Exercice 7.24

On a: $p(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$. Posons $z = x+iy$.

a. $p(\bar{z}) = a\bar{z}^4 + b\bar{z}^3 + c\bar{z}^2 + d\bar{z} + e =$

$$= a(x-iy)^4 + b(x-iy)^3 + c(x-iy)^2 + d(x-iy) + e =$$

$$= a(x^2-y^2-2ixy)^2 + b(x^3 - 3x^2yi - 3xy^2 + iy^3) + c(x^2-y^2-2ixy) + d(x-iy) + e =$$

$$= a(x^4+y^4-4x^2y^2-2x^2y^2-4x^3yi+4xy^3i) + b(x^3-3x^2yi-3xy^2+y^3i) +$$
$$+ c(x^2-y^2-2xyi) + d(x-yi) + e =$$

$$= a(x^4+y^4-4x^2y^2-2x^2y^2) + a(-4x^3y+4xy^3)i + b(x^3-3xy^2) + b(-3x^2y+y^3)i +$$
$$+ c(x^2-y^2) - 2cxyi + dx - dyi + e =$$

$$= a(x^4+y^4-4x^2y^2-2x^2y^2) + b(x^3-2xy^2) + c(x^2-y^2) + dx + e +$$
$$+ \left(a(-4x^3y+4xy^3) + b(-3x^2y+y^3) - 2cxy - dy\right) i =$$

$$= \overline{a(x^4+y^4-4x^2y^2-2x^2y^2) + b(x^3-2xy^2) + c(x^2-y^2) + dx + e}$$
$$\overline{- \left(a(-4x^3y+4xy^3) + b(-3x^2y+y^3) - 2cxy - dy\right) i} =$$

$$= \overline{a(x^4+y^4-4x^2y^2-2x^2y^2) + b(x^3-2xy^2) + c(x^2-y^2) + dx + e +}$$
$$\overline{+ \left(a(4x^3y-4xy^3) + b(3x^2y-y^3) + 2cxy + dy\right) i} =$$

$$= \overline{a(x^4+y^4-4x^2y^2-2x^2y^2) + a(4x^3y-4xy^3)i + b(x^3-2xy^2) + b(3x^2y-y^3)i +}$$
$$\overline{+ c(x^2-y^2) + 2cxyi + dx + dyi + e} =$$

$$= \overline{a(x^4+y^4-4x^2y^2-2x^2y^2+4x^3yi-4xy^3i) + b(x^3-2xy^2+3x^2yi-y^3i) +}$$
$$\overline{+ c(x^2-y^2+2xyi) + d(x+yi) + e} =$$

$$= \overline{a(x^2+y^2+2ixy)^2 + b(x+iy)^3 + c(x+yi)^2 + d(x+yi) + e} =$$

$$= \overline{a(x+yi)^4 + b(x+iy)^3 + c(x+yi)^2 + d(x+yi) + e} =$$

$$= \overline{az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e} = \overline{p(z)}.$$

b. Si $p(z) = 0$, on a $\overline{p(z)} = 0$. Comme $p(\bar{z}) = \overline{p(z)}$ d'après a., on a alors $p(\bar{z}) = 0$.

c. On a $p(z) = z^4 + z^3 + z^2 + 2$ $\quad (a=b=c=1,\ d=0$ et $e=2)$.

Avec $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, on a $z^2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{(1+i\sqrt{3})^2}{4} = \frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4} = \frac{1+2\sqrt{3}i-3}{4} = \frac{-2+2\sqrt{3}i}{4} =$
$= \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $z^3 = z^2 \cdot z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1-i\sqrt{3}+\sqrt{3}i+3i^2}{4} = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$ et
$z_4 = z^3 \cdot z = -1 \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi $z^4 + z^3 + z^2 + 2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 2 = \frac{-1-i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{-2}{2} + 1 = -1+1 = 0.$

Par conséquent, $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ est bien un zéro de $p(z)$.
D'après b), si $p(z)=0$, alors $p(\bar{z})=0$ aussi. Autrement dit, si z est un zéro de $p(z)$, $\bar{z}$ est aussi un zéro de $p(z)$.
Ainsi $\bar{z} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ est aussi un zéro de $p(z)$.
$p(z)$ peut alors s'écrire $\left(z - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) q(z)$, où $q(z)$ sera un polynôme du 2e degré.

