Mathématiques niveau I

Problème 1 (poids 2)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

a) Etudier la fonction f : domaine de définition, éventuelles intersections du graphe avec les axes, tableau des signes et asymptotes.

Montrer que la dérivée de f peut s'écrire $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$.

Calculer les coordonnées du point à tangente horizontale puis montrer qu'il s'agit d'un maximum.

Dessiner le graphe de f en prenant 4 carreaux comme unité, et en allant jusqu'à $x = 8$ au moins.

b) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = e^2$.

c) Sous quel angle le graphe de f coupe-t-il l'axe Ox.

d) Montrer que la fonction F donnée par $F(x) = \frac{1}{2}\ln^2(x)$ est une primitive de la fonction f.

e) Sur le dessin, hachurer la surface fermée délimitée par l'axe Ox, le graphe de f ainsi que les droites $x = \frac{1}{e}$ et $x = e^2$.

Calculer l'aire de cette surface.

f) Trouver la plus petite valeur entière de α, avec $\alpha > 1$, pour laquelle $\displaystyle\int_1^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x > \frac{9}{2}$.

On considère maintenant la fonction g définie par $g(x) = x \cdot \ln(x)$.

g) En intégrant par parties, trouver une primitive de la fonction g.

h) Calculer $\displaystyle\int_1^{e} g(x)\,\mathrm{d}x$.

On considère finalement la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} + x^k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

i) Déterminer la valeur de k pour laquelle le graphe de la fonction h passe par le point de coordonnées $\left(e; \frac{3}{e}\right)$.

Problème 2 (poids 2)

Pour les dessins de ce problème, utiliser la feuille annexée.
Dessiner les parties invisibles en traitillé.

On considère les points $A(-2;3;10)$, $B(-1;-2;5)$, et $D(3;-1;0)$.

a) Déterminer des équations paramétriques de la droite d qui passe par les points A et B.

b) Trouver l'équation cartésienne du plan α contenant les points A, B et D.

c) Dessiner les traces du plan α.

d) Dessiner la droite horizontale h passant par le point $H(0;0;5)$ et contenue dans le plan α, ainsi que sa projection dans le sol.

On considère encore le plan $\beta : 16x - 12y - 15z - 105 = 0$, la droite $e : \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = -1 - \mu \\ z = 4 + 4\mu \end{cases}$

ainsi que la sphère $\mathcal{S}$ centrée en $C(-7;9;20)$ et de rayon 25.

e) Calculer l'angle aigu formé par le plan β et le plan $\gamma : 7x + 5y + 10z - 47 = 0$.

f) Donner l'équation de la sphère $\mathcal{S}$.

g) Trouver les éventuels points d'intersection de la droite e et du plan β.

Déterminer la position relative de la droite e et du plan β.

h) Montrer que le plan β est tangent à la sphère $\mathcal{S}$ et déterminer les coordonnées du point de tangence.

Problème 3 (poids 1)

Première partie

James possède trois déodorants aux senteurs suivantes : lavande, citron et muguet, ainsi que quatre parfums aux senteurs suivantes : lavande, citron, jasmin et cannelle.

Chaque matin, à son réveil, James choisit au hasard un déodorant qu'il s'applique puis il fait de même avec un parfum. On dira que James est « mono-senteur » si le déodorant et le parfum ont la même senteur.

a) Montrer que la probabilité que James soit « mono-senteur » vaut $\frac{1}{6}$.

b) Lors de la semaine à venir (7 jours), calculer les probabilités suivantes :
   1) qu'il soit exactement trois fois « mono-senteur » ;
   2) qu'il soit au moins deux fois « mono-senteur » ;
   3) qu'il soit au plus une fois « mono-senteur ».

c) Combien de jours au minimum James doit-il se parfumer pour que la probabilité qu'il soit au moins une fois « mono-senteur » soit supérieure à 95% ?

d) Aujourd'hui, James n'est pas « mono-senteur ». Quelle est la probabilité que son déodorant sente le citron ?

Le jour de son anniversaire, James est distrait : il s'applique un déodorant et un parfum (toujours choisis au hasard), mais il oublie de ranger le déodorant à sa place. Le lendemain, il lui reste donc le choix entre deux déodorants et quatre parfums.

e) Quelle est la probabilité qu'il soit « mono-senteur » le lendemain de son anniversaire ?

Deuxième partie

f) Combien de « mots » de trois lettres distinctes peut-on former avec les lettres CANEL ?

g) Combien de « mots » contenant deux L adjacents peut-on former en utilisant exactement une fois chaque lettre du mot CANNELLE ?

Annexe pour le problème 2

Nom et prénom : ....

Classe : ....