

## MATURITÉ PROFESSIONNELLE COMMERCIALE

MODÈLES 3+1, INTÉGRÉ ET POST-CFC/DIPLÔME  
EN ÉCOLE À PLEIN TEMPS OU PAR VOIE DUALE

EXAMEN CANTONAL « PARTIE ÉCOLE »

SESSION 2014

# EXAMEN ÉCRIT DE MATHÉMATIQUES

*Date de l'examen : mardi 27 mai 2014*

Nom élève ..... Prénom .....

Classe ..... École .....

Durée totale de l'examen	120 minutes
Temps supplémentaire pour élèves avec autorisation	15 minutes
Moyen auxiliaire autorisé	Calculatrice non programmable

Cette série comporte 16 pages, y compris cette page de couverture.

**Espace réservé aux correcteur-trice-s :**

Points : .....

Note obtenue (au demi-point ou à l'entier) ..... Date .....

Signature des correcteur-trice-s : .....

**FORMULAIRE**

*Les conditions de validité des formules sont du ressort de l'utilisateur !*

<p><b>ZÉRO et DIVISION (<math>x \neq 0</math>)</b></p> <p><math>0 \cdot x = x \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0</math>                      <math>\frac{0}{x} = 0</math></p> <p><math>\frac{x}{0} = \text{impossible}</math>                      <math>\frac{0}{0} = \text{indéterminé}</math></p>	<p><b>IDENTITÉS REMARQUABLES</b></p> <p><math>(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2</math>  <math>(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2</math>  <math>(x - y)(x + y) = x^2 - y^2</math>  <math>(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3</math>  <math>(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3</math></p>
<p><b>PUISSANCES et RACINES</b></p> <p><math>x^0 = 1</math>                      <math>x^1 = x</math>  <math>x^m \cdot x^n = x^{m+n}</math>                      <math>(x^m)^n = x^{m \cdot n}</math>  <math>\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}</math>                      <math>x^{-n} = \frac{1}{x^n}</math>  <math>(xy)^n = x^n y^n</math>                      <math>\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}</math>  <math>\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}</math>                      <math>\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}</math>  <math>\frac{1}{x^n} = \sqrt[n]{x}</math>                      <math>\frac{m}{x^n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m</math></p>	<p><b>SYSTÈMES DE COORDONNÉES</b></p> <p>Soient deux points <math>A(x_1; y_1)</math> et <math>B(x_2; y_2)</math>  On dit que <math>x_1</math> est l'<i>abscisse</i> et <math>y_1</math> l'<i>ordonnée</i> du point A.  La distance entre ces points est (Pythagore) :  <math>\delta(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}</math>  Équation de l'axe horizontal Ox :                      <math>y = 0</math>  Équation de l'axe vertical Oy :                      <math>x = 0</math></p>
<p><b>LOGARITHMES</b></p> <p>En base 10 : <math>y = \log(x) \Leftrightarrow 10^y = x</math>  En base a : <math>y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x</math>  En base e : <math>y = \ln(x) \Leftrightarrow e^y = x</math></p> <p>Propriétés (quelle que soit la base) :</p> <p><math>\log(1) = 0</math>                      <math>\log(x^n) = n \cdot \log(x)</math>  <math>\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)</math></p> <p>Changement de base :</p> <p><math>\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}</math></p>	<p><b>DROITES</b></p> <p>Soient deux points distincts <math>A(x_1; y_1)</math> et <math>B(x_2; y_2)</math> et nommons <math>d</math> l'unique droite qui en est issue.  Équation fonctionnelle :</p> <p><b><math>d: y = mx + h</math></b></p> <p><math>h</math> : <i>ordonnée à l'origine</i> ou <i>hauteur</i> de la droite  <math>m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}</math> : <i>pente</i> de la droite</p> <p>Si <math>x_1 = x_2</math>, la droite est verticale ; sa pente n'existe pas et son équation fonctionnelle non plus. On peut alors donner l'équation suivante :</p> <p><b><math>d: x = x_{1,2}</math></b></p> <p>Soient à présent deux droites d'équations :</p> <p><math>d_1: y = m_1x + h_1</math> et <math>d_2: y = m_2x + h_2</math></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• si <math>m_1 = m_2</math>                      <math>d_1</math> et <math>d_2</math> sont <b>parallèles.</b></li> <li>• si <math>m_1 \cdot m_2 = -1</math>                      <math>d_1</math> et <math>d_2</math> sont <b>perpendiculaires.</b></li> </ul>

