1

MATHÉMATIQUES

Nom, prénom : Corrigé

Classe :

Matériel distribué :

- Feuilles de brouillon : ATTENTION : les feuilles de brouillon ne sont pas corrigées

Matériel autorisé :

- Calculatrice autorisée, règle, équerre, compas, crayons et stylos,
- « Formulaires et tables » de CRM (sans annotation).

Consignes à respecter strictement :

- Durant l'examen, aucun matériel ne circule d'un étudiant à l'autre.
- Sauf indication contraire, toute réponse doit être justifiée.
- Les réponses numériques données en valeurs décimales doivent être arrondies au centième.
- Les solutions seront rédigées proprement au stylo ou à l'encre dans ce cahier. Toutefois les schémas ou croquis peuvent être réalisés au crayon.

Remarques :

- En cas de besoin, des pages supplémentaires se trouvent à la fin du cahier.
- Dans la correction de votre épreuve, il sera tenu compte de la clarté et de la rigueur de vos développements ainsi que de la qualité de votre présentation.

Exercice 1

Partie A

Soient les fonctions réelles f, g et h définies par :

$f: \quad D_f \longrightarrow Im_f$
$\quad x \mapsto y = 4 - x^2$

$g: \quad D_g \longrightarrow Im_g$
$\quad x \mapsto y = e^{4-x^2}$

$h: \quad D_h \longrightarrow Im_h$
$\quad x \mapsto y = \ln(4 - x^2)$

Compléter le tableau ci-dessus afin d'indiquer pour chacune des fonctions, son domaine de définition, ses intersections avec les axes, son ensemble-image et sa dérivée :

Fonction	$f(x) = 4 - x^2$	$g(x) = e^{4-x^2}$	$h(x) = \ln(4 - x^2)$
Domaine de définition	$D_f = \mathbb{R}$	$D_g = \mathbb{R}$	$D_h =]-2;2[$ ①
Intersection avec O_x *(écrire « aucune » s'il n'y en a pas)*	② $(-2;0)$ et $(2;0)$	③ aucune	④ $(-\sqrt{3};0)$ $(\sqrt{3};0)$
Intersection avec O_y *(écrire « aucune » s'il n'y en a pas)*	⑤ $(0;4)$	⑥ $(0;e^4) \cong (0;54{,}6)$	⑦ $(0;\ln(4)) \cong (0;1{,}39)$
Ensemble-Image	$Im_f =]-\infty;4]$ ⑧	$Im_g =]0;+\infty[$ ⑨	$Im_h =]-\infty;\ln(4)]$ ⑩
Dérivée	$f'(x) = -2x$	$g'(x) = -2xe^{4-x^2}$	$h'(x) = -\frac{2x}{4-x^2}$ ⑪

① On doit avoir $4-x^2>0 \Rightarrow x^2<4 \Rightarrow -2<x<2 \Rightarrow D_h =]-2;2[$

② $f(x)=0 \Rightarrow 4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

③ Comme $e^x>0$ pour tout x, il n'existe aucun x tel que $e^{4-x^2}=0$

④ $h(x)=0 \Rightarrow \ln(4-x^2)=0 \Rightarrow 4-x^2=e^0=1 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

⑤ $f(0)=4-0^2=4$ ⑥ $g(0)=e^{4-0^2}=e^4 \cong 54{,}6$ ⑦ $h(0)=\ln(4)\cong 1{,}39$

⑧ $f(x)$ est une parabole $\frown$ $\Rightarrow$ le point le plus haut est en $x=0$ et $f(0)=4$

⑨ $e^x>0$ avec $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0 \Rightarrow e^{4-x^2}>0$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{4-x^2}=0$

⑩ $\lim\limits_{x\to\pm 2}\ln(4-x^2) = \lim\limits_{x\to 0}\ln(4) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln(4-x^2)=\ln(4)$

