Mathématiques niveau I

Problème 1 (poids 4)

On considère la fonction f définie par $f(x) = (ax+3)e^{-x}$, où a est un nombre réel.

a) Montrer que, pour tout nombre $a \neq 0$, le graphe de f possède un seul point à tangente horizontale et déterminer la valeur de a pour laquelle l'abscisse de ce point vaut -2.

Pour la suite du problème, on pose $a = 1$, donc $f(x) = (x+3)e^{-x}$.

b) Déterminer les points d'intersection du graphe de f avec les axes, l'équation de l'asymptote et le point à tangente horizontale du graphe de f. Dessiner le graphe de f en prenant deux carreaux comme unité.

c) Déterminer l'équation de la tangente t au graphe de f au point où ce graphe coupe l'axe des x. Donner la solution avec des valeurs exactes.

d) Déterminer $I(b) = \int_0^b f(x)dx$ avec $b > 0$ et calculer la limite de $I(b)$ lorsque $b \to \infty$.

On considère la fonction g définie par $g(x) = (x+3)e^{-x} + 2$.

e) Dans le même repère que le graphe de f, dessiner le graphe de g et hachurer la surface fermée délimitée par les deux graphes, l'axe des y et la droite verticale $x = -3$. Calculer l'aire de cette surface.

f) Déterminer les valeurs de c pour lesquelles la droite horizontale $y = c$ coupe le graphe de g en un seul point.

Problème 2 (poids 3)

On considère la droite d_1 passant par les points $A(0;0;5)$ et $B(2;0;1)$,
la droite d_2 passant par les points $B(2;0;1)$ et $C(1;k;3)$ avec $k \in \mathbb{R}$,
le plan $\pi : 2x + z - 5 = 0$.

a) Quelle est la position relative du plan π et de la droite d_2 ?

b) Montrer que, pour toutes les valeurs de k, le triangle ABC est isocèle.

c) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'aire du triangle ABC vaut $2\sqrt{5}$.

Pour la suite du problème, on pose $k = 2$, donc d_2 passe par $B(2;0;1)$ et $C(1;2;3)$.

d) Sur la feuille annexée, dessiner la droite d_2 en montrant clairement ses traces dans le mur, la paroi et le sol. Dessiner également les traces du plan π.

e) Calculer l'angle aigu entre les droites d_1 et d_2.

f) Déterminer l'équation de la plus petite sphère contenant les points A et B.

On considère également la sphère $\mathcal{S}$ de centre $C(1;2;3)$ et de rayon $r = 3$.

g) Déterminer les équations des plans π_1 et π_2 perpendiculaires à d_2 et tangents à $\mathcal{S}$.

h) Vérifier que le point A appartient à $\mathcal{S}$ puis déterminer des équations paramétriques de la droite t tangente à $\mathcal{S}$ en A et perpendiculaire à la droite d_1.

Problème 3 (poids 3)

Le tableau suivant présente les différentes cartes d'un jeu de dix cartes colorées.

	valeur d'une carte
1 carte bleue	x points, $x > 8$
4 cartes rouges	8 points
3 cartes vertes	6 points
2 cartes jaunes	2 points

a) Déterminer, en fonction de x, la moyenne des points des cartes du jeu puis calculer la valeur de x afin que cette moyenne soit égale à la médiane des points.

b) Lucien aligne les dix cartes devant lui. Combien de dispositions différentes y-a-t-il ?

c) Lucien tire successivement quatre cartes au hasard, sans remise. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré quatre cartes de couleurs différentes ?

Pour la suite du problème, on considère que le nombre de points x vaut 10.

d) Albert tire deux cartes sans remise et obtient 12 points. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré deux cartes vertes ?

Albert tire une carte, note le nombre de points et remet la carte dans le paquet. Puis Lucien fait la même chose. Le gagnant du jeu est celui qui a obtenu le plus de points.

e) Montrer que, lors d'un jeu, la probabilité d'avoir un match nul vaut $p = 0.3$.

f) Albert et Lucien font cinq jeux. Quelle est la probabilité que Lucien gagne exactement trois parties ?

Fabrice a fabriqué les cartes de ce jeu. Il a remarqué que la masse d'une carte suit une loi normale de moyenne 20 grammes et d'écart-type 2 grammes.

g) Quelle est la probabilité que la masse d'une carte soit inférieure à la masse moyenne ?

h) Quelle est la probabilité que la masse d'une carte soit supérieure à 21 grammes ?

Annexe pour le problème 2

Nom et prénom : ....   Classe : ....