Lycée Denis-de-Rougemont
Neuchâtel et Fleurier

EXAMEN DE MATURITÉ
Mathématiques de niveau 1

SESSION 2015
CORRIGÉ

Problème 1

On a $y = f(x) = \frac{5x}{x^2+4}$

a) On cherche les intersections du graphe de f et de la droite $y=1$. On doit avoir $\frac{5x}{x^2+4} = 1 \Rightarrow 5x = x^2+4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-5$ et $c=4$. On a alors $\Delta = b^2-4ac = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 25-16 = 9$ et $\sqrt{\Delta} = 3$. Les solutions sont ainsi
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+3}{2} = 4$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-3}{2} = 1$.
Les abscisses des points sont donc $x_1 = 4$ et $x_2 = 1$.

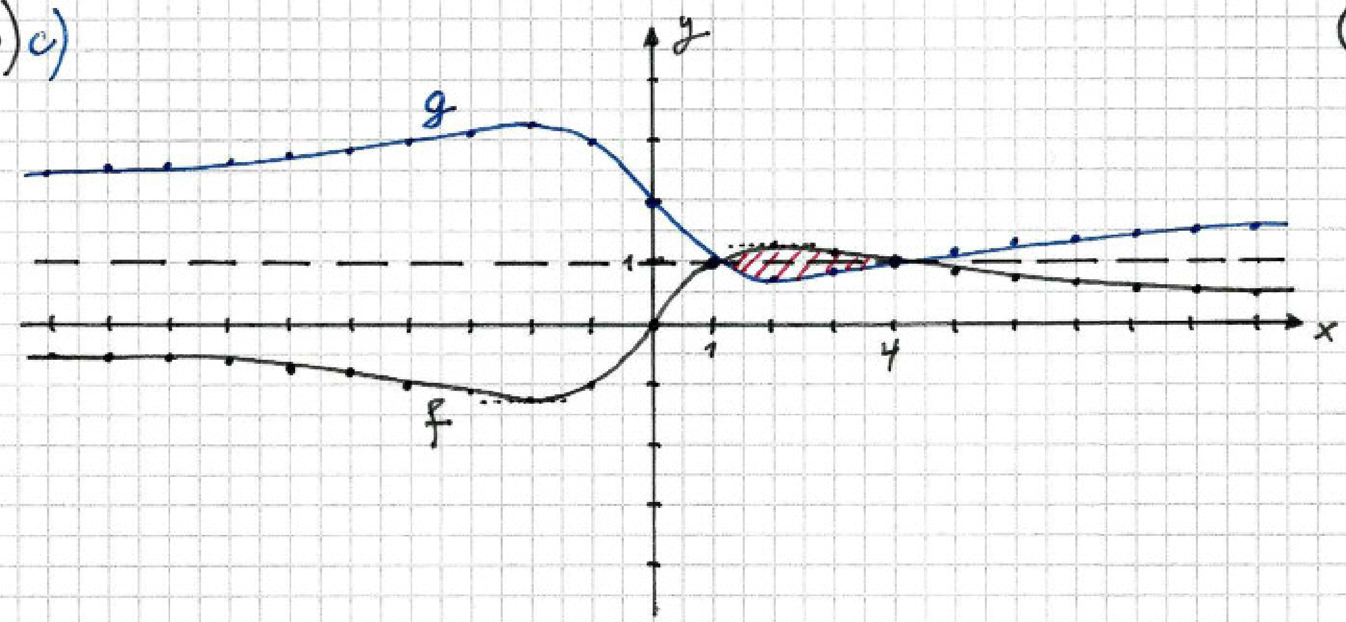
b) Domaine de définition: comme $x^2+4 > x^2 \geq 0$, on a $D = \mathbb{R}$.
Parité: on a $f(-x) = \frac{5\cdot(-x)}{(-x)^2+4} = \frac{-5x}{x^2+4} = -\frac{5x}{x^2+4} = -f(x) \Rightarrow f$ est impaire.
Intersections avec l'axe x: $y=0 \Rightarrow \frac{5x}{x^2+4} = 0 \Rightarrow 5x = 0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0;0)$.
Intersection avec l'axe y: $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (0;0)$.
Asymptotes verticales: aucune car pas d'exclu.
Asymptote non verticale: le quotient de $5x$ par x^2+4 étant 0, on en déduit que $y=0$ est asymptote horizontale.
Dérivée: on a $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = 5x$ et $v = x^2+4 \Rightarrow u' = 5$ et $v' = 2x$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{5(x^2+4)-5x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{5x^2+20-10x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{-5x^2+20}{(x^2+4)^2}.$$