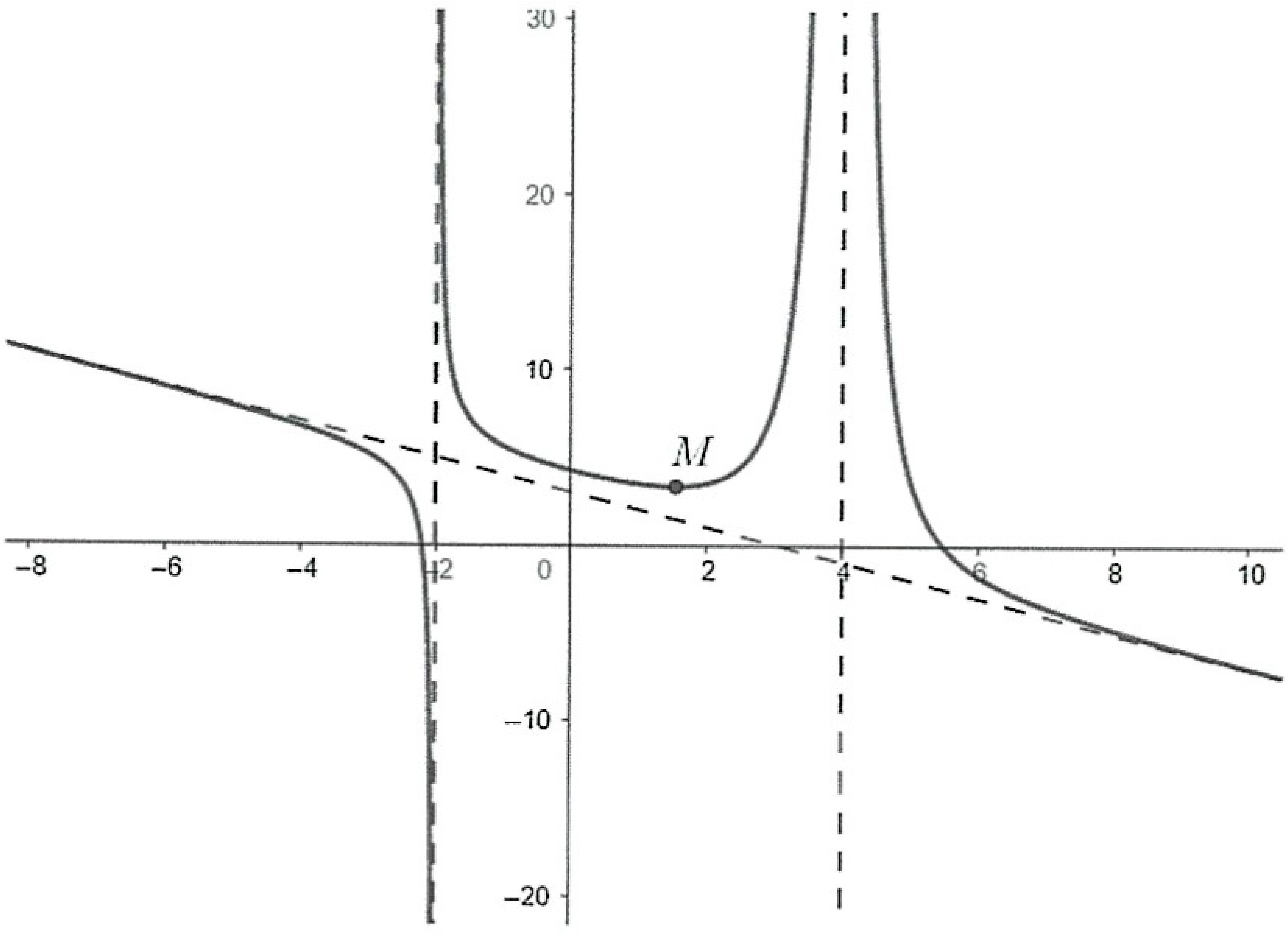
⑪ $h'(x) = \frac{1}{4-x^2}\cdot(4-x^2)' = \frac{1}{4-x^2}\cdot(-2x) = -\frac{2x}{4-x^2}$

3

Exercice 1

Partie B **Attention : Pour cette partie, aucune justification n'est demandée**

Soit une fonction f dont le graphe est représenté ci-dessous :



Les asymptotes du graphe de f sont d'équation :

- $x = -2$
- $x = 4$
- $y = -x + 3$

De plus $M\left(\frac{3}{2};\frac{10}{3}\right)$ est le seul point à tangente horizontale du graphe de f

1) En lisant le graphe, compléter :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -1$ (car la pente de l'A.O. $y=-x+3$ est -1)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -1$ (car la pente de l'A.O $y=-x+3$ est -1)

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f(x) = \frac{10}{3}$ (c'est le point M)

$\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} f'(x) = 0$ (puisque M est le point à tangente horizontale)

2) Dresser un tableau de croissance de la fonction f :

(*Ignorer d'éventuelles colonnes superflues*)

x		2		$\frac{3}{2}$		4			
f'	$-$		$-$	0	$+$		$-$		
f	↘		↘	min (M)	↗		↘		

3) Que peut-on dire (*valeur et signe*) de $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (-x+3))$?

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - \underbrace{(-x+3)}_{A.O}\right) = 0$ car $y = -x+3$ est l'asymptote oblique du graphe de f lorsque $x \to -\infty$

