Examen cantonal de maturité professionnelle commerciale 2015

CORRIGE

---

(1)

Exercice 1

a. $\frac{4x+5}{5} - \frac{3x-3}{4} = 2$ | dénominateur commun : 20

$\frac{16x+20}{20} - \frac{15x-15}{20} = \frac{40}{20}$ | $\cdot 20$ (attention au "−" devant la fraction)

$16x+20-15x+15=40$ | calcul

$x+35=40$ | -35

$\underline{\underline{x=5}}$

b. $\sqrt{x-1}+4=x-3$ | -4

$\sqrt{x-1}=x-7$ | $(\ \ )^2$

$x-1=(x-7)^2$ | $(x-7)^2=(x-7)(x-7)=x^2-7x-7x+49$

$x-1=x^2-14x+49$ | $-x+1$

$0=x^2-15x+50$

$a=1,\ b=-15,\ c=50 \Longrightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{15\pm\sqrt{225-200}}{2}=\frac{15\pm5}{2}$ ⟨ $\frac{20}{2}=10$; $\frac{10}{2}=5$

Vérification : $x=10$: $\left.\begin{array}{l}\sqrt{x-1}+4=\sqrt{10-1}+4=3+4=7\\ x-3=10-3=7\end{array}\right\} = \Longrightarrow$ ok

$x=5$: $\left.\begin{array}{l}\sqrt{x-1}+4=\sqrt{5-1}+4=2+4=6\\ x-3=5-3=2\end{array}\right\} \neq \Longrightarrow$ KO

L'unique solution est $\underline{\underline{x=10}}$.

c. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=4 \Longrightarrow \frac{3x}{6}+\frac{2y}{6}=\frac{24}{6} \Longrightarrow 3x+2y=24$

$\Longrightarrow \begin{cases}3x+2y=24 & \xrightarrow{\cdot 2} 6x+4y=48\\ -2x+3y=-3 & \xrightarrow{\cdot 3} -6x+9y=-9\end{cases}$

$13y=39 \Longrightarrow \underline{\underline{y=3}}$

$3x+2y=24 \Longrightarrow 3x+2\cdot3=24 \Longrightarrow 3x=18 \Longrightarrow \underline{\underline{x=6.}}$

d. $(x-1)(9x+2)\le(3x-1)^2$ | distributivité et identité remarquable

$9x^2-7x-2\le 9x^2-6x+1$ | $-9x^2$

$-7x-2\le-6x+1$ | $+7x$ et -1

$-3\le x$ ou $\underline{\underline{x\ge-3}}$

Exercice 2

On a $P: y = x^2 - 3x - 1$

a. Avec $a = 1$, $b = -3$ et $c = -1$, le sommet $S(x_S ; y_S)$ de la parabole est donné par $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\cdot 1} = 1{,}5$ et $y_S = x_S^2 - 3x_S - 1 = 1{,}5^2 - 3\cdot 1{,}5 - 1 = -3{,}25$
$\Rightarrow \underline{S(1{,}5 ; -3{,}25)}$

b. Intersections avec l'axe x: on met $y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 : a = 1, b = -3, c = -1$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} = \begin{cases} \approx 3{,}3 \\ \approx -0{,}3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{(3{,}3 ; 0) \text{ et } (-0{,}3 ; 0)}}$.

Intersection avec l'axe y: on met $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \underline{(0 ; -1)}$.

