x = 138 - 1,5x$ $\quad | +4x$ et -138

$150 = 2,5x$ $\quad | :2,5$

$60 = x$

et $y = 46 - 0,5x = 46 - 0,5 \cdot 60 = 46 - 30 = 16$;

ainsi, pour B, on a $x = 60$ et $y = 16$

$\Rightarrow b = 200 \cdot 60 + 800 \cdot 16 = 24'800$.

Le maximum du bénéfice est donc en A ($x = 0$ et $y = 45$).

La production à effectuer de manière à maximiser le bénéfice est donc de ne fabriquer que des modèles ULTRA et d'en fabriquer 46