5

LYCEEJEANPIAGET NEUCHÂTEL

Exercice 1

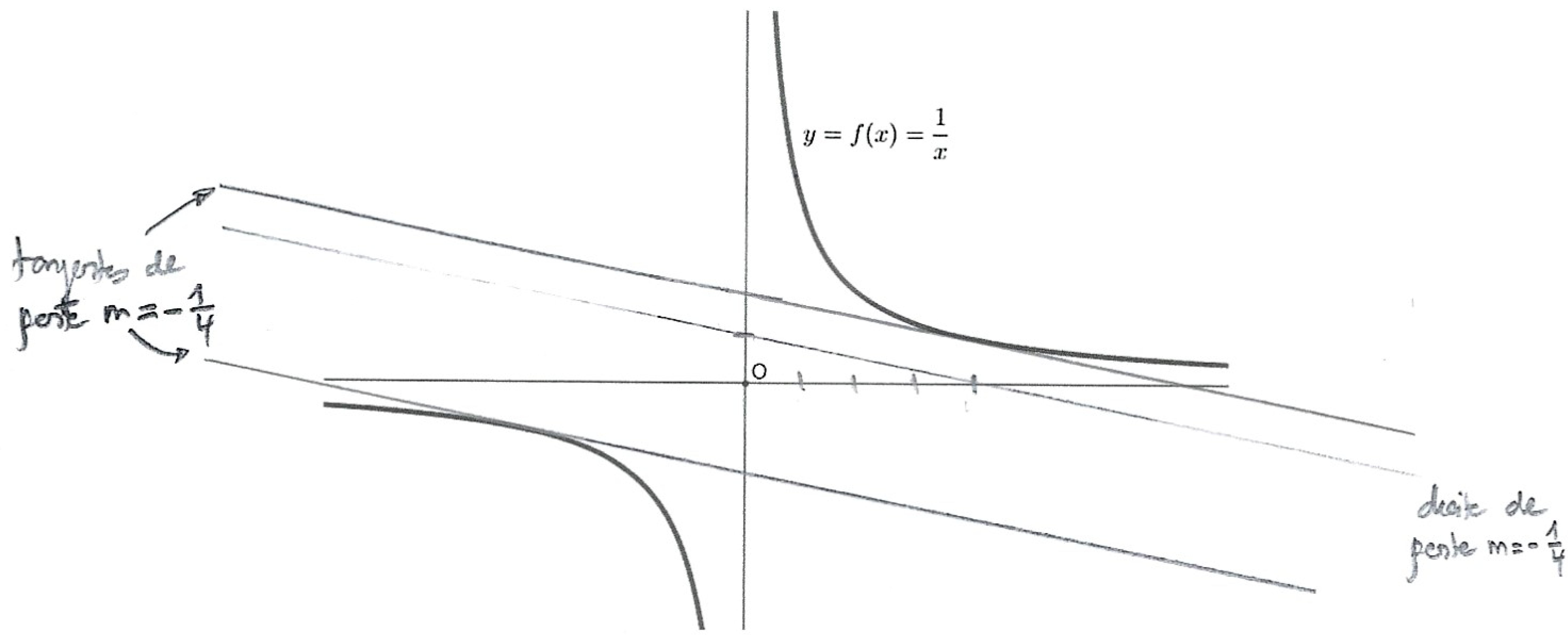
Partie C

Soit la fonction f définie par $y = f(x) = x^2 e^{1-x}$, résoudre l'équation $f'(x) = 0$

Voir feuilles annexes (page 6)

Partie D

Considérons la fonction f définie par $y = f(x) = \frac{1}{x}$ dont une esquisse du graphe est :



1) On considère la ou les tangente(s) au graphe de f dont la pente vaut $m = -\frac{1}{4}$.
   a) Sur le graphe ci-dessus, esquisser approximativement cette ou ces tangente(s).
   b) Calculer l'équation de cette ou de ces tangente(s). Voir feuilles annexes (page 6)

2) On considère une deuxième fonction g définie par $y = g(x) = ax + 3$ où a est un nombre réel
   Calculer les valeurs de a pour qu'il y ait deux points d'intersection entre les graphes de f et de g.

   Voir feuilles annexes (pages 6 et 7)

Ex 1 Partie C

$f(x) = x^2 e^{1-x} = u \cdot v$ avec $u = x^2$ et $v = e^{1-x}$

On a $u' = 2x$ et $v' = e^{1-x} \cdot \underbrace{(1-x)'}_{-1} = -e^{1-x}$.

Ainsi $f'(x) = u'v + uv' = 2xe^{1-x} + x^2 \cdot (-e^{1-x}) = 2xe^{1-x} - x^2 e^{1-x}$
$= (2-x) \cdot xe^{1-x}$.

On a alors $f'(x) = 0 \implies (2-x) \cdot xe^{1-x} = 0$.
Comme $e^{1-x} > 0$ pour toute valeur de x, on obtient $(2-x) \cdot x = 0$, et donc soit $2 - x = 0 \implies x = 2$, soit $x = 0$.

