Problème 1

a) $D = \mathbb{R}_+^*$, $f \cap Ox = \{(1;0)\}$ et $f \cap Oy = \varnothing$. Tableau des signes :

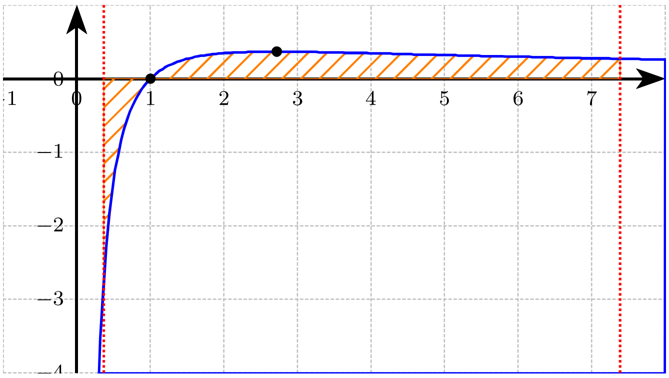
x	0		1	
$f(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$

Asymptote verticale en $x = 0$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$

Asymptote horizontale à droite en $y = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$

Point(s) à tangente horizontale : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x) = 0 \Rightarrow$ PTH en $\left(e; \frac{1}{e}\right)$



b) $P\left(e^2; \frac{2}{e^2}\right)$ et $f'\left(e^2\right) = \frac{1-2}{e^4} = -\frac{1}{e^4} \Rightarrow t : y = -\frac{1}{e^4}x + h \Rightarrow \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^4}\cdot e^2 + h$

$\Rightarrow h = \frac{3}{e^2} \Rightarrow t : y = -\frac{1}{e^4}x + \frac{3}{e^2}$

c) $f'(1) = \dfrac{1-\ln(1)}{1^2} = 1 \Rightarrow \varphi = \arctan(1) = 45^\circ$

d) $F'(x) = \frac{1}{2}\cdot 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x} = f(x)$

e) $A = -\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^{e^2} f(x)\,\mathrm{d}x = F\left(\tfrac{1}{e}\right) + F(e^2) - 2\cdot F(1) = \tfrac{5}{2}$

f) $A = -\displaystyle\int_1^{\alpha} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\ln^2(\alpha) > \tfrac{9}{2} \Leftrightarrow \ln^2(\alpha) > 9$. Comme $\ln(\alpha) < -3 \Rightarrow \alpha < e^{-3} < 1$ est impossible car $\alpha > 1$, alors $\ln(\alpha) > 3 \Rightarrow \alpha > e^3 \cong 20,09 \Rightarrow \alpha = 21$

g) $\int x\ln(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x)x^2 - \frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) + C \Rightarrow G(x) = \frac{1}{2}x^2\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)$

h) $\displaystyle\int_1^e g(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left[x^2\left(\ln(x) - \tfrac{1}{2}\right)\right]_1^e = \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{1}{4}$

i) $h(e) = \frac{\ln(e)}{e} + e^k = \frac{3}{e} \Leftrightarrow e^{k+1} = 2 \Leftrightarrow k = \ln(2) - 1 \cong -0,31$

Problème 2

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow d : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 - 5\lambda \\ z = 10 - 5\lambda \end{cases}$

b) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 30 \\ -15 \\ 21 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha : 10x - 5y + 7z + d = 0$

$A \in \alpha \Rightarrow d = -35 \Rightarrow \alpha : 10x - 5y + 7z - 35 = 0$

c) et d) Voir annexe.

e) $\overrightarrow{n_\beta} = \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \\ -15 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_\gamma} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(\dfrac{|-98|}{25 \cdot \sqrt{174}}\right) \cong 72,71^\circ$

f) $\mathcal{S} : (x+7)^2 + (y-9)^2 + (z-20)^2 - 625 = 0$

g) $e \cap \beta : 16(2+3\mu) - 12(-1-\mu) - 15(4+4\mu) - 105 = 0 \Leftrightarrow -121 = 0 \Rightarrow e \cap \beta = \varnothing$ donc e est parallèle à β.

h) $\delta(\beta; C) = \dfrac{|16 \cdot (-7) - 12 \cdot 9 - 15 \cdot 20 - 105|}{\sqrt{625}} = 25$ qui est le rayon de la sphère, donc β est tangent à $\mathcal{S}$.

$f : \begin{cases} x = -7 + 16\lambda \\ y = 9 - 12\lambda \\ z = 20 - 15\lambda \end{cases}, \ f \cap \beta : 16(-7+16\lambda) - 12(9-12\lambda) - 15(20-15\lambda) - 150 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow T(9; -3; 5)$ est le point de tangence.

Problème 3

a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

b) 1) $\binom{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 7,81\%$

2) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^7 - 7 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cong 33,02\%$

3) $P(X \leq 1) = 1 - P(X \geq 2) \cong 66,98\%$

c) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0,95 \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{5}{100} \Rightarrow n > \dfrac{\log\left(\frac{5}{100}\right)}{\log\left(\frac{5}{6}\right)} \cong 16,43 \Rightarrow n = 17$

d) $\dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{3}{10} = 30\%$

e) $\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \cong 16,67\%$

f) $A_3^5 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = 60$

g) $\overline{P_7}(2;2) = \dfrac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$

Annexe pour le problème 2

Nom et prénom : ....

Classe : ....