On a $\left(z-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \left(z-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$

$$= z^2 - z + \frac{1}{4} - \frac{i^2 \cdot 3}{4} = z^2 - z + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = z^2 - z + 1.$$

On a donc $p(z) = (z^2 - z + 1)\, q(z)$.
$q(z)$ est donc le quotient de $p(z)$ avec $z^2 - z + 1$:

$$\begin{array}{r|l} z^4 + z^3 + z^2 + 2 & z^2 - z + 1 \\ \cline{2-2} -(z^4 - z^3 + z^2) & z^2 + 2z + 2 \\ \cline{1-1} 2z^3 + 2 & \\ -(2z^3 - 2z^2 + 2z) & \\ \cline{1-1} 2z^2 - 2z + 2 & \\ -(2z^2 - 2z + 2) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Ainsi $q(z) = z^2 + 2z + 2$ et on peut écrire $p(z) = (z^2 - z + 1)(z^2 + 2z + 2)$.
Cherchons maintenant les zéros de $q(z)$, autrement dit les solutions de $z^2 + 2z + 2 = 0$.
C'est une équation du 2e degré de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a=1$, $b=2$ et $c=2$.
On a $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$.
Les solutions sont $z = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+2i}{2 \cdot 1} = -1+i$ et $z = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2i}{2 \cdot 1} = -1-i$.

Ainsi, les 4 zéros de p sont: $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $z = -1+i$ et $z = -1-i$.
Cela signifie que p peut s'écrire $p(z) = \left(z - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(z - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(z+1-i)(z+1+i)$.

Exercice 7.15.

On a l'équation $z^3-(11+2i)z^2+2(17+7i)z-42=0$.

On sait qu'elle a une solution réelle z_1 : $z_1\in\mathbb{R}$.

En développant le terme de gauche pour l'équation avec $z=z_1$, on a :

$$z_1^3-11z_1^2+34z_1-42+(-2z_1^2+14z_1)i=0.$$

On doit donc avoir $z_1^3-11z_1^2+34z_1-42=0$ et $-2z_1^2+14z_1=0$.

De la deuxième relation, on tire $z_1^2-7z_1=0 \Rightarrow z_1(z_1-7)=0 \Rightarrow z_1=0$ ou $z_1=7$.

$z_1=0$ ne satisfait pas $z_1^3-11z_1^2+34z_1-42=0$.

Avec $z_1=7$, on a $7^3-11\cdot7^2+34\cdot7-42=343-539+238-42=0$.

Ainsi $z_1=7$ est une solution de $z^3-(11+2i)z^2+2(17+7i)z-42=0$.

Effectuons maintenant la division de $z^3-(11+2i)z^2+2(17+7i)z-42$ par $z-7$:

$$\begin{array}{rl|l}
 & z^3+(-11-2i)z^2+(34+14i)z-42 & z-7 \\ \cline{3-3}
- & (z^3\quad -7z^2) & z^2+(-4-2i)z+6 \\ \cline{1-2}
 & (-4-2i)z^2+(34+14i)z-42 & \\
- & ((-4-2i)z+(28+14i)z) & \\ \cline{1-2}
 & 6z-42 & \\
- & (6z-42) & \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Il nous reste à chercher les solutions de $z^2+(-4-2i)z+6=0$.

C'est une équation du 2^e degré de la forme $az^2+bz+c=0$ avec $a=1$, $b=-4-2i$ et $c=6$. On a $\Delta=b^2-4ac=(-4-2i)^2-4\cdot1\cdot6=16+16i+4i^2-24=-8+16i-4=$
$=-12+16i$. On doit maintenant chercher $\sqrt{\Delta}$.

On a $\Delta=-12+16i=r\operatorname{cis}\varphi$ où $r=\sqrt{(-12)^2+16^2}=\sqrt{144+256}=\sqrt{400}=20$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{16}{-12}\right)$
$=\tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right)=-53{,}13^\circ+k\cdot180^\circ$; ici, pour avoir $r\cos\varphi=-12$ et $r\sin\varphi=16$, on a $k=1$ et $\varphi=-53{,}13^\circ+180^\circ=126{,}87^\circ$.

Ainsi $\Delta=20\operatorname{cis}126{,}87^\circ$.

On a alors : $w_1=\sqrt{\Delta}=\sqrt{20}\operatorname{cis}\frac{126{,}87^\circ}{2}=\sqrt{20}\operatorname{cis}63{,}435^\circ=\sqrt{20}(\cos63{,}435^\circ+i\sin63{,}435^\circ)=$
$=2+4i$ et

$w_2=\sqrt{\Delta}=\sqrt{20}\operatorname{cis}\left(\frac{126{,}87^\circ}{2}+\frac{360^\circ}{2}\right)=\sqrt{20}\operatorname{cis}(243{,}435^\circ)=$
$=\sqrt{20}(\cos243{,}435^\circ+i\sin243{,}435^\circ)=-2-4i$.