Les solutions de $f'(x) = 0$ sont $x = 0$ et $x = 2$

Ex 1 Partie D 1) b)

Les tangentes s'écrivent $y = mx + h$ avec $m = -\frac{1}{4} \implies y = -\frac{1}{4}x + h$.
On va calculer h en utilisant que les tangentes ne coupent le graphe de f qu'en un point, autrement dit que le système :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = -\frac{1}{4}x + h \end{cases}$$ n'a qu'une solution

On doit avoir $\frac{1}{x} = -\frac{1}{4}x + h \implies 1 = -\frac{1}{4}x^2 + hx \implies 4 = -x^2 + 4hx$
$\implies x^2 - 4hx + 4 = 0$.
Cette dernière équation (du 2e degré) ne doit avoir qu'une solution. On doit donc avoir $\Delta = 0$.
On a $a = 1$, $b = -4h$ et $c = 4$. $\Delta = b^2 - 4ac = (-4h)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16h^2 - 16$.
Ainsi $\Delta = 0 \implies 16h^2 - 16 = 0 \implies h^2 = 1 \implies h = \pm 1$.

Les équations de ces tangentes sont donc $y = -\frac{1}{4}x - 1$ et $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

Ex 1 Partie D 2)

La fonction $g(x) = ax + 3$ et la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ doivent avoir 2 points d'intersection. Cela signifie que le système :

$$\begin{cases} y = ax+3 \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$ à 2 solutions.

On doit avoir $ax+3 = \dfrac{1}{x} \Rightarrow ax^2+3x=1 \Rightarrow ax^2+3x-1=0$.

Cette dernière équation (du 2e degré) doit avoir 2 solutions. On doit donc avoir $\Delta > 0$.

On a $A = a$, $b = 3$ et $c = -1$. $\Delta = B^2 - 4AC = 3^2 - 4 \cdot a \cdot (-1) = 9+4a$.

Ainsi $\Delta > 0 \Rightarrow 9+4a > 0 \Rightarrow 4a > -9 \Rightarrow a > -\frac{9}{4}$.

Les valeurs de a pour qu'il y ait 2 points d'intersection sont les $a > -\frac{9}{4}$.

LYCEEJEANPIAGET
NEUCHÂTEL

(8)

Exercice 2

Relativement à un repère orthonormé $(O;\vec{e_1};\vec{e_2})$,

I. On se donne :

- le cercle $\mathcal{C}: x^2+y^2=1$,
- la droite $d_1: 4x+3y+5=0$,
- le point $S\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$

Voir feuilles annexes (pages 9 et 10)

1) Indiquer les coordonnées du centre du cercle $\mathcal{C}$ ainsi que son rayon.

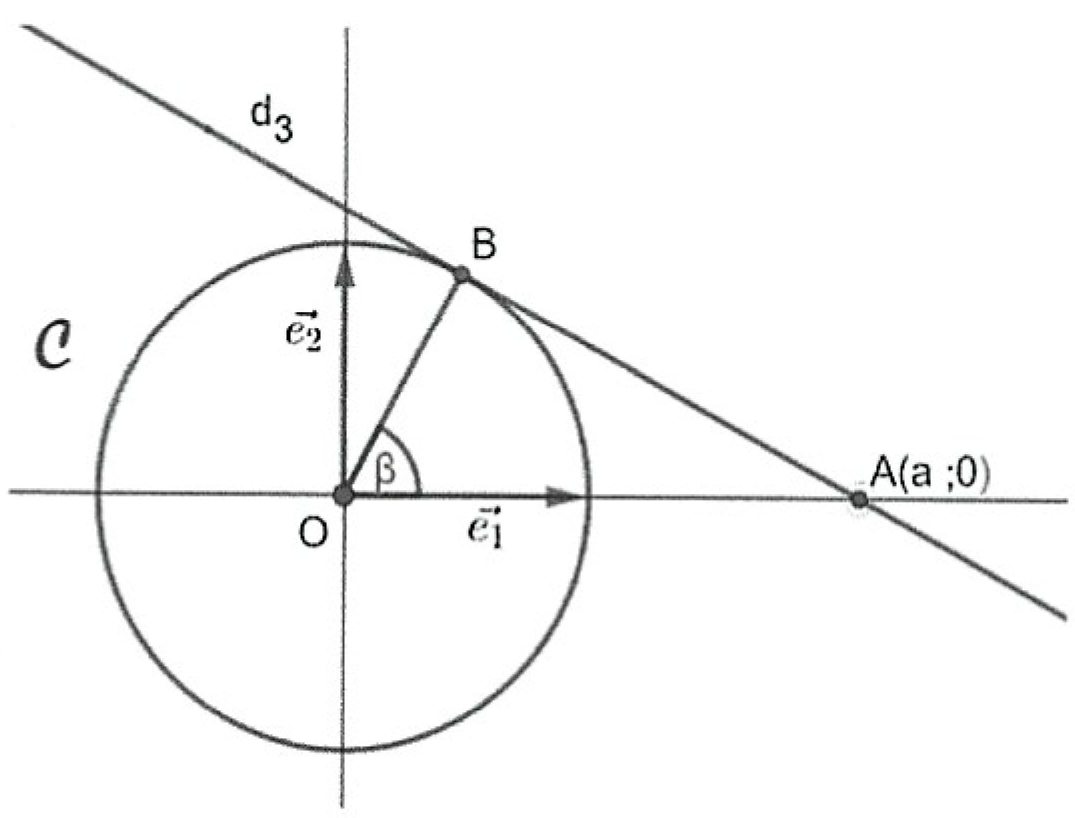
2) Vérifier par calculs que la droite d_1 est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

3) Calculer les coordonnées de T, le point de tangence de d_1 avec le cercle $\mathcal{C}$.