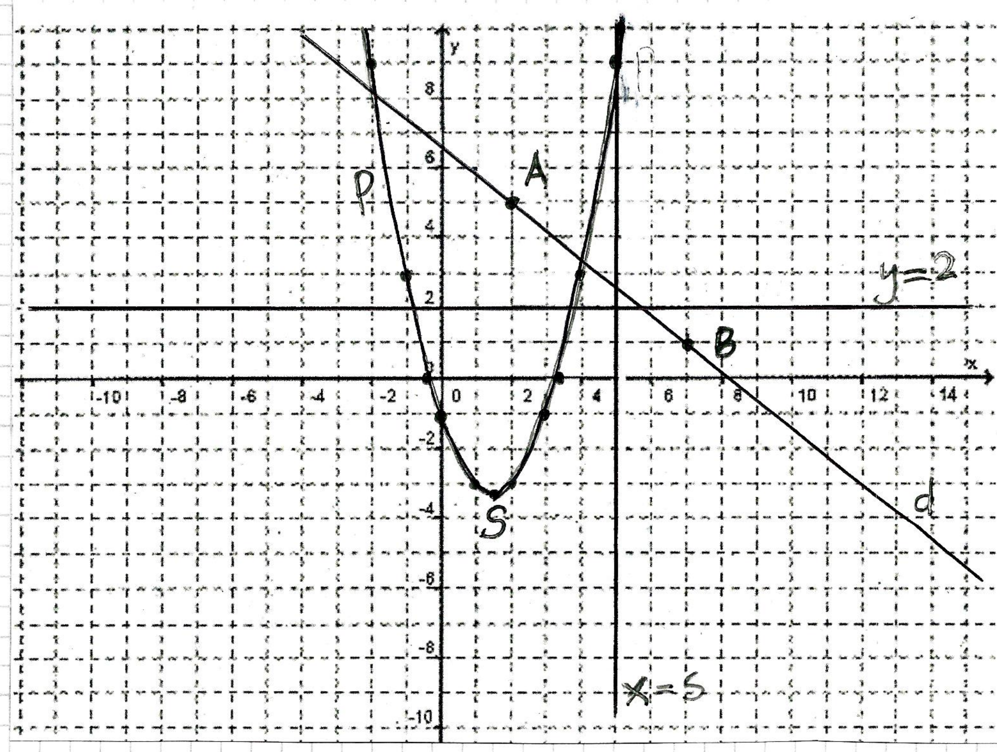
c. On a $d: y = mx + h$, où $m = \text{pente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-5}{7-2} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$.

Ainsi, on a $d: y = -\frac{4}{5}x + h$.

Avec $A(2 ; 5)$, en mettant $x = 2$ et $y = 5$ dans $y = -\frac{4}{5}x + h$, on a:
$5 = -\frac{4}{5}\cdot 2 + h \Rightarrow 5 = -\frac{8}{5} + h \Rightarrow h = 5 + \frac{8}{5} = \frac{33}{5}$.

Ainsi, on trouve $d: \underline{\underline{y = -\frac{4}{5}x + \frac{33}{5}}}$ (ou $y = -0{,}8x + 6{,}6$).

d)
e)



$y = x^2 - 3x - 1$

x	y
2	4-6-1=-3
3	9-9-1=-1
4	16-12-1=3
5	25-15-1=9
1	1-3-1=-3
-1	1+3-1=3
-2	4+6-1=9

f. Les intersections de $P : y = x^2 - 3x - 1$ et la droite $y = 2$ sont les solutions du système $\begin{cases} y = x^2 - 3x - 1 \\ y = 2. \end{cases}$

On a donc $2 = x^2 - 3x - 1 \Longrightarrow x^2 - 3x - 3 = 0$.

On a $a = 1$, $b = -3$ et $c = -3$ et, donc, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9+12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$

$$= \begin{cases} + & \approx 3{,}8 \\ - & -0{,}8 \end{cases}$$

Comme on a toujours $y = 2$, les points d'intersection sont $(3{,}8 ; 2)$ et $(-0{,}8 ; 2)$.

g. L'intersection de $d : y = -\frac{4}{5}x + \frac{33}{5}$ et la droite $x = 5$ est la solution du système $\begin{cases} y = -\frac{4}{5}x + \frac{33}{5} \\ x = 5 \end{cases}$

On a donc $y = -\frac{4}{5} \cdot 5 + \frac{33}{5} = -\frac{20}{5} + \frac{33}{5} = \frac{13}{5} \Longrightarrow \left(5 ; \frac{13}{5}\right)$.