Point à tangente horizontale: $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-5x^2+20}{(x^2+4)^2} = 0 \Rightarrow -5x^2+20 = 0 \Rightarrow 5x^2 = 20$
$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$;
avec $x = 2$, $f(x) = \frac{5\cdot 2}{2^2+4} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$;
avec $x=-2$, $f(x) = f(-2) = -f(2) = -\frac{5}{4}$ (car f impaire);
les PTH sont donc $(2;\frac{5}{4})$ et $(-2;-\frac{5}{4})$.

Graphe:

b) c)



d) Les points à tangente horizontale au graphe de f sont $(2; \frac{5}{4})$ et $(-2; -\frac{5}{4})$.

Comme $g(2)$ est le symétrique de $f(2) = \frac{5}{4}$ par rapport à l'axe $y = 1$, on a $g(2) = 1 - (\frac{5}{4} - 1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Comme $g(-2)$ est le symétrique de $f(-2) = -\frac{5}{4}$ par rapport à l'axe $y = 1$, on a $g(-2) = 1 - (-\frac{5}{4} - 1) = 1 - (-\frac{9}{4}) = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$.

Ainsi, les points à tangente horizontale au graphe de g sont $(2; \frac{3}{4})$ et $(-2; \frac{13}{4})$.

e) Pour que $F(x) = k \cdot \ln(x^2+4)$ soit une primitive de $f(x) = \frac{5x}{x^2+4}$, il faut que $F'(x) = f(x)$.

On a $F'(x) = k \cdot \frac{1}{x^2+4} \cdot 2x = \frac{2kx}{x^2+4}$. Il faut donc que $2k = 5$, d'où $k = \frac{5}{2}$.

f) On doit calculer l'aire de la surface hachurée en rouge sur le dessin ci-dessus.

D'après e), on sait qu'une primitive de $f(x)$ est $F(x) = \frac{5}{2} \ln(x^2+4)$.

L'aire hachurée en rouge est le double de l'aire entre le graphe de f et la droite $y = 1$, qui se coupent en $x_1 = 4$ et $x_2 = 1$ (voir a)).

Ainsi l'aire hachurée en rouge vaut $2 \cdot \int (f(x) - 1)\,dx = 2\left[F(x) - x\right]_1^4 =$

$= 2\left[\frac{5}{2}\ln(4^2+4) - 4 - \left(\frac{5}{2}\ln(1^2+4) - 1\right)\right] = 2\left[\frac{5}{2}\ln(20) - 4 - \frac{5}{2}\ln(5) + 1\right]$

$= 5\ln(20) - 5\ln(5) - 6 = 5\ln(4 \cdot 5) - 5\ln(5) - 6 = 5\left(\ln(4) + \ln(5)\right) - 5\ln(5) - 6$

$= 5\ln(4) + 5\ln(5) - 5\ln(5) - 6 = 5\ln(4) - 6 \cong 0{,}931.$

g) Une primitive de f' est f. De plus $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ (voir b)).

Ainsi l'aire grise vaut $\int_{-2}^{2} f'(x)\,dx = \left[f(x)\right]_{-2}^{2} = f(2) - f(-2) = \frac{10}{8} - \left(-\frac{10}{8}\right) =$

$= \frac{10}{8} + \frac{10}{8} = \frac{5}{2}.$

Problème 2

a) La droite a passe par $A(2;3;3)$ et a pour vecteur directeur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Des équations paramétriques de a sont donc $\begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 3-2\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$.