Les conditions de validité des formules sont du ressort de l'utilisateur !

<p style="text-align: center;"><b>ÉQUATIONS DU 2<sup>ème</sup> DEGRÉ</b></p> $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ <p>On appelle <b>discriminant</b> la valeur <math>\Delta = b^2 - 4ac</math> :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• si <math>\Delta &gt; 0</math> deux solutions réelles distinctes</li> <li>• si <math>\Delta &lt; 0</math> pas de solution réelle</li> <li>• si <math>\Delta = 0</math> une seule solution réelle</li> </ul>	<p style="text-align: center;"><b>LA PARABOLE</b></p> <p><b>Forme polynomiale :</b> <math>y = ax^2 + bx + c</math></p> <p>Le coefficient <math>a</math> influence la courbure de la parabole. Les év. zéros <math>x_1</math> et <math>x_2</math> s'obtiennent en posant <math>y = 0</math>. Le sommet est en <math>S(x_S; y_S)</math> avec :</p> $x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_S = \frac{4ac - b^2}{4a}$ <p><b>Forme standard :</b> <math>y = a(x - x_S)^2 + y_S</math></p> <p><b>Forme factorisée :</b> <math>y = a(x - x_1)(x - x_2)</math></p>		
<p style="text-align: center;"><b>DÉNOMBREMENT</b></p> <p>Factoriel : <math>n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1</math>  <math>0! = 1</math> par définition</p> <p><u>Sans répétitions :</u> <math>r</math> éléments distincts parmi <math>n</math></p> <p>Permutation : (ou arrangement) <math>P(n; r) = A(n; r) = \frac{n!}{(n - r)!}</math></p> <p>Combinaison : <math>C(n; r) = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!} = \frac{P(n; r)}{r!}</math></p> <p><u>Avec répétitions</u></p> <p>Permutation : <math>\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}</math></p> <p>Arrangement : <math>n^r</math></p>	<p style="text-align: center;"><b>STATISTIQUES</b></p> <p>On considère <math>n</math> données numériques <math>(x_i; y_i)</math>.</p> <p><u>Une variable</u></p> <p>Moyenne : <math>\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i</math></p> <p>Variance : <math>\text{Var}(x) = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2</math></p> <p>Écart-type : <math>\sigma(x) = \sqrt{\text{Var}(x)}</math></p> <p><u>Deux variables :</u> droite de régression <math>y = mx + h</math></p> <p>Pente : <math>m = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}</math></p> <p>Ordonnée à l'origine : <math>h = \bar{y} - m\bar{x}</math></p> <p>Coefficient de corrélation : <math>r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}}</math>  <math>-1 \leq r \leq 1</math></p>		
<p style="text-align: center;"><b>PROBABILITÉS</b></p> <p><math>p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}, 0 \leq p \leq 1</math></p> <p>Évènement impossible : <math>P(A) = 0 = 0\%</math></p> <p>Évènement certain : <math>P(A) = 1 = 100\%</math></p> <p>Évènement contraire : <math>P(\bar{A}) = 1 - P(A)</math></p> <p>Réunion d'évènements :  <math>P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)</math></p>	<p style="text-align: center;"><b>INTÉRÊTS</b></p> <p><math>C_0</math> capital initial  <math>C_n</math> capital final  <math>t</math> taux d'intérêt  <math>n</math> nombre d'années  <math>j</math> nombre de jours (année commerciale)</p> <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="width: 50%; vertical-align: top; border-right: 1px dashed black; padding-right: 5px;"> <p style="text-align: center;"><b>COMPOSÉS</b> (capitalisation annuelle)</p> <math display="block">C_n = C_0(1 + t)^n</math> <math display="block">C_n = C_0(1 - t)^n</math> <p>(en cas d'amortissement)</p> </td> <td style="width: 50%; vertical-align: top; padding-left: 5px;"> <p style="text-align: center;"><b>SIMPLES</b></p> <math display="block">C_n = C_0 + \frac{C_0 \cdot t \cdot j}{360}</math> </td> </tr> </table>	<p style="text-align: center;"><b>COMPOSÉS</b> (capitalisation annuelle)</p> $C_n = C_0(1 + t)^n$ $C_n = C_0(1 - t)^n$ <p>(en cas d'amortissement)</p>	<p style="text-align: center;"><b>SIMPLES</b></p> $C_n = C_0 + \frac{C_0 \cdot t \cdot j}{360}$
<p style="text-align: center;"><b>COMPOSÉS</b> (capitalisation annuelle)</p> $C_n = C_0(1 + t)^n$ $C_n = C_0(1 - t)^n$ <p>(en cas d'amortissement)</p>	<p style="text-align: center;"><b>SIMPLES</b></p> $C_n = C_0 + \frac{C_0 \cdot t \cdot j}{360}$		
<p style="text-align: center;"><b>ALGÈBRE FINANCIÈRE</b></p> <p><math>x</math> nombre de pièces</p> <p><math>R(x)</math> revenus / recettes / produits chiffre d'affaires</p> <p><math>C(x)</math> charges / coûts / frais</p> <p><math>R(x) - C(x)</math> résultat (bénéfice ou perte)</p> <p><math>R(x) = C(x)</math> seuil de rentabilité / point mort</p>			