Exercice 3

On peut faire le tableau suivant :

Nb de billets	prix d'un billet	recettes totales
300	7	$300 \cdot 7$
$300 + 10$	$7 - 0{,}1$	
$300 + 10 \cdot 2$	$7 - 0{,}1 \cdot 2$	
$300 + 10 \cdot x$	$7 - 0{,}1 \cdot x$	$(300 + 10 \cdot x) \cdot (7 - 0{,}1x)$

x baisse de 0,1 Frs

$= 2100 - 30x + 70x - x^2$

$= -x^2 + 40x + 2100$

Ainsi :

a. $7 - 0{,}1x$

b. $300 + 10x$

c. $-x^2 + 40x + 2100$

d. On a $a = -1$, $b = 40$ et $c = 2100 \Longrightarrow x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{2 \cdot (-1)} = 20$

$\Longrightarrow y_S = -20^2 + 40 \cdot 20 + 2100 = 2500$

$\Longrightarrow$ la recette maximale pour une séance est de 2500 frs.

e. Remplir la salle, cela signifie vendre les 1000 billets.

On doit donc avoir $300 + 10x = 1000 \Longrightarrow 10x = 700 \Longrightarrow x = 70$

Avec $x=70$, le prix du billet est alors $7-0{,}1\cdot x = 7-0{,}1\cdot 70 = 7-7=0$.
Ainsi, pour remplir la salle, il faut que le billet soit gratuit !

Exercice 4

a. On va utiliser la formule $A_n = A_0(1-t)^n$, où :
A_0 = valeur de départ = inconnue
A_n = valeur après 8 ans = 5069 frs
$t = 20\% = 0{,}2$
$n = 8$ ans.
On obtient l'équation:

$$
\begin{aligned}
5069 &= A_0(1-0{,}2)^8 && \text{calculs}\\
5069 &= A_0\cdot 0{,}8^8 && \text{calculs}\\
5069 &= A_0\cdot 0{,}168 && :0{,}168\\
32'000.- &\cong A_0
\end{aligned}
$$

La valeur de départ du véhicule était de ~32'000.-.

b. On va utiliser la formule $C_n = C_0(1+t)^n$, où :
C_0 = capital de départ = 10'000'000.-
C_n = capital final = 10'000'000 − 500'000 = 9'500'000
$t = -0{,}5\% = -0{,}005$
n = nb d'années = ?
On obtient l'équation:

$$
\begin{aligned}
9'500'000 &= 10'000'000\,(1+(-0{,}005))^n && :10'000'000\\
0{,}95 &= 0{,}995^n\\
\Longrightarrow\quad n &= \frac{\log(0{,}95)}{\log(0{,}995)} \cong 10{,}233
\end{aligned}
$$

Donc, dans 11 ans (toujours arrondir au-dessus).

c. On utilise la formule $C_n = C_0(1+t)^n$ avec $C_0 = 2000$, $C_n = 5'036{,}35$ et $n=12$.
On obtient l'équation:

$$
\begin{aligned}
5036{,}35 &= 2000\,(1+t)^{12} && :2000\\
2{,}518 &= (1+t)^{12} && \sqrt[12]{}\\
1{,}08 &= 1+t && -1\\
0{,}08 &= t
\end{aligned}
$$

Le taux était donc de 8%.

Exercice 5

Partie A

a. $100\% - 30\% = \underline{70\%}$.

b. prob (pile et pile) = prob (pile) $\cdot$ prob (pile) $= 30\% \cdot 30\% = 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09 = \underline{\underline{9\%}}$.

c. prob (au moins 1 fois un pile en 3 lancers) =
$= 1 -$ prob (0 fois un pile en 3 lancers) =
$= 1 -$ prob (3 fois un face en 3 lancers) =
$= 1 - 70\% \cdot 70\% \cdot 70\% = 1 - 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}657 = \underline{\underline{65{,}7\%}}$.

Partie B

Si l'ordre était fixé (par exemple cuisinière – lave-vaisselle – poubelle), il y aurait $5 \cdot 4 \cdot 12 = 240$ possibilités.
Mais, comme on ne tient pas compte de l'ordre, la cuisinière peut être à 3 endroits, puis le lave-vaisselle à 2 et la poubelle à 1. On doit donc multiplier 240 par $3 \cdot 2 \cdot 1$ $(= 3!)$, d'où au total $\underline{\underline{1440 \text{ possibilités}}}$.

