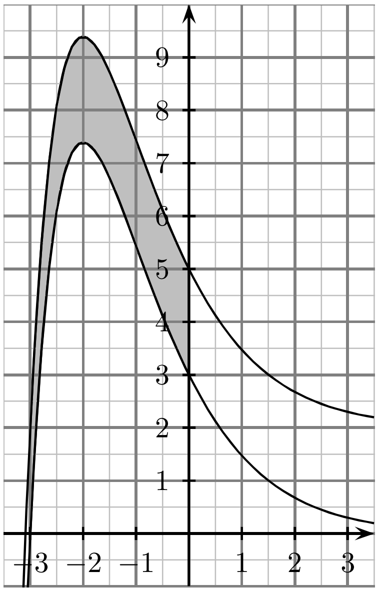
Problème 1



a) $f'(x) = ae^{-x} - (ax+3)e^{-x} = (-ax+a-3)e^{-x}$ s'annule uniquement lorsque $x = \frac{a-3}{a}$, ce qui vaut -2 lorsque $a-3=-2a$, $3a-3=0$, $a=1$.

b) $I_x(-3;0)$, $I_y(0;3)$, A.H. $y=0$ (lorsque $x\to\infty$) et p.t.h. en $H(-2;e^2)$ (on a $f'(x)=(-x-2)e^{-x}$).

c) $f(-3)=0$, $f'(-3)=e^3$
$t : y = 0 + e^3(x-(-3))$, $y = e^3x+3e^3$.

d) Avec une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (x+3)e^{-x}dx = -(x+3)e^{-x} + \int e^{-x}dx \\ &= -(x+3)e^{-x} - e^{-x} = -(x+4)e^{-x} \end{aligned}$$

donc $I(b) = F(b) - F(0) = -(b+4)e^{-b} + 4 \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} 4$

e) Aire $= \displaystyle\int_{-3}^{0} \big(g(x)-f(x)\big)dx = \int_{-3}^{0} 2dx = \Big[2x\Big]_{-3}^{0} = 0-(-6) = 6.$

f) Selon le dessin, on a $c \leqslant 2$ ou $c = 2+e^2$.

Problème 2 : au verso

Problème 3

a) $\mu = \dfrac{54+x}{10}$, ce qui vaut 7 lorsque $54+x=70$, donc $x=16$

b) $\dfrac{10!}{1!2!3!4!} = 12'600$

c) $\dfrac{4}{10}\cdot\dfrac{3}{9}\cdot\dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{1}{7}\cdot 4! = \dfrac{4}{35} \cong 0.114$

d) $\mathbb{P}(\langle 10+2\rangle, 6+6) = 2\cdot\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{2}{9} + \dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{2}{9} = \dfrac{2}{45}+\dfrac{3}{45} = \dfrac{5}{45} = \dfrac{1}{9}$

La probabilité conditionnelle cherchée est $\dfrac{3/45}{5/45} = \dfrac{3}{5}$.

e) $\mathbb{P}(10+10, 8+8, 6+6, 2+2) = \dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{10}\cdot\dfrac{2}{10} + \dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{3}{10} + \dfrac{4}{10}\cdot\dfrac{4}{10} = \dfrac{30}{100} = 0.3.$

f) $\mathbb{P}(\text{Lucien gagne}) = \mathbb{P}(\text{Albert gagne}) = \dfrac{1-0.3}{2} = 0.35.$

$\mathbb{P}(\text{Lucien gagne 3 parties sur 5}) = \dbinom{5}{3}(0.35)^3(0.65)^2 \cong 0.18115$

g) $\mathbb{P}(X \leqslant 20) = \mathbb{P}(Z \leqslant 0) = 0.5$

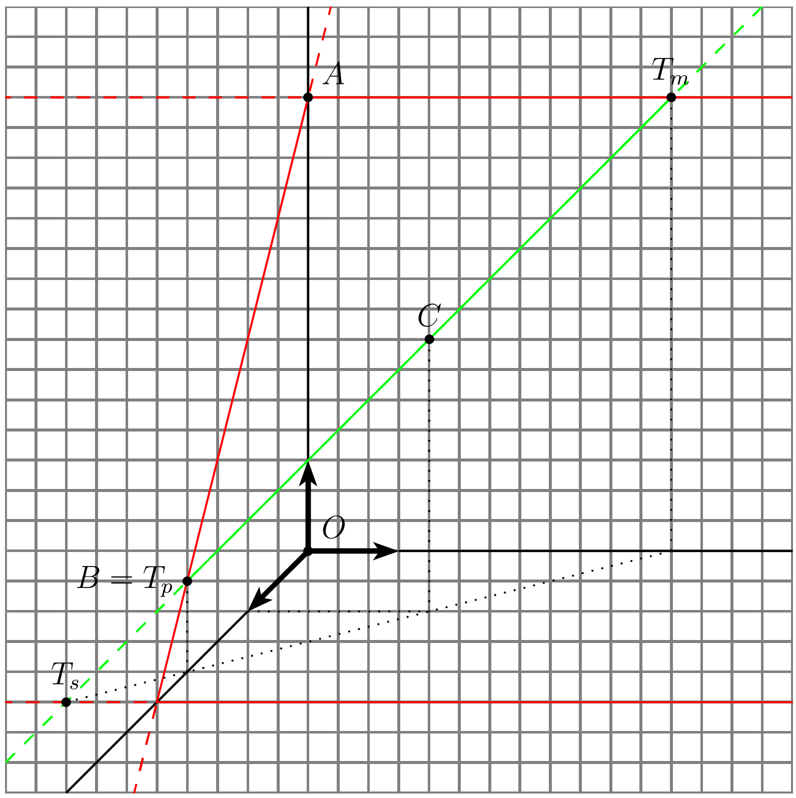
h) $\mathbb{P}(X \geqslant 21) = \mathbb{P}(Z \geqslant 0.5) = 1 - \mathbb{P}(Z \leqslant 0.5) \cong 1 - 0.6915 = 0.3085$

Problème 2

a) $d_2 : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = k\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ La droite d_2 est contenue dans le plan π.

b) $\| \overrightarrow{AC} \| = \| \overrightarrow{BC} \| = \sqrt{5 + k^2}$. Le triangle est donc isocèle en C.

c) $Aire = \dfrac{1}{2}\sqrt{20 \cdot k^2} = |k|\sqrt{5}$ vaut $2\sqrt{5}$ lorsque $k = \pm 2$

d) 

$T_m(0; 4; 5)$
$T_p(2; 0; 1)$
$T_s(2.5; -1; 0)$

e) $\alpha = \sphericalangle_a \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{|-10|}{3\sqrt{20}} \right) \cong 41.81°$

f) La sphère est centrée au point $M(1; 0; 3)$, milieu du segment AB. Son équation est $(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5$, le membre de droite étant le calibrage pour avoir $A \in \mathcal{S}$.

g) On cherche $\pi_{1,2} : x - 2y - 2z + d = 0$ avec $\text{dist}(C, \pi_{1,2}) = 3$, $\dfrac{|d-9|}{3} = 3$, $|d-9| = 9$, $d - 9 = \pm 9$ donc $d = 9 \pm 9 \in \{0; 18\}$. Au final, on a les équations $\pi_1 : x - 2y - 2z = 0$ et $\pi_2 : x - 2y - 2z + 18 = 0$.

h) La droite t passe par $A(0; 0; 5)$ et un vecteur directeur est donné par $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} /\!/ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

donc $t : \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$