4) Vérifier par calculs que le point S est sur le cercle $\mathcal{C}$.

5) Trouver une équation cartésienne de d_2, la droite tangente au cercle $\mathcal{C}$ en S.

II. On se donne encore le point $A(a;0)$, avec $a>1$
Soit d_3, la droite passant par A et tangente à $\mathcal{C}$ en B. (cf schéma ci-fessous)



Rappel : $\mathcal{C}: x^2+y^2=1$

6) Calculer les coordonnées du point B, en fonction de a .

Ex 2

I. 1) L'équation du cercle étant $x^2+y^2=1$, son centre est $C(0;0)$ et son rayon est $r=1$.

2) d_1 sera tangente au cercle $\mathcal{C}$ si la distance du centre C à la droite d_1 vaut r : $dist(C; d_1)=1$ où $C(0;0)$.

On a $dist(C;d_1) = \dfrac{|4\cdot 0+3\cdot 0+5|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{5}{5} = 1$.

Ainsi d_1 est bien tangente au cercle $\mathcal{C}$.

3) Il faut chercher l'intersection T de $\mathcal{C}$ et d_1, autrement dit résoudre le système $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 4x+3y+5=0 \end{cases}$

De $4x+3y+5=0$, on tire $4x=-3y-5$, d'où $x=-0{,}75y-1{,}25$.

Par substitution dans $x^2+y^2=1$, on obtient :

$(-0{,}75y-1{,}25)^2+y^2=1$ $\qquad$ D

$0{,}5625y^2+1{,}875y+1{,}5625+y^2=1$ $\qquad$ R et -1

$1{,}5625y^2+1{,}875y+0{,}5625=0$ $\qquad$ Viète

$a=1{,}5625 \quad b=1{,}875 \quad c=0{,}5625$

$\Rightarrow \Delta = b^2-4ac = 1{,}875^2-4\cdot 1{,}5625\cdot 0{,}5625 = 0$

$\Rightarrow$ l'unique solution est $y=-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1{,}875}{2\cdot 1{,}5625} = -0{,}6$.

Avec $y=-0{,}6$, on obtient $x=-0{,}75\cdot(-0{,}6)-1{,}25=-0{,}8$.

Ainsi les coordonnées de T sont $(-0{,}8;-0{,}6)$.

4) Avec $S\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)=(-0{,}6;0{,}8)$, on a $x=-0{,}6$ et $y=0{,}8$, d'où $x^2+y^2=(-0{,}6)^2+(0{,}8)^2=1$. Ainsi $S\in\mathcal{C}$.

5) d_2 sera perpendiculaire à $\overrightarrow{SC}$ et passera par S.

On a $\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-0{,}6\\0{,}8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}6\\0{,}2\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}16\\2\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi le vecteur $\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$ est perpendiculaire à d_2

$\Rightarrow d_2 : 8x+y+c=0$

Avec $S(-0{,}6;0{,}8)$, on mettant $x=-0{,}6$ et $y=0{,}8$ dans d_2, on obtient $8\cdot(-0{,}6)+0{,}8+c=0 \Rightarrow -4+c=0 \Rightarrow c=4$.

L'équation de d_2 est donc $d_2 : 8x+y+4=0$.

II. 6) La droite d_3 est perpendiculaire au rayon $\overrightarrow{OB}$.

On doit donc avoir $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$

Posons $B(x;y)$. On a alors $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix} = x \cdot (x-a) + y \cdot y = x^2 - ax + y^2$.

Or $B \in \mathcal{C}$. On a donc $x^2 + y^2 = 1$.

Par conséquent, on a $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} = \underbrace{x^2 + y^2}_{1} - ax = 1 - ax$.

D'où $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \Longrightarrow 1 - ax = 0 \Longrightarrow ax = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{a}$

En reprenant $x^2 + y^2 = 1$, avec $x = \frac{1}{a}$, on obtient

$\left(\frac{1}{a}\right)^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow \frac{1}{a^2} + y^2 = 1 \Longrightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{a^2} = \frac{a^2 - 1}{a^2}$

$\Longrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{a^2-1}{a^2}} = \pm \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$

Comme B est dans le 1e quadran, on aura $y = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$.

Ainsi, les coordonnées de B sont $\left(\frac{1}{a} ; \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right)$.