Partie C

Prob (gagner 500'000.–) $= \underline{\underline{0\%}}$ car il n'y a que 3 boules noires dans l'urne.

Prob (gagner 500.–) = prob (3 noires et 1 blanche) $= \dfrac{C(3;3) \cdot C(15;1)}{C(18;4)} =$
$= \dfrac{1 \cdot 15}{3060} \cong 0{,}0049 = \underline{\underline{0{,}49\%}}$.

Prob (gagner 50.–) = prob (2 noires et 2 blanches) $= \dfrac{C(3;2) \cdot C(15;2)}{C(18;4)} =$
$= \dfrac{3 \cdot 105}{3060} \cong 0{,}1029 = \underline{\underline{10{,}29\%}}$.

Prob (gagner 5.–) = prob (1 noire et 3 blanches) $= \dfrac{C(3;1) \cdot C(15;3)}{C(18;4)} =$
$= \dfrac{3 \cdot 455}{3060} = 0{,}4461 = \underline{\underline{44{,}61\%}}$.

Exercice 6

On fait un tableau :

	Nb de paquets	composants nutritifs A	B	C	D	Coûts
Miobil	x	$100x$	0	$100x$	$400x$	$10x$
Barrymiam	y	0	$100y$	$200y$	$300y$	$4y$
	$x \geqslant 0$ $y \geqslant 0$	$100x \geqslant 30$	$100y \geqslant 50$	$100x + 200y \geqslant 200$	$400x + 300y \geqslant 450$	$10x + 4y \to$ minimum

a. x = nb de paquets Miobil

y = nb de paquets Barrymiam

b. $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$

$100x \geqslant 30 \Rightarrow x \geqslant 0{,}3$

$100y \geqslant 50 \Rightarrow y \geqslant 0{,}5$

$100x + 200y \geqslant 200 \Rightarrow x + 2y \geqslant 2$

$400x + 300y \geqslant 450 \Rightarrow 4x + 3y \geqslant 4{,}5$

c. $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0 \Rightarrow$ on est dans le 1er quadrant

$x \geqslant 0{,}3 \Rightarrow$ on dessine la droite verticale $x = 0{,}3$ et on est à droite ($\geqslant 0$)

$y \geqslant 0{,}5 \Rightarrow$ on dessine la droite horizontale $y = 0{,}5$ et on est au-dessus ($\geqslant 0$)

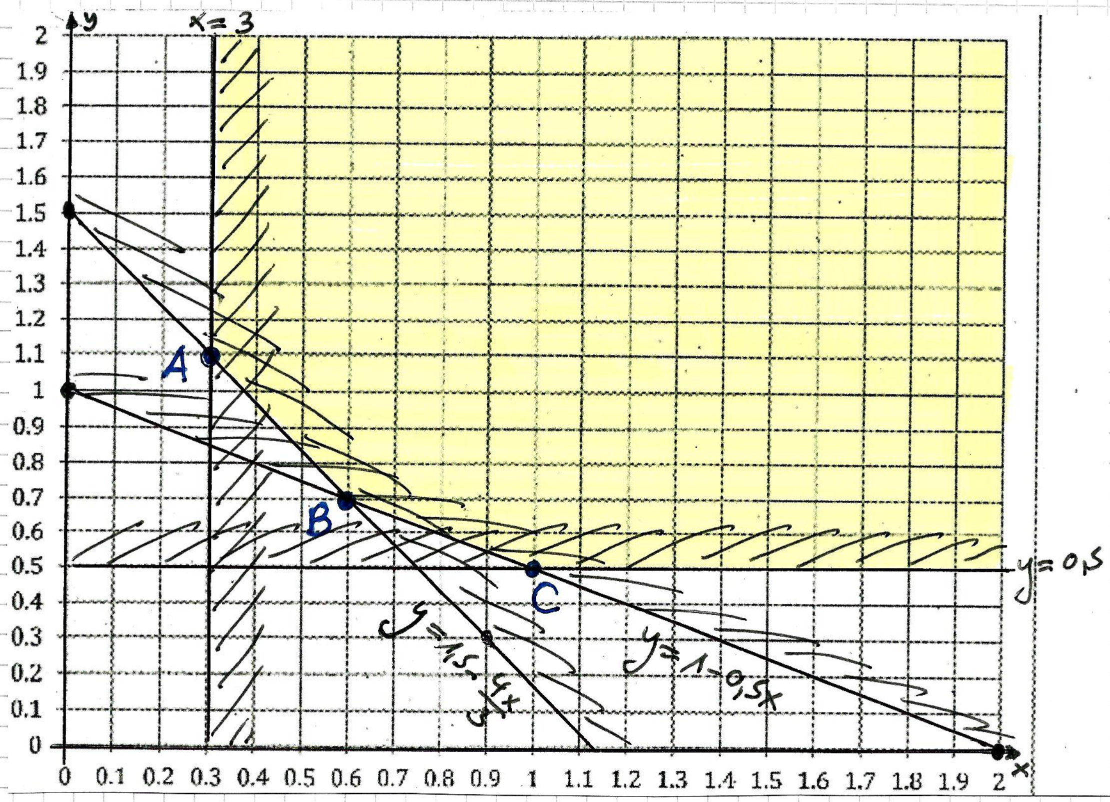
$x + 2y \geqslant 2 \Rightarrow 2y \geqslant 2 - x \Rightarrow y \geqslant 1 - 0{,}5x \Rightarrow$ on dessine la droite $y = 1 - 0{,}5x$ et on sera au-dessus :

