Problème 1

a) $f(x) = 2(x^2 - 1)e^{-x/2} = 2(x-1)(x+1)e^{-x/2}$ s'annule lorsque $x = \pm 1$.

b) $\Delta(-1; 4; 1) = 16 - 4(-1) = 20$ et $f'(x)$ s'annule lorsque $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{20}}{-2} = 2 \mp \sqrt{5}$, d'où $H_1(-0.24; -2.13)$ et $H_2(4.24; 4.08)$.

c) La pente de la tangente en $A(-1; 0)$ vaut $f'(-1) = -4e^{1/2}$ et l'angle entre cette tangente et l'axe Ox est $|\tan^{-1}(-4e^{1/2})| \cong 81.38°$.

d) La tangente passe par $(0; -2)$ et admet la pente $f'(0) = 1$. Son équation est donc $y = -2 + 1(x - 0)$, donc $y = x - 2$.

e) Une primitive est du type $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x/2}$. On a

$$\begin{aligned} F'(x) &= (2ax + b)e^{-x/2} + (ax^2 + bx + c)(-0.5)e^{-x/2} \\ &= ((ax^2 + bx + c)(-0.5) + (2ax + b))e^{-x/2} \\ &= (-0.5ax^2 + (2a - 0.5b)x + (b - 0.5c))e^{-x/2}. \end{aligned}$$

Par comparaison avec $f(x)$ on trouve $a = -4$, $b = -16$ et $c = -28$, d'où $F(x) = (-4x^2 - 16x - 28)e^{-x/2} = -4(x^2 + 4x + 7)e^{-x/2}$.

f) L'aire du triangle délimité par la tangente t et l'axe Ox est $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$.
L'aire cherchée est alors

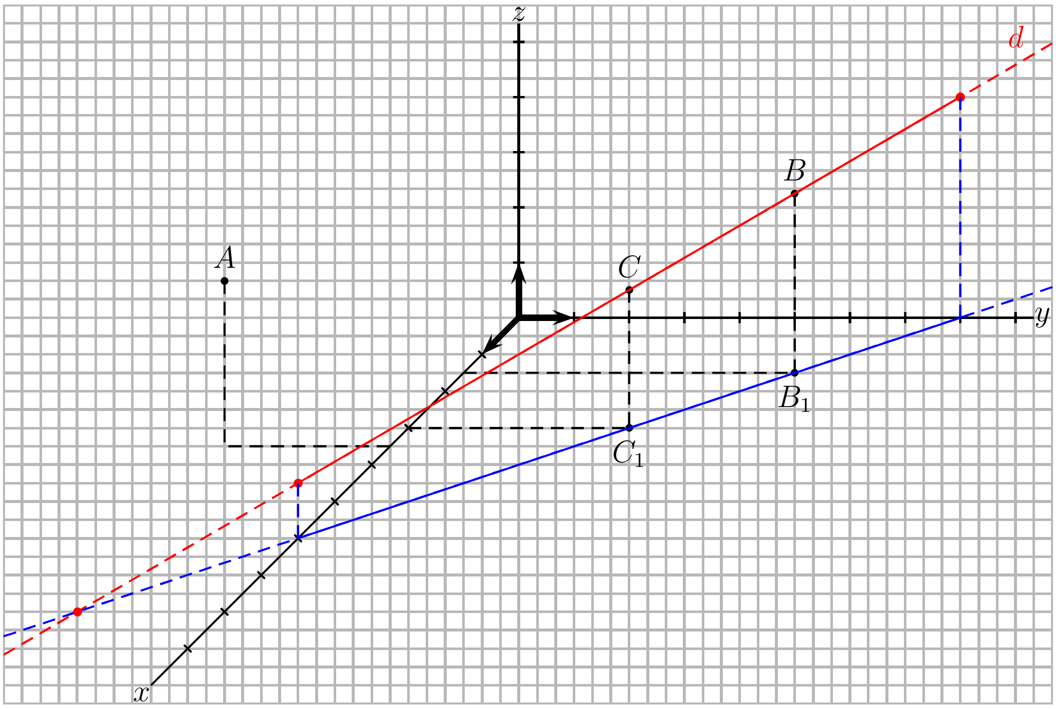
$$2 - \left| \int_0^1 f(x)dx \right| = 2 + [F(x)]_0^1 = 2 + (-48e^{-1/2} + 28) = 30 - 48e^{-1/2} \cong 0.89$$

