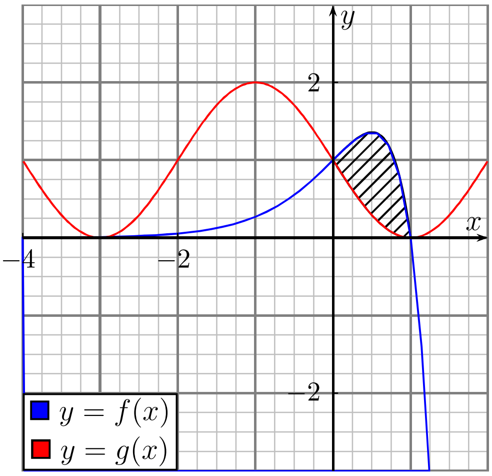
Problème 1

a) $f(x) = (1-x)e^{2x}$



$D = \mathbb{R}$, $\quad I_x(1;0)$, $I_y(0;1)$,

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = "-\infty \cdot \infty" = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = "\infty \cdot 0" = 0$ car exp gagne

donc A.H. $y = 0$ lorsque $x \to -\infty$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1-x)2e^{2x} - e^{2x} \\ &= e^{2x}(2-2x-1) \\ &= (1-2x)e^{2x} \end{aligned}$$

nul pour $x = 1/2$, donc p.t.h. en $S\left(\frac{1}{2}, \frac{e}{2}\right)$.

b) $g'(x) = -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)$, s'annule si $x = 1 + 2\cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$. Pour $k = -1$, on calcule $g(-1) = 2$ et on déduit les coordonnées du sommet $A(-1, 2)$.

c)
$$\begin{aligned} F(x) &= \int (1-x)\, e^{2x} dx = (1-x)\cdot\frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{2x} dx \\ &= \frac{e^{2x}}{2}\cdot(1-x) + \frac{e^{2x}}{4} + c = e^{2x}\cdot\left[\frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right] + c = e^{2x}\cdot\left[-\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\right] + c \\ G(x) &= \int \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)\right) dx = x + \frac{2}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right) + c \end{aligned}$$

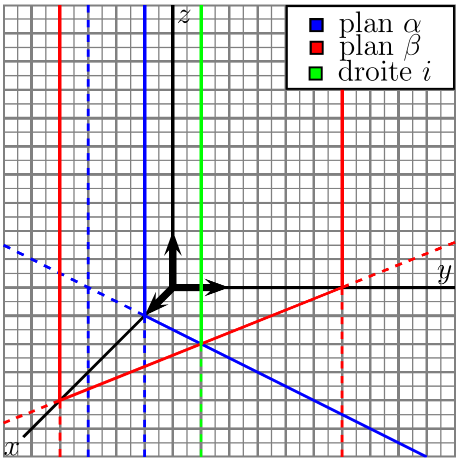
d) $$\Big[F(x) - G(x)\Big]_0^1 = \frac{e^2}{4} - 1 - \underbrace{\frac{2}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \frac{3}{4} + \frac{2}{\pi}\cdot\underbrace{\cos(0)}_{=1} = \frac{e^2-7}{4} + \frac{2}{\pi} \simeq 0.73$$

e) Nous cherchons les solutions de l'équation $h(x) = f(x)$. Nous avons

$$\begin{aligned} -xe^{2x} - ke^x - 1 &= (1-x)e^{2x} \\ -xe^{2x} - ke^x - 1 &= e^{2x} - xe^{2x} \\ e^{2x} + ke^x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

En posant $u = e^x$, l'équation devient $u^2 + ku + 1 = 0$. Cette équation admet une unique solution lorsque $\Delta = k^2 - 4 = 0$, c'est à dire lorsque $k = \pm 2$.
Les solutions de l'équation sont alors $u_1 = \frac{-k}{2} \overset{k=2}{=} -1$ et $u_2 = \frac{-k}{2} \overset{k=-2}{=} 1$.
Comme $u = e^x$, la valeur $x = \ln(u)$ est définie uniquement lorsque $u = u_2 = 1$. Ainsi, $k = -2$ et on trouve l'unique solution lorsque $x = \ln(1) = 0$. Comme $f(0) = 1$, le point recherché est alors le point $(0; 1)$.