Ses traces sont:

dans le sol: $z=0 \Rightarrow 3-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=3 \Rightarrow x=2+2\cdot3=8$ et $y=3-2\cdot3=-3$
$\Rightarrow S_a(8;-3;0)$;

dans le mur: $x=0 \Rightarrow 2+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow y=3+2=5$ et $z=3+1=4$
$\Rightarrow M_a(0;5;4)$;

dans la paroi: $y=0 \Rightarrow 3-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\frac{3}{2} \Rightarrow x=2+3=5$ et $z=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$
$\Rightarrow P_a\left(5;0;\frac{3}{2}\right)$.

Comme P_a et M_a sont visibles, le segment P_aM_a est visible et le reste est invisible.
On peut alors dessiner la droite a (voir page suivante).

La droite b passe par $B(4;2;0)$ et est parallèle à a. Elle a donc aussi comme vecteur directeur le vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Des équations paramétriques de b sont donc $\begin{cases} x = 4+2\mu \\ y = 2-2\mu \\ z = -\mu \end{cases}$.

Ses traces sont:

dans le sol: Comme B appartient au sol, on a $S_b = B = (4;2;0)$;

dans le mur: $x=0 \Rightarrow 4+2\mu=0 \Rightarrow \mu=-2 \Rightarrow y=6$ et $z=2 \Rightarrow M_b(0;6;2)$;

dans la paroi: $y=0 \Rightarrow 2-2\mu=0 \Rightarrow \mu=1 \Rightarrow x=6$ et $z=-1 \Rightarrow P_b(6;0;-1)$.

Comme S_b et M_b sont visibles, le segment S_bM_b est visible et le reste est invisible.
On peut alors dessiner la droite b (voir page suivante)

Dessinons ensuite les traces du plan π:

trace dans le sol: elle doit contenir S_a et S_b;

trace dans le mur: elle doit contenir M_a et M_b;

trace dans la paroi: elle doit contenir P_a et P_b.

Il est alors facile de dessiner les traces de π (voir page suivante)