Ainsi $\sqrt{\Delta}=\pm(2+4i)$.

Les solutions de $z^2+(-4-2i)z+6=0$ sont alors :

$$z=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+2i+2+4i}{2\cdot1}=\frac{6+6i}{2}=3+3i \text{ et } z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+2i-2-4i}{2\cdot1}=\frac{2-2i}{2}=1-i$$

Les 3 solutions de $z^3-(11+2i)z^2+2(17+7i)-42=0$ sont ainsi:

$z=7$, $z=3+3i$ et $z=1-i$.

Mettons-les sous forme trigonométrique:

$z=7 \Rightarrow z=7\operatorname{cis}0°$;

$z=3+3i \Rightarrow z=r\operatorname{cis}\varphi$ avec $r=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{9\cdot 2}=3\sqrt{2}$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{3}{3}\right)=$

$=\tan^{-1}(1)=45° \Rightarrow z=3\sqrt{2}\operatorname{cis}45°$;

$z=1-i \Rightarrow z=r\operatorname{cis}\varphi$ avec $r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{-1}{1}\right)=-45°=315°$

$\Rightarrow z=\sqrt{2}\operatorname{cis}315°$.

Exercice 7.26.

On a l'équation $z^3 - 9z^2 + kz - 39 = 0$ et on doit chercher la valeur (ou les valeurs) de k pour laquelle les solutions de cette équation sont alignés dans le plan complexe. Bien que cela ne soit pas explicite dans l'énoncé, on va chercher les $k \in \mathbb{R}$.

On considère une équation du 3e degré.
Voici la technique de recherche des solutions réelles d'une équation du 3e degré:

Soit l'équation: $ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$

Soient: $A = b^2 - 3ac$ et

$B = 2b^3 - 9abc + 27a^2d.$

On considère plusieurs cas:

1) $A = 0;$

2) $A \neq 0, B^2 - 4A^3 > 0;$

3) $A \neq 0, B^2 - 4A^3 = 0;$

4) $A \neq 0, B^2 - 4A^3 < 0.$

Les solutions de: $ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$ sont données par:

1) $x = -\frac{1}{3a}(b + \sqrt[3]{B});$

2) $x = -\frac{1}{3a}\left(b + \sqrt[3]{\frac{B - \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{B + \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}}\right);$

3) $x = -\frac{1}{3a}(b - \frac{B}{2A})$ (racine double) et

$x = -\frac{1}{3a}(b + \frac{B}{A})$ (racine simple);

4) $x = -\frac{1}{3a}(b - 2\sqrt{A}\cos(\varphi)),$

$x = -\frac{1}{3a}(b - 2\sqrt{A}\cos(\varphi + \frac{2\pi}{3})),$

$x = -\frac{1}{3a}(b - 2\sqrt{A}\cos(\varphi + \frac{4\pi}{3})),$ où $\cos(3\varphi) = -\frac{B}{2A^{\frac{3}{2}}}.$

Ici on a l'équation $z^3 - 9z^2 + kz - 39 = 0.$
On a donc $a = 1$, $b = -9$, $c = k$ et $d = -39.$
De plus: $A = b^2 - 3ac = (-9)^2 - 3 \cdot 1 \cdot k = 81 - 3k = 3(27 - k)$ et
$B = 2b^3 - 9abc + 27a^2d = 2 \cdot (-9)^3 - 9 \cdot 1 \cdot (-9) \cdot k + 27 \cdot 1^2 \cdot (-39) =$
$= -1458 + 81k - 1053 = 81k - 2511 = 81(k - 31)$
Ainsi $B^2 - 4A^3 = (81(k-31))^2 - 4(3(27-k))^3 = 6561(k-31)^2 - 4 \cdot 27(27-k)^3 =$

$= 6561(k^2 - 62k + 961) - 108(19'683 - 2187k + 81k^2 - k^3) =$

$= 6561k^2 - 406'782k + 6'305'121 - 2'125'764 + 236'196k - 8748k^2 + 108k^3 =$

$= 108k^3 - 2187k^2 - 170'586k + 4'179'357$

On va considérer les cas 1) à 4) ci-dessus et voir si on aboutit quelque part.

