LYCÉE DENIS-DE-ROUGEMONT — EXAMEN DE MATURITÉ

Neuchâtel — Session 2023

Mathématiques niveau I

Problème 1 (poids 4)

Partie 1

a) Déterminer la valeur de a telle que le graphe de la fonction f donnée par $f(x) = (x+1)e^{ax}$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$) possède un point à tangente horizontale en $x = 0$.

Pour la suite de l'exercice, on considère la fonction $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

b) Établir son domaine de définition, ses intersections avec les axes, son tableau des signes, sa dérivée, son tableau de variation, les coordonnées et le type de son extremum ainsi que l'équation de son asymptote. Dessiner le graphe de f dans le système d'axes ci-dessous.

c) On considère la surface située entre la droite $y = 2$ et le graphe de f sur l'intervalle $[0; 3]$. Hachurer cette surface et calculer son aire, arrondie au centième.

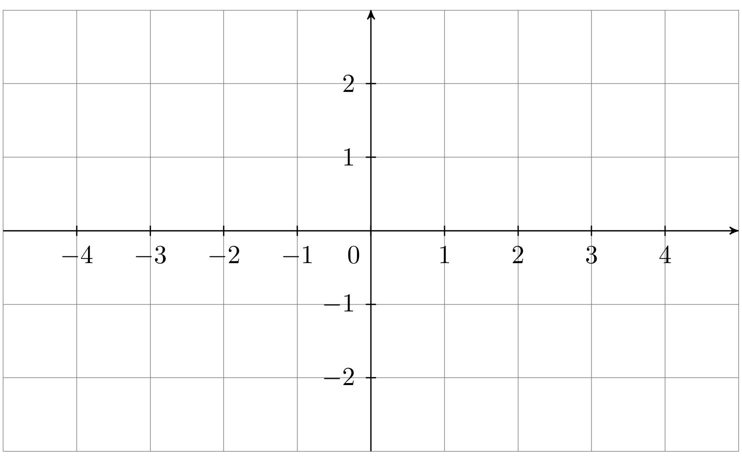
d) On considère la fonction g définie par $g(x) = -x^2+1$. L'écart vertical entre les graphes de f et g sur l'intervalle $[-1; 0]$ est donné par $d(x) = f(x) - g(x)$. Calculer l'écart en $x = -1$ et en $x = 0$, puis calculer la valeur maximale de d sur l'intervalle $[-1; 0]$, arrondie au centième.

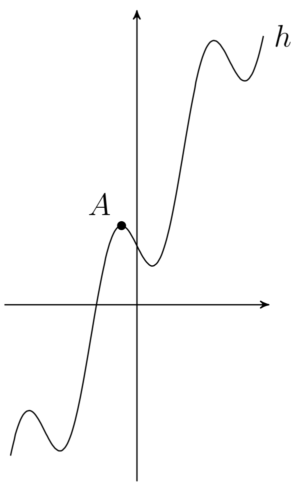
Partie 2

Soit la fonction $h(x) = 2x - \sin(4x) + 1$ dont le graphe est donné ci-dessous.

a) Dessiner la droite t tangente au graphe en $x = 0$ et en déterminer l'équation. Représenter et calculer l'angle aigu α que forme la droite t avec l'axe des x.

b) Déterminer les coordonnées du point A, le maximum local de h le plus proche de l'origine, arrondies au centième.





Problème 2 (poids 3)

Pour les dessins de ce problème, utiliser la feuille annexée.
Dessiner les parties invisibles en traitillé.

Une droite d, sa projection dans le sol d_1 et un point A de la droite d sont représentés dans le repère annexé.

a) Déterminer par dessin les coordonnées du point A ainsi que celles de la trace de d dans le sol.

On considère la droite $e : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$ et le plan $\pi : 2x - y - 2 = 0$.

b) Déterminer une équation cartésienne du plan vertical α contenant la droite e.

c) Dessiner les traces du plan π.

d) Déterminer par calcul l'éventuel point d'intersection du plan π et de la droite e.

e) Calculer l'angle aigu φ formé par le plan π et la droite e.

f) Déterminer des équations paramétriques de la droite horizontale h contenue dans le plan π et située à hauteur 3 unités.

On considère encore le point $E(3; 4; 9)$.

g) Montrer que le point E est contenu dans le plan π.

h) Déterminer l'équation de la sphère $\mathcal{S}$ tangente à π en E et centrée dans le mur.

Problème 3 (poids 3)

Chaque année, un lycée organise un séjour à New York pour ses étudiant·e·s. Cette année, les organisateurs ont reçu 30 inscriptions, dont les deux tiers viennent de jeunes filles. Pendant leur séjour, les étudiant·e·s sont logé·e·s chez des familles d'accueil. Parmi ces familles, 12 hébergent une jeune fille et 8 hébergent un jeune homme. Les participant·e·s sont tiré·e·s au sort parmi les bulletins d'inscription et forment donc un groupe de 20 étudiant·e·s (12 filles et 8 garçons).

a) Combien de groupes différents peuvent-ils résulter du tirage au sort ?

b) De combien de manières les organisateurs peuvent-ils répartir les 20 participant·e·s chez les familles d'accueil ?

c) Victor s'est inscrit, quelle est la probabilité qu'il puisse effectuer le séjour ?

d) Lucie et Marie, deux amies, se sont également inscrites. Quelle est la probabilité que les deux amies fassent partie du voyage ?

A cause de la pollution de l'air à New-York, la probabilité de souffrir d'un mal de gorge est de 25% pour une jeune fille et de 20% pour un jeune homme.

e) Quelle est la probabilité qu'au moins un·e des 20 participant·e·s souffre d'un mal de gorge durant son séjour ?

f) Quelle est la probabilité que exactement 4 jeunes filles souffrent d'un mal de gorge durant leur séjour ?

g) Si un·e des 20 participant·e·s souffre d'un mal de gorge, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une jeune fille ?

Pour se rendre à New York, les participant·e·s prennent l'avion à Genève. La durée du vol direct en minutes suit une loi normale de moyenne 560 minutes et d'écart-type 30 minutes.

h) Quelle est la probabilité que la durée du vol soit comprise entre 530 et 575 minutes ?

i) Quelle est la probabilité que le vol dure plus de 605 minutes ?

j) L'année dernière, le vol a été particulièrement long. La probabilité que le vol de cette année ait une durée supérieure à celle de l'an passé n'est que de 3.92%. Quelle a été la durée du vol en 2022 ?

LYCÉE DENIS-DE-ROUGEMONT
Neuchâtel

EXAMEN DE MATURITÉ
Session 2023

Mathématiques niveau I

Annexe pour le problème 2

Nom et prénom : ....

Classe : ....