x	$y = 1 - 0{,}5x$
0	1
2	0

$4x + 3y \geqslant 4{,}5 \Rightarrow 3y \geqslant 4{,}5 - 4x \Rightarrow y \geqslant 1{,}5 - \frac{4x}{3} \Rightarrow$ on dessine la droite $y = 1{,}5 - \frac{4x}{3}$ et on sera au-dessus :

x	$y = 1{,}5 - \frac{4x}{3}$
0	1,5
0,9	0,3

La zone trouvée est en jaune ci-dessous :



d. On doit déterminer les coordonnées des sommets A, B et C.

A: intersection de $x=0,3$ et $y=1,5-\frac{4x}{3}$ $\Longrightarrow$ $x=0,3$ et $y=1,5-\frac{4\cdot 0,3}{3}=1,1$

$\Longrightarrow$ A(0,3 ; 1,1)

B: intersection de $y=1,5-\frac{4x}{3}$ et $y=1-0,5x$ $\Longrightarrow$

$$\begin{array}{rcl|l} 1,5-\frac{4x}{3} &=& 1-0,5x & \cdot 3 \\ 4,5-4x &=& 3-1,5x & +4x \\ 4,5 &=& 3+2,5x & -3 \\ 1,5 &=& 2,5x & :2,5 \\ 0,6 &=& x & \end{array}$$

$\Longrightarrow$ $y=1-0,5x=1-0,5\cdot 0,6=1-0,3=0,7$ $\Longrightarrow$ B(0,6 ; 0,7)

C: intersection de $y=0,5$ et $y=1-0,5x$ $\Longrightarrow$ $y=0,5$ et

$$\begin{array}{rcl|l} 0,5 &=& 1-0,5x & -1 \\ -0,5 &=& -0,5x & :(-0,5) \\ 1 &=& x & \end{array}$$

$\Longrightarrow$ C(1 ; 0,5)

e. On doit calculer les coûts des alimentations pour les points A, B et C et voir où le coût est minimum. Le coût est donné par $10x+4y$.

A: $x=0,3$ et $y=1,1$ $\Longrightarrow$ $10x+4y=10\cdot 0,3+4\cdot 1,1=3+4,4=7,4$ $\longleftarrow$

B: $x=0,6$ et $y=0,7$ $\Longrightarrow$ $10x+4y=10\cdot 0,6+4\cdot 0,7=6+2,8=8,8$

C: $x=1$ et $y=0,5$ $\Longrightarrow$ $10x+4y=10\cdot 1+4\cdot 0,5=10+2=12$.

Par conséquent, le coût sera minimum avec 0,3 paquet de Miaôill et 1,1 paquet de Barrymîam par jour.