Problème 2



a) voir dessin ci-contre.

b) $\alpha = \sphericalangle\left(\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{5\sqrt{13}}\right) \simeq 86.82°$

c) L'intersection des traces des plans α et β dans le sol se trouve en $I\left(2;\dfrac{3}{2};0\right)$. La droite i est parallèle à Oz, on obtient $i : \begin{cases} x = 2 \\ y = 3/2 \\ z = \lambda \end{cases}$.

d) $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = 8 - 4 - 4 = 0$, le triangle ABC est bien rectangle en B.

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow D(-3;2;3)$.

e) $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-4\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\12\\-12\end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$. Ainsi $\pi : x - 2y + 2z + d = 0$.

Comme $A(1;0;-1) \in \pi$, on a $1 - 2 + d = 0 \Rightarrow d = 1$. Finalement, on obtient $\pi : x - 2y + 2z + 1 = 0$.

f) Nommons M le centre de la sphère. On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\2\\3/2\end{pmatrix}$. De plus, le rayon r de la sphère cherchée vaut $r = \dfrac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{AC}\| = \dfrac{\sqrt{45}}{2}$. On déduit $\mathcal{S} : x^2 + (y-2)^2 + \left(z - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{45}{4}$.

g) $P' = \pi \cap d$, avec $d : \begin{cases} x = 9 - \lambda \\ y = -5 + 2\lambda \\ z = 8 - 2\lambda \end{cases}$ une droite passant par P et perpendiculaire à π. On obtient

$$\begin{aligned} (9-\lambda) - 2(-5+2\lambda) + 2(8-2\lambda) + 1 &= 0 \\ 9 - \lambda + 10 - 4\lambda + 16 - 4\lambda + 1 &= 0 \\ 36 &= 9\lambda \\ \lambda &= 4 \Rightarrow P'(5;3;0). \end{aligned}$$

Le symétrique P'' de P par rapport à π se calcule ainsi :

$$\overrightarrow{OP''} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix}1\\11\\-8\end{pmatrix} \Rightarrow P''(1;11;-8).$$

h) $V = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\| \cdot dist(P;\pi)}{3} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \frac{|9+10+16+1|}{3}}{3} = \dfrac{9 \cdot 12}{3} = 36.$

Problème 3

a) $\binom{6}{3} = 20$ possibilités.

b) $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20} = 5\%$

c) $\left(\frac{5}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{390'625}{60'466'176} \simeq 0.646\%$

d) $\binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 210 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{546'875}{10'077'696} \simeq 5.43\%$

e) On cherche l'entier n minimal de sorte que $1 - (5/6)^n > 0.9$, $(5/6)^n < 0.1$, $n \ln(5/6) < \ln(0.1)$, $n > \frac{\ln(0.1)}{\ln(5/6)} \simeq 12.63$, donc $n = 13$.

f) $n = 18'000$, $p = 1/6$, $\mu = n \cdot p = 3'000$ et $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 50$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(2950 \leq X \leq 3100) &= \phi\left(\frac{3100 + 0.5 - 3000}{50}\right) - \phi\left(\frac{2950 - 0.5 - 3000}{50}\right) \\
&= \phi(2.01) - \phi(-1.01) = \phi(2.01) + \phi(1.01) - 1 \\
&= 0.97778 + 0.84375 - 1 = 0.82153 \simeq 82.15\%
\end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > 102) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 102) = 1 - \phi\left(\frac{102 - 100}{1.6}\right) = 1 - \phi(1.25) \\
&= 0.10565 \simeq 10,57\%
\end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < 98.4) &= \phi\left(\frac{98.4 - 100}{1.6}\right) = \phi(-1) = 1 - \phi(1) = 0.15866 \\
\mathbb{P}(X < 98.4 | X < \mu) &= \frac{\mathbb{P}(X < 98.4)}{\mathbb{P}(X < \mu)} = 2 \cdot 0.15866 \simeq 31,73\%
\end{aligned}$$

i) On doit chercher x_0 afin que $\mathbb{P}(X < x_0) = 0.025$. On cherche d'abord x_0^* afin que $\mathbb{P}(X^* < x_0^*) = 0.025$. On obtient $x_0^* = \phi^{-1}(0.025) = -\phi^{-1}(0.975) = -1.96$
Ainsi, comme $x_0^* = (x_0 - \mu)/\sigma$, on obtient $x_0 = \sigma \cdot x_0^* + \mu \simeq 96.86$ grammes.