LYCÉE DENIS-DE-ROUGEMONT

Neuchâtel et Fleurier

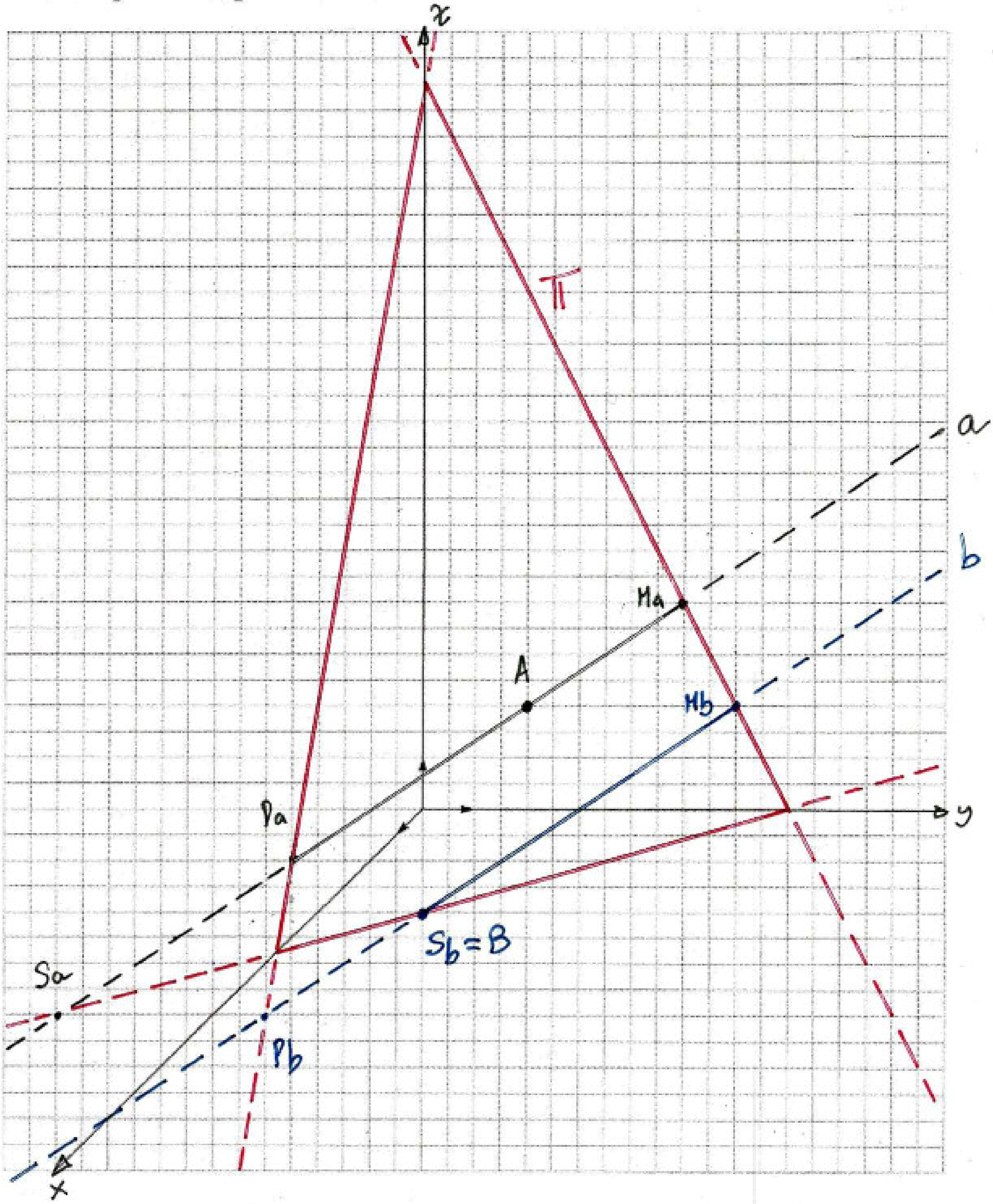
EXAMEN DE MATURITÉ

Mathématiques de niveau 1

Session 2015

Nom et prénom : **Classe :**

Annexe pour le problème 2



b) On commence par déterminer l'angle entre la droite a et un vecteur perpendiculaire au mur, autrement dit entre les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

On a $\vec{a}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 2\cdot1+(-2)\cdot0+1\cdot0 = 2$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}$
$= \sqrt{9} = 3$ et $\|\vec{n}\| = 1$.

Ainsi $\sphericalangle(\vec{a};\vec{n}) = \cos^{-1}\left(\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{n}\|}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) \cong 48{,}19°$.

Par conséquent, l'angle entre a et le mur est $90° - 48{,}19° = 41{,}81°$.

c) Dans le plan Π, on connaît $A(2;3;3)$, $B(4;2;0)$ et $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

Un vecteur normal à Π sera alors, par exemple $\overrightarrow{AB}\wedge\vec{a}$.

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

Un vecteur normal à Π est alors $\overrightarrow{AB}\wedge\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix}(-1)\cdot(-1)-(-3)\cdot(-2)\\-3\cdot2-2\cdot(-1)\\2\cdot(-2)-(-1)\cdot2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-6\\-6+2\\-4+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-4\\-2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$.

Un vecteur normal à Π' sera perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$. Il sera donc parallèle à $\vec{a}\wedge\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\cdot2-(-1)\cdot4\\-1\cdot5-2\cdot2\\2\cdot4-(-2)\cdot5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4+4\\-5-4\\8+10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-9\\18\end{pmatrix}$
qui est parallèle à $\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$.