Nom élève..... Prénom :.....

---

**Exercice 1**

Résoudre :

a)  $\frac{4x + 5}{5} - \frac{3x - 3}{4} = 2$

b)  $x^4 - 8x^2 = 9$

c)  $(2x - 1)^2 = 4x(x - 2) + 1$

Nom élève..... Prénom :.....

---

## Exercice 2

a) Soit la parabole d'équation  $P: y = -x^2 - x + 2$  :

1. Calculer les coordonnées du sommet de la parabole.

2. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la parabole avec les deux axes (Ox et Oy).

b) Soit la droite d'équation  $d : 3x + y = -1$  :

Calculer les coordonnées des points d'intersection de d et de P.

Nom élève..... Prénom :.....

---

### Exercice 3

Un bijoutier crée et vend des bracelets.

Le coût total (en francs) de fabrication  $C$  de  $x$  bracelets est donné par  $C(x) = 2x^2 + 232x + 480$ .

Il peut revendre chaque bracelet 300 francs.

a) Si ses coûts se sont élevés à 4120 francs, combien de bracelets a-t-il fabriqués ?

b) Donner l'expression de la recette  $R(x)$  obtenue pour  $x$  bracelets vendus.

c) Donner l'expression du bénéfice  $B(x)$  obtenu pour  $x$  bracelets fabriqués et vendus.

Nom élève..... Prénom :.....

---

d) Quel bénéfice fait-il s'il fabrique et vend 11 bracelets ?

e) Pour quelles quantités de bracelets fabriqués et vendus le bijoutier est-il bénéficiaire ?

f) Combien doit-il fabriquer et vendre de bracelets pour avoir un bénéfice maximum ?





Nom élève..... Prénom :.....

---

### Exercice 5

Une classe a reçu 4 billets pour le cirque Knie. Sachant que cette classe est composée de 18 élèves, calculer le nombre de façons de distribuer ces 4 billets dans chacun des cas suivants :

- a) les billets sont numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet ;
- b) les billets sont numérotés et chaque élève peut recevoir plusieurs billets ;
- c) les billets ne sont pas numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet.