Exercice 3

Relativement à un repère orthonormé $(O;\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$, on se donne 2 droites, à savoir :

$$d_1:\begin{cases}x = 2+3\lambda \\ y = -3+6\lambda \\ z = 2-2\lambda\end{cases} \qquad \text{et} \qquad d_2:\begin{cases}x = 1+\mu \\ y = 15\mu \\ z = 6+8\mu\end{cases}$$

1) Montrer que d_1 et d_2 sont coplanaires.

2) Calculer *(réponse en degrés à 0,01 près)* l'angle aigu entre les 2 droites.

3) Trouver une équation cartésienne du plan π contenant les droites d_1 et d_2.
(NB : vous devez trouver $\pi: 6x-2y+3z-24=0$)

4) Trouver des équations paramétriques de la droite d_3, telle que d_3 soit incluse dans le plan π et que $\left| \begin{array}{l} d_3 \perp d_1 \\ A(8;9;-2) \in d_3 \end{array}\right.$

1) 2 droites sont coplanaires si elles sont sécantes. On va donc chercher leur point d'intersection :
on commence par chercher la solution λ et μ en égalisant les x et les y, puis vérifier qu'on obtient bien le même z pour ce λ et ce μ.

égalisation des x : $2+3\lambda = 1+\mu \quad |\cdot 2 \quad |\cdot 15$

égalisation des y : $-3+6\lambda = 15\mu \quad |\cdot(-1) \quad |\cdot(-1)$

$\Rightarrow \begin{array}{l} 4+6\lambda = 2+2\mu \\ 3-6\lambda = -15\mu \\ \hline 7 = 2-13\mu \Rightarrow 5 = -13\mu \end{array} \Rightarrow \mu = -\frac{5}{13}$

$\Rightarrow \begin{array}{l} 30+45\lambda = 15+15\mu \\ 3-6\lambda = -15\mu \\ \hline 33+39\lambda = 15 \end{array} \Rightarrow 39\lambda = -18$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{18}{39} = -\frac{6}{13}$

Avec $\lambda = -\frac{6}{13}$ dans $z = 2-2\lambda = 2-2\cdot\left(-\frac{6}{13}\right) = 2+\frac{12}{13} = \frac{26}{13}+\frac{12}{13} = \frac{38}{13}$.

Avec $\mu = -\frac{5}{13}$ dans $z = 6+8\mu = 6+8\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) = 6-\frac{40}{13} = \frac{78}{13}-\frac{40}{13} = \frac{38}{13}$.

On en conclut donc que d_1 et d_2 sont sécantes et donc coplanaires.

suite sur feuilles annexes (pages 12 et 13)

2) L'angle aigu α entre d_1 et d_2 sera donné par $\cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}|}{\|\vec{d_1}\| \cdot \|\vec{d_2}\|}$.

On a $\vec{d_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ (coefficient de λ dans les équations de d_1) et $\vec{d_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}$ (coefficient de μ dans les équations de d_2).

On a $\vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 6 \cdot 15 + (-2) \cdot 8 = 3 + 90 - 16 = 77$,

$\|\vec{d_1}\| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{49} = 7$ et $\|\vec{d_2}\| = \sqrt{1^2 + 15^2 + 8^2} = \sqrt{290}$.

Ainsi $\cos(\alpha) = \dfrac{77}{7 \cdot \sqrt{290}} = \dfrac{11}{\sqrt{290}} \cong 0{,}655 \implies \alpha = 49{,}76°$

3) D'après 1, avec $\lambda = -\dfrac{6}{13}$ et $\mu = -\dfrac{5}{13}$, le point d'intersection I de d_1 et d_2 est :

$x = 2 + 3 \cdot \left(-\dfrac{6}{13}\right) = 2 - \dfrac{18}{13} = \dfrac{8}{13}$ $\left(x = 1 - \dfrac{5}{13} = \dfrac{8}{13}\right)$

$y = -3 + 6 \cdot \left(-\dfrac{6}{13}\right) = -3 - \dfrac{36}{13} = -\dfrac{75}{13}$ $\left(x = 15 \cdot \left(-\dfrac{5}{13}\right) = -\dfrac{75}{13}\right)$

$z = \dfrac{38}{13}$ $\implies I\left(\dfrac{8}{13}; -\dfrac{75}{13}; \dfrac{38}{13}\right)$.

Un vecteur normal au plan Π contenant d_1 et d_2 sera $\vec{n} = \vec{d_1} \wedge \vec{d_2}$ (produit vectoriel).

On a $\vec{d_1} \wedge \vec{d_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 8 - (-2) \cdot 15 \\ -2 \cdot 1 - 3 \cdot 8 \\ 3 \cdot 15 - 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ -26 \\ 39 \end{pmatrix}$

Par conséquent, l'équation de Π sera $78x - 26y + 39z + d = 0$.