L'équation cartésienne de Π' s'écrit donc $y - 2z + d = 0$.
Avec, par exemple, $A(2;3;3)$, on obtient $3 - 6 + d = 0 \Rightarrow d = 3$.
L'équation cartésienne de Π' est donc $y - 2z + 3 = 0$.

d) Comme a et b sont parallèles, la plus courte distance entre a et b est la distance de A à b ou celle de B à a.

Elle vaut alors $\dfrac{\|\vec{a}\wedge\overrightarrow{AB}\|}{\|\vec{a}\|}$.

On a $\|\vec{a}\wedge\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{a}\| = \left\|\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{25+16+4} = \sqrt{45}$ (voir c))
et $\|\vec{a}\| = 3$ (voir b)).

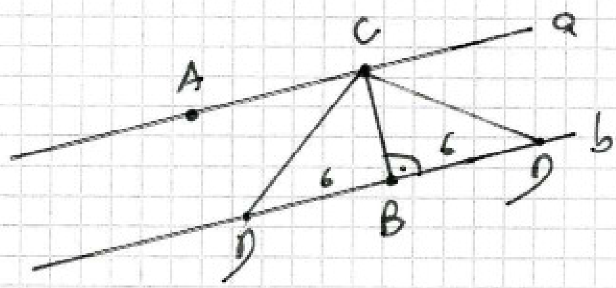
Ainsi, la plus courte distance entre a et b est $\dfrac{\sqrt{45}}{3} = \dfrac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5} \cong 2{,}24$.

e) La distance entre le centre de la sphère (B) et a est $\sqrt{5}$ (voir d)).
Comme $\sqrt{5} < \sqrt{14} = R$, on en déduit que a coupe la sphère en 2 points.

f) On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ (voir c)) et $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} = R$.
Ainsi A est forcément sur la sphère.
La tangente t est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$ ("rayon" du cercle).
Elle est aussi perpendiculaire à a et, donc, à $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$.
Ainsi, la tangente t est parallèle à $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-4\\-2\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$
(voir c)).
Des équations paramétriques de t sont donc $\begin{cases} x = 2 + 5\nu \\ y = 3 + 4\nu \\ z = 3 + 2\nu \end{cases}$.

g) Si la sphère a un rayon 3 et est tangente au sol, cela signifie que la cote du centre de la sphère est $z = \pm 3$.
Des équations paramétriques de b sont (voir a)): $\begin{cases} x = 4+2\mu \\ y = 2-2\mu \\ z = -\mu \end{cases}$.
Avec $z=3$, on a $\mu = -3$ et $x = 4-6 = -2$ et $y = 2+6 = 8$.
Avec $z=-3$, on a $\mu = 3$ et $x = 4+6 = 10$ et $y = 2-6 = -4$.
Les centres des cercles cherchés sont donc $(-2;8;3)$ et $(10;-4;-3)$.

h) On a schématiquement la situation suivante:



On a 1 possibilité pour C et 2 pour D.
Cherchons l'équation du plan perpendiculaire à b passant par B.
Un vecteur directeur de b est $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$.
L'équation du plan est donc $2x - 2y - z + d = 0$.
Avec $B(4;2;0)$, on a $2\cdot 4 - 2\cdot 2 + d = 0 \Rightarrow d = 4-8 = -4$.
Ainsi l'équation du plan perpendiculaire est $2x - 2y - z - 4 = 0$.
C est l'intersection de ce plan avec a.
Des équations paramétriques de a sont (voir a)): $\begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 3-2\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$
Par substitution dans le plan, on a $2(2+2\lambda) - 2(3-2\lambda) - (3-\lambda) - 4 = 0$
$\Rightarrow 4+4\lambda - 6 + 4\lambda - 3 + \lambda - 4 = 0 \Rightarrow 9\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$
$\Rightarrow x = 2+2 = 4$, $y = 3-2 = 1$ et $z = 3-1 = 2$.
Les coordonnées de C sont donc $(4;1;2)$.