g) L'aire du rectangle blanc est $\cos(x)\sin(x)$ et l'aire de la surface grise est

$$A(x) = \frac{\pi}{4} - \sin(x)\cos(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin(2x).$$

h) La dérivée $A'(x) = -\cos(2x)$ est nulle lorsque $2x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, donc $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Problème 2



a) $A(3.5; -3; 3)$

b) $T_s(8; -2.\overline{6}; 0)$, $T_m(0; 8; 4)$ et $T_p(6; 0; 1)$

c) Les trois points se trouvent dans le plan $\mu : 2x+y+2z-21 = 0$ (le calibrage "-21" est compatible !) qui a le même vecteur normal que π et $\text{dist}(\mu, \pi) = \text{dist}(P, \pi) = \dfrac{15}{3} = 5$.

d) $\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\text{Aire}(PQR) = \dfrac{1}{2} \|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}\| = 8 \cdot 3 = 24$.

$\sphericalangle(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = \cos^{-1}\left(\dfrac{90}{\sqrt{153}\sqrt{68}}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{90}{102}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{15}{17}\right) \cong 28.07°$

e) Selon Pythagore, le rayon de la sphère est $\sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$. Le centre du cercle d'intersection est $P'(7+2\lambda; 3+\lambda; 2+2\lambda) \in \pi$. On trouve $\lambda = -\dfrac{5}{3}$ et $P'\left(\dfrac{11}{3}; \dfrac{4}{3}; \dfrac{-4}{3}\right)$.

f) La sphère est centrée en $\Omega(1; 6; -4)$, elle est tangente au sol ($\text{dist}(\Omega, \text{sol}) = 4$), coupe le mur en un cercle ($\text{dist}(\Omega, \text{mur}) = 1$) et ne touche pas la paroi ($\text{dist}(\Omega, \text{paroi}) = 6$).

g) $\text{dist}(P, \mathcal{S}) = \|\overrightarrow{\Omega P}\| - 4 = \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| - 4 = 9 - 4 = 5$

h) $\lambda = \dfrac{5}{9}$

Problème 3

a) $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{18}{25} + \frac{1}{10} = \frac{36}{50} + \frac{5}{50} = \frac{41}{50}$

b) $\mathbb{P}(\langle 5 \times B, 2 \times \overline{B} \rangle) = \binom{7}{5}(0.82)^5(0.18)^2 \cong 0.25225$

c) $\mathbb{P}(\text{déjeuner et mauvaise humeur}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{25} = 0.08$. La probabilité cherchée est alors $(0.92)^7 + 7(0.92)^6(0.08) = (0.92)^6(0.92 + 7 \cdot 0.08) = (0.92)^6(1.48) \cong 0.8974$

d) Par a), $\mathbb{P}(D|B) = \frac{18/25}{41/50} = \frac{36}{41} \cong 0.87805$

e) $\mathbb{P}(PP) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

f) $1 - \mathbb{P}(\overline{S}\,\overline{S}) = 1 - \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

g) $1 - \mathbb{P}(SS, PP) = 1 - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{4}{15} = \frac{11}{15}$

h) $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ ou $10^4 - 10^3 = 10000 - 1000 = 9000$

i) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ ou $\frac{10!}{6!} - \frac{9!}{6!} = 540 - 504 = 4536$

j) $\frac{4!}{2!} = 12$