En y substituant les coordonnées de I : $x = \dfrac{8}{13}$, $y = -\dfrac{75}{13}$ et $z = \dfrac{38}{13}$, on obtient $78 \cdot \dfrac{8}{13} - 26 \cdot \left(-\dfrac{75}{13}\right) + 39 \cdot \dfrac{38}{13} + d = 0 \implies 48 + 150 + 114 + d = 0$

$\implies 312 + d = 0 \implies d = -312$

L'équation de Π est donc $78x - 26y + 39z - 312 = 0$, ce qui, par simplification par 13 donne $6x - 2y + 3z - 24 = 0$.

4) Comme on a déjà un point de d_3 : $A(8; 9; -2)$, il reste à trouver un vecteur directeur $\vec{d}$ de d_3.

On sait que d_3 est incluse dans Π, donc $\vec{d_3}$ sera perpendiculaire à $\vec{n} = \begin{pmatrix} 78 \\ -26 \\ 39 \end{pmatrix}$ et donc à $\vec{n'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

En outre, on veut $d_3 \perp d_1$. Ainsi $\vec{d_3} \perp \vec{d_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Comme $\vec{d_3} \perp \vec{n'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{d_3} \perp \vec{d_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, on aura $\vec{d_3} \parallel \vec{n'} \wedge \vec{d_1}$.

On a $\vec{n'} \wedge \vec{d_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot(-2) - 3\cdot 6 \\ 3\cdot 3 - 3\cdot(-2) \\ 3\cdot 6 - (-2)\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$

Ainsi $\vec{d_3} = \begin{pmatrix} -14 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$ et des équations paramétriques de d_3 sont, en utilisant le point $A(8; 9; -2)$:

$$d_3 : \begin{cases} x = 8 - 14\lambda \\ y = 9 + 15\lambda \\ z = -2 + 24\lambda \end{cases}$$

14

Exercice 4

NB : Pour cet exercice, les réponses doivent être données sous forme de fractions ou en pourcents arrondies à 0,01

Dans une urne se trouvent 3 boules rouges et 8 boules vertes

Voir feuilles annexes (pages 15 et 16)

L'épreuve E consiste à tirer 3 boules de l'urne sans remise.

- Si on tire 3 boules rouges, on reçoit 100 chf
- Si on tire 3 boules vertes, on reçoit 10 chf
- Si on tire exactement 2 boules rouges, on reçoit 30 chf
- Dans les autres cas, on ne gagne rien.

1) Dessiner l'arbre complet de l'épreuve E

2) Montrer par calculs les probabilités suivantes :
   a) $p(100chf) \cong 0{,}61\%$ *(Probabilité de recevoir 100 chf)*
   b) $p(10chf) \cong 33{,}94\%$ *(Probabilité de recevoir 10 chf)*
   c) $p(30chf) \cong 14{,}55\%$? *(Probabilité de recevoir 30 chf)*

3) Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule rouge ?

4) Sachant que l'on a reçu de l'argent, quelle est la probabilité d'avoir tiré 3 boules de la même couleur ?

==

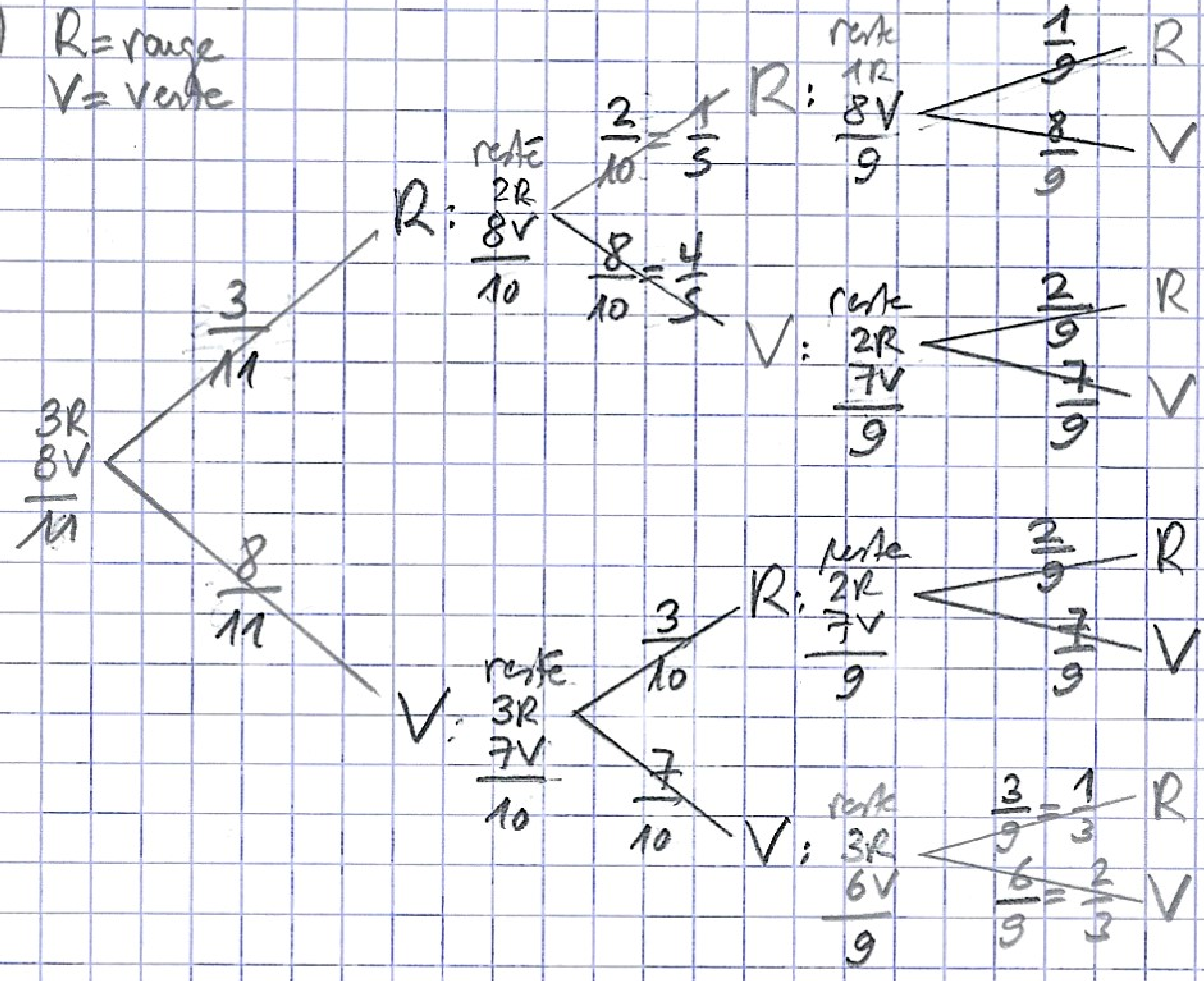
On répète **4 fois de suite** l'épreuve E décrite ci-dessus,