L'équation de la sphère centrée en B et de rayon 6 est $(x-4)^2+(y-2)^2+z^2=6^2$.
Les D possibles sont les intersection de δ avec cette sphère.
Des équations paramétriques de δ sont (voir a)) : $\begin{cases} x = 4+2\mu \\ y = 2-2\mu \\ z = -\mu \end{cases}$.

Par substitution dans la sphère, on a :

$$(4+2\mu-4)^2+(2-2\mu-2)^2+(-\mu)^2=36$$

$$\Rightarrow (2\mu)^2+(-2\mu)^2+(-\mu)^2=36 \Rightarrow 4\mu^2+4\mu^2+\mu^2=36 \Rightarrow 9\mu^2=36$$

$$\Rightarrow \mu^2=4 \Rightarrow \mu=\pm 2.$$

Avec $\mu=2$, on a $x=4+4=8$, $y=2-4=-2$ et $z=-2$.
Avec $\mu=-2$, on a $x=4-4=0$, $y=2+4=6$ et $z=2$.
Les possibilités pour D sont donc $(8;-2;-2)$ et $(0;6;2)$.

Problème 3

Première partie:

La probabilité de répondre juste est $\frac{3}{5}$ et, donc, celle de répondre faux est $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

a) On doit avoir FFCCCC.

Ainsi la probabilité est $\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{324}{15625}\cong 2{,}07\,\%$.

b) prob (au moins 5 réponses correctes) = prob (6 réponses correctes) + prob (5 correctes) =

$=\left(\frac{3}{5}\right)^6+\underbrace{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^5=\frac{729}{3125}\cong 23{,}33\,\%$.

la réponse fausse peut être à chacune des 6 questions

c) C'est une probabilité conditionnelle: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

On a A = pas fait d'erreur, B = au moins 5 réponses correctes sur 6.

Ainsi $A\cap B$ = 6 réponses correctes sur 6, $p(A\cap B)=\left(\frac{3}{5}\right)^6$.

De plus $p(B)=\frac{729}{3125}$ (voir b)).

Par conséquent $P(A\cap B)=\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^6}{\frac{729}{3125}}=\frac{\cancel{729}^{1}}{\cancel{15625}_{5}}\cdot\frac{\cancel{3125}^{1}}{\cancel{729}_{1}}=\frac{1}{5}=20\,\%$.

d) prob (au moins 1 erreur) > 96 % $\Longrightarrow$ 1 − p (zéro erreur) > 0,96

$\Longrightarrow$ p (zéro erreur) < 0,04 $\Longrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^n<0{,}04$

$\Longrightarrow n>\frac{\log(0{,}04)}{\log(3/5)}=6{,}3 \Longrightarrow$ 7 questions au minimum.

e) 1) On doit avoir CCCF $\Longrightarrow$ prob $=\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot\frac{2}{5}=\frac{54}{625}=8{,}64\,\%$

2) prob (à plus de 4 questions) = 1 − prob (à 4 questions au moins) =

= 1 − prob (F) − prob (CF) − prob (CCF) − prob (CCCF) =

$=1-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}-\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{2}{5}-\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot\frac{2}{5}=\frac{81}{625}=12{,}96\,\%$.

Deuxième partie:

f) Pour Antoine: $p(CF \text{ ou } FC)=p(CF)+p(FC)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{25}+\frac{6}{25}=\frac{12}{25}$.

Pour Zoé: $p(CF \text{ ou } FC)=p(CF)+p(FC)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

Ainsi: p (score 1 à 1) = p (Antoine 1 correct et Zoé 1 correct) =

= p (Antoine 1 correct) · p (Zoé 1 correct) $=\frac{12}{25}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{50}=18\,\%$.

g) p (match nul) = p (0 à 0) + p (1 à 1) + p (2 à 2) $=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{9}{50}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$

$=\frac{117}{400}=29{,}25\,\%$.