

*Mathématiques niveau I*

---

**Problème 1** (poids 4)

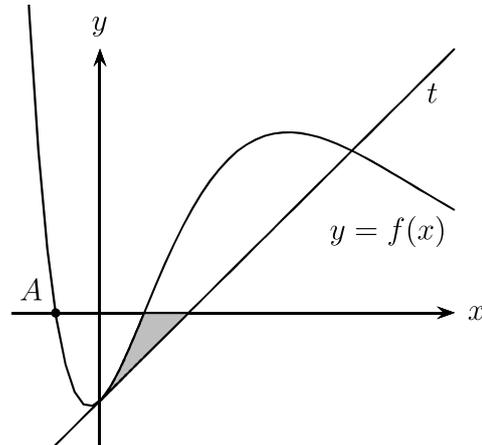
**Première partie**

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = (2x^2 - 2)e^{-x/2}.$$

Son graphe est donnée ci-contre dans un repère orthonormé et l'expression de sa dérivée est

$$f'(x) = (-x^2 + 4x + 1)e^{-x/2}.$$

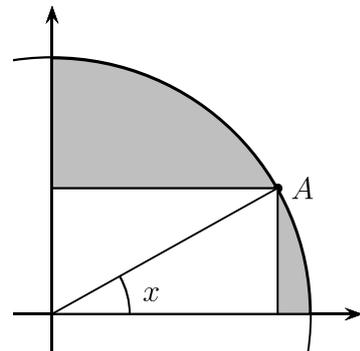


- a) Déterminer les zéros de  $f$ .
- b) Calculer, au centième près, les coordonnées des points à tangente horizontale du graphe de  $f$ .
- c) Calculer l'angle aigu entre le graphe de  $f$  et l'axe  $Ox$  au point  $A$ .
- d) Trouver l'équation de la tangente  $t$  au graphe de  $f$  en son point d'abscisse  $x_0 = 0$ .
- e) Trouver une primitive de  $f$ .
- f) Calculer l'aire de la surface grise.

**Deuxième partie**

Un angle  $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$  définit sur le cercle trigonométrique un point  $A$  situé dans le premier quadrant.

- g) Exprimer, en fonction de  $x$ , l'aire de la surface grise représentée ci-contre.
- h) Déterminer l'angle  $x$  pour lequel l'aire de la surface grise est minimale. Justifier la réponse par des calculs.



*Mathématiques niveau I*

---

**Problème 2** (poids 3)

Trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont représentés dans le repère donné en annexe. On note  $B_1$  et  $C_1$  les projections orthogonales de  $B$  et  $C$  dans le sol.

- a) Déterminer les coordonnées du point  $A$  de cote  $z = 3$  au moyen d'une construction géométrique.
- b) On considère la droite  $d$  passant par  $B$  et  $C$ . Construire les traces de  $d$  dans le sol, le mur et la paroi puis donner une estimation de leurs coordonnées. Tracer la droite  $d$  en dessinant les parties cachées en traitillés.

On considère maintenant les points  $P(7; 3; 2)$ ,  $Q(5; -7; 9)$  et  $R(3; -1; 8)$ , ainsi que le plan  $\pi : 2x + y + 2z - 6 = 0$ .

- c) Montrer que le triangle  $PQR$  est contenu dans un plan parallèle à  $\pi$  et calculer la distance entre les deux plans.
- d) Calculer l'aire du triangle  $PQR$  et l'angle au sommet  $P$ .
- e) Une sphère centrée en  $P$  coupe le plan  $\pi$  selon un cercle de rayon 3. Déterminer le rayon de la sphère et le centre du cercle d'intersection.

On considère la sphère  $\mathcal{S} : (x - 1)^2 + (y - 6)^2 + (z + 4)^2 = 16$ .

- f) Trouver les positions relatives de la sphère  $\mathcal{S}$  par rapport au sol, au mur et à la paroi, sans préciser les intersections éventuelles.
- g) Déterminer la distance minimale qui sépare le point  $P(7; 3; 2)$  de la sphère  $\mathcal{S}$ .
- h) On note  $\Omega$  le centre de la sphère  $\mathcal{S}$  et  $N$  le point de la sphère  $\mathcal{S}$  qui est le plus proche du point  $P$ . Déduire de g) le nombre  $\lambda$  tel que  $\overrightarrow{PN} = \lambda \overrightarrow{P\Omega}$ .

*Mathématiques niveau I*

---

**Problème 3** (poids 3)

En moyenne, James a le temps de déjeuner quatre jours sur cinq. Dans ce cas, il a neuf chances sur dix d'être de bonne humeur. Par contre, s'il n'a pas le temps de déjeuner, la probabilité qu'il soit de mauvaise humeur vaut 50% (il n'y a que deux humeurs possibles).