5) Quelle est la probabilité d'avoir reçu à chaque fois de l'argent sachant que l'on a reçu au total 80 chf ?

6) Quelle est la probabilité de recevoir au total 80 chf ?

Exercice 4

1) R = rouge
V = verte



gains	chemins
100.–	1
30.–	2
30.–	3
0.–	4
30.–	5
0.–	6
0.–	7
10.–	8

2) a) $p(100.-) = \text{chemin } 1 = \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{165} \cong 0{,}61\,\%.$

b) $p(10.-) = \text{chemin } 8 = \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{56}{165} \cong 33{,}94\,\%.$

c) $p(30.-) = \text{chemins } 2, 3, 5 = \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{8}{9} + \frac{3}{11} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{9} + \frac{8}{11} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} =$

$= \frac{8}{165} + \frac{8}{165} + \frac{8}{165} = \frac{8}{55} \cong 14{,}55\,\%.$

3) $p(\text{au moins } 1\,R) = 1 - p(\text{zéro } R) = 1 - p(3V) = 1 - \text{chemin } 8$

$= 1 - \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} = 1 - \frac{56}{165} = \frac{109}{165} \cong 66{,}06\,\%.$

4) C'est une probabilité conditionnelle : $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

On a : A = avoir tiré 3 boules de la même couleur = 3R ou 3V = chemins 1 et 8

B = avoir reçu de l'argent = chemins 1, 2, 3, 5, 8

$A \cap B$ = chemins 1 et 8

$p(A \cap B) = \frac{3}{11} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} + \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{165} + \frac{56}{165} = \frac{19}{55}$

$p(B) = p(100.-) + p(10.-) + p(30.-) = \frac{1}{165} + \frac{56}{165} + \frac{8}{55} = \frac{27}{55}$

La probabilité cherchée est donc $P(A|B) = \frac{19/55}{27/55} = \frac{19}{55} \cdot \frac{55}{27} = \frac{19}{27} \cong 70{,}37\,\%$

5) Comme 80.– ne peut être la somme que de 2 fois 30.– et 2 fois 10.–, on reçoit à chaque fois de l'argent.

La probabilité cherchée est donc de 100%.

6) $$\left.\begin{array}{ll} 80.- = & 30.- + 30.- + 10.- + 10.- \\ \text{ou} & 30.- + 10.- + 30.- + 10.- \\ \text{ou} & 10.- + 30.- + 30.- + 10.- \\ \text{ou} & 30.- + 10.- + 10.- + 30.- \\ \text{ou} & 10.- + 30.- + 10.- + 30.- \\ \text{ou} & 10.- + 10.- + 30.- + 30.- \end{array}\right\} \text{6 cas } \left(= \frac{4!}{2!\cdot 2!}\right)$$

Avec $p(30.-) = \frac{8}{55}$ et $p(10.-) = \frac{56}{165}$ (voir 2)),

la probabilité cherchée est $6 \cdot \left(\frac{8}{55}\right)^2 \cdot \left(\frac{56}{165}\right)^2 = 1,46\,\%$.