Nom élève..... Prénom :.....

---

**Exercice 6**

On possède une cage avec 12 lapins et 4 hamsters de laquelle on sort simultanément 3 animaux.

Quelles sont les probabilités d'avoir...

- a) 3 hamsters ?
- b) exactement 1 lapin ?
- c) au moins 1 lapin ?
- d) trois animaux de la même espèce ?

Nom élève..... Prénom :.....

## Exercice 7

### Situation

Un fabricant de skis produit deux modèles. Il dispose pour ce faire d'une unique chaîne de production (qui tourne 24 heures sur 24) et de quatre ouvriers (chacun travaille 7 heures par jour).

Les modèles fabriqués sont :

- ✓ Le modèle LIGHT : une paire nécessite 20 minutes en chaîne de production et aucune intervention humaine n'est nécessaire.
- ✓ Le modèle ULTRA : une paire occupe la chaîne de production pendant un quart d'heure ; avant cela, une intervention humaine de 30 minutes est nécessaire.

Les frais de production d'une paire de skis LIGHT sont de 200.- francs ; ceux d'une paire de skis ULTRA sont de 400.- francs. L'investissement quotidien disponible pour la production est de 18'400.- francs.

Le patron cherche à déterminer combien de paires de skis de chaque modèle il doit fabriquer en une journée de 24 heures, sachant que le bénéfice est de 200 francs par modèle LIGHT et de 800 francs par modèle ULTRA.

On pose deux inconnues :

$x$  : nombre de paires de skis LIGHT fabriquées en une journée

$y$  : nombre de paires de skis ULTRA fabriquées en une journée

### Travail à faire :

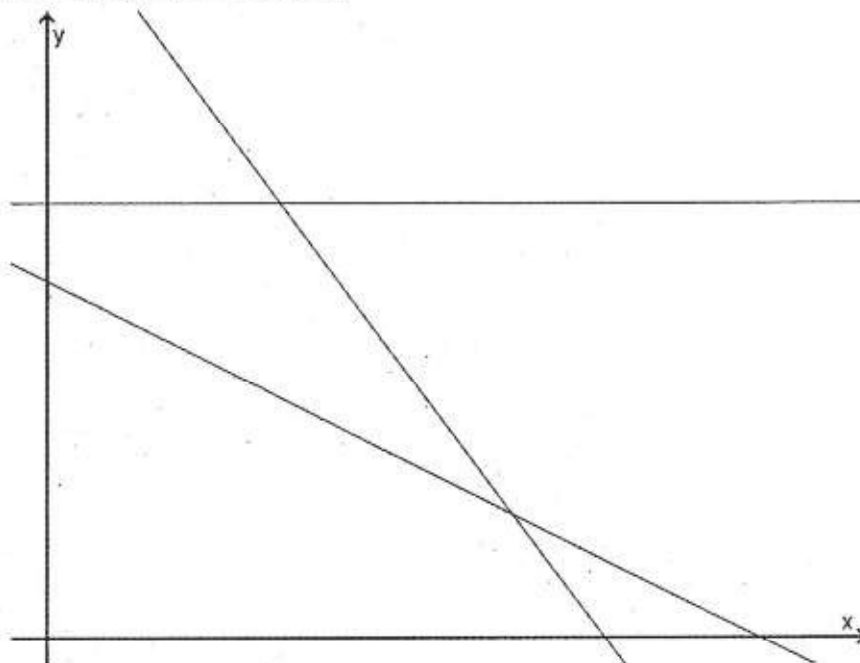
- a) Exprimer en inéquations toutes les contraintes présentées ci-dessus.

Nom élève..... Prénom :.....

---

b) Voici un début de représentation graphique pour les contraintes.

- ✓ Grader les axes à l'endroit des 4 intersections visibles qu'ils forment avec les droites.
- ✓ Colorier le polygone de solution.



c) Déterminer la production à effectuer de manière à maximiser le bénéfice.