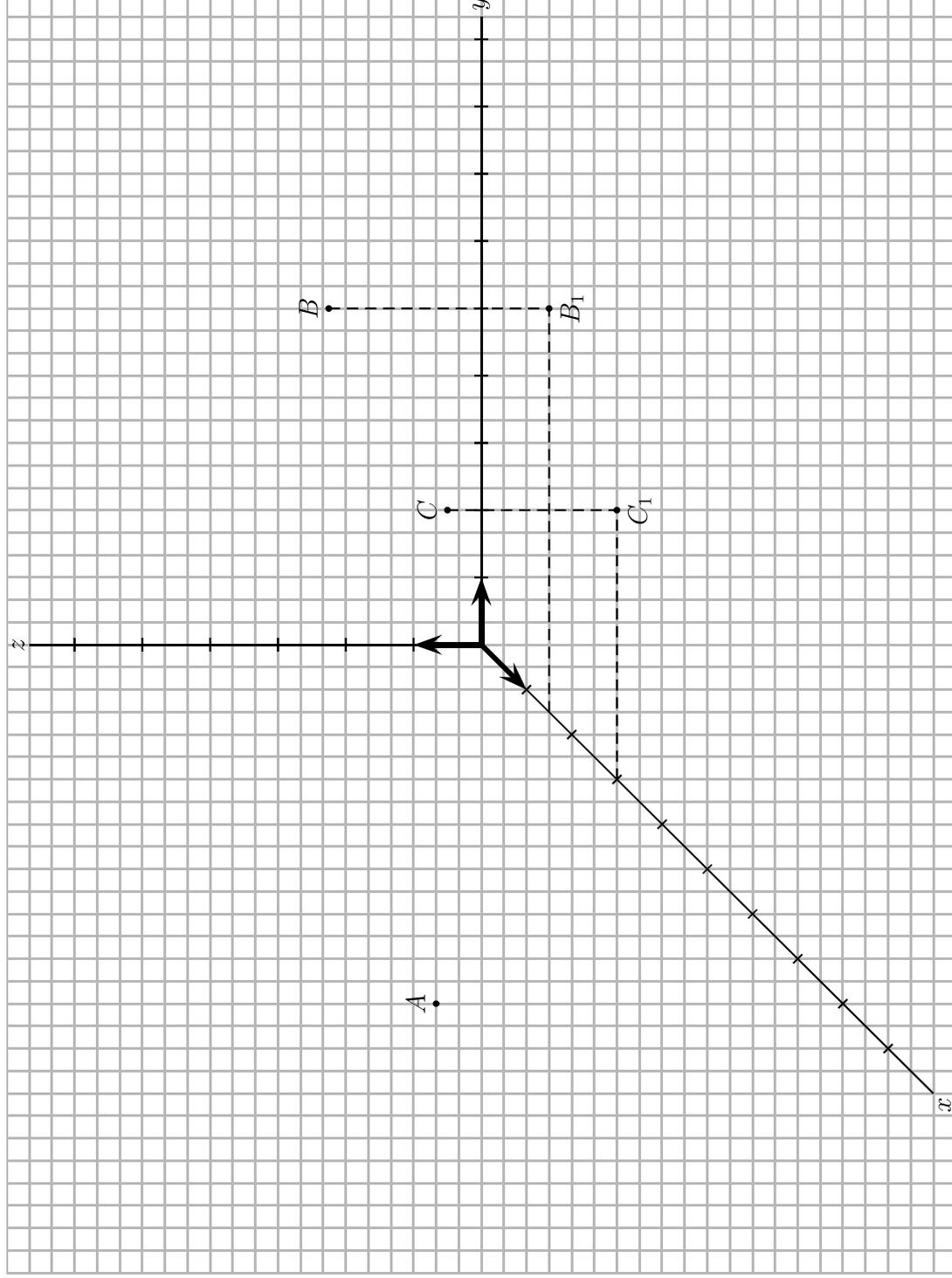
- a) Montrer que la probabilité que James soit de bonne humeur un jour donné vaut  $\frac{41}{50}$ .
- b) Quelle est la probabilité que, lors de la semaine prochaine (sept jours), James soit de bonne humeur exactement cinq fois ?
- c) Quelle est la probabilité que, lors de la semaine prochaine (sept jours), James ait le temps de déjeuner et soit de mauvaise humeur au plus une fois ?
- d) Aujourd'hui, James est de bonne humeur. Quelle est la probabilité qu'il ait eu le temps de déjeuner ?

James retrouve son ami Georges pour cuisiner un rôti. Il apporte avec lui sa boîte à condiments qui contient six pots identiques. Trois pots contiennent du sel, deux du poivre et un du thym. James choisit au hasard un pot, assaisonne le rôti mais ne remet pas le pot dans la boîte. Quelques instants plus tard, Georges choisit, également au hasard, l'un des pots restants dans la boîte et assaisonne à son tour le rôti.

- e) Quelle est la probabilité que le rôti soit poivré deux fois ?
- f) Quelle est la probabilité que le rôti soit salé ?
- g) Quelle est la probabilité que le rôti soit assaisonné avec deux condiments différents ?

Pour déverrouiller son téléphone, James doit composer un code à quatre chiffres qui ne commence pas par 0. Déterminer le nombre de codes possibles...

- h) ... si les répétitions de chiffres sont permises,
- i) ... si aucune répétition de chiffres n'est permise,
- j) ... si le code contient les chiffres 1, 2, 3 et 3.



Réponses : a)  $A$ (—; —; 3)    b)  $T_s$ (—; —; —),  $T_m$ (—; —; —) et  $T_p$ (—; —; —)