1) $A=0$: $A=0 \Longrightarrow 3(27-k)=0 \Longrightarrow 27-k=0 \Longrightarrow k=27$

$\Longrightarrow B = 81(27-31) = 81\cdot(-4) = -324$;

une solution de l'équation est $z_1 = -\frac{1}{3a}\left(b + \sqrt[3]{B}\right) =$

$= -\frac{1}{3}\left(-9 + \sqrt[3]{-324}\right) = 3 - \frac{1}{3}\sqrt[3]{-324} = 3 + \frac{1}{3}\sqrt[3]{324} =$

$= 3 + \frac{1}{3}\sqrt[3]{27\cdot 12} = 3 + \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt[3]{12} = 3 + \sqrt[3]{12}$;

effectuons la division de $z^3 - 9z^2 + kz - 39 = 0$ (avec $k=27$) par $z - (3+\sqrt[3]{12})$:

$$
\begin{array}{l|l}
z^3 - 9z^2 + 27z - 39 & z - (3+\sqrt[3]{12}) \\
\hline
-\left(z^3 - (3+\sqrt[3]{12})z^2\right) & z^2 + (-6+\sqrt[3]{12})z + 9 - 3\sqrt[3]{12} + (\sqrt[3]{12})^2 \\
\quad (-6+\sqrt[3]{12})z^2 + 27z - 39 & \\
-\left((-6+\sqrt[3]{12})z^2 + (18 + 3\sqrt[3]{12} - (\sqrt[3]{12})^2)z\right) & \\
\quad (9 - 3\sqrt[3]{12} + (\sqrt[3]{12})^2)z - 39 & \\
-\left((9 - 3\sqrt[3]{12} + (\sqrt[3]{12})^2)z - 39\right) & \\
\quad 0 &
\end{array}
$$

(on a $-(3+\sqrt[3]{12})(-6+\sqrt[3]{12}) = -\left(-18 + 3\sqrt[3]{12} - 6\sqrt[3]{12} + (\sqrt[3]{12})^2\right) =$

$= -\left(-18 - 3\sqrt[3]{12} + (\sqrt[3]{12})^2\right) = 18 + 3\sqrt[3]{12} - (\sqrt[3]{12})^2$ et

$-(3+\sqrt[3]{12})\left(9 - 3\sqrt[3]{12} + (\sqrt[3]{12})^2\right) =$

$= -\left(27 \cancel{- 9\sqrt[3]{12}} \cancel{+ 3(\sqrt[3]{12})^2} \cancel{+ 9\sqrt[3]{12}} \cancel{- 3(\sqrt[3]{12})^2} + 12\right) =$

$= -(27+12) = -39$).

On cherche maintenant les zéros de $z^2 + (-6+\sqrt[3]{12})z + 9 - 3\sqrt[3]{12} + (\sqrt[3]{12})^2$, autrement les solutions de l'équation du 2e degré $a_1z^2 + b_1z + c_1 = 0$ avec $a_1 = 1$, $b_1 = -6 + \sqrt[3]{12}$ et $c_1 = 9 - 3\sqrt[3]{12} + (\sqrt[3]{12})^2$; on a

$\Delta_1 = b_1^2 - 4a_1c_1 = (-6+\sqrt[3]{12})^2 - 4\cdot 1\cdot\left(9 - 3\sqrt[3]{12} + (\sqrt[3]{12})^2\right) =$

$= \cancel{36} \cancel{- 12\sqrt[3]{12}} + (\sqrt[3]{12})^2 \cancel{- 36} \cancel{+ 12\sqrt[3]{12}} - 4(\sqrt[3]{12})^2 = -3(\sqrt[3]{12})^2$ et

$\sqrt{\Delta_1} = \sqrt{-3(\sqrt[3]{12})^2} = \sqrt[3]{12}\sqrt{-3} = \sqrt[3]{12}\sqrt{3}\,i$;

les solutions sont ainsi $z_2 = \frac{-b_1 + \sqrt{\Delta_1}}{2a_1} = \frac{6 - \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{12}\sqrt{3}\,i}{2} =$

$= \frac{6 - \sqrt[3]{12}}{2} + \frac{\sqrt[3]{12}\sqrt{3}}{2}i$ et $z_3 = \frac{-b_1 - \sqrt{\Delta_1}}{2a_1} = \frac{6 - \sqrt[3]{12}}{2} - \frac{\sqrt[3]{12}\sqrt{3}}{2}i$.

En résumé, les 3 solutions de $z^3-9z^2+kz-39=0$ avec $k=27$ sont:

$$z_1=3+\sqrt[3]{12},$$
$$z_2=\frac{6-\sqrt[3]{12}}{2}+\frac{\sqrt[3]{12}\sqrt{3}}{2}i,$$
$$z_3=\frac{6-\sqrt[3]{12}}{2}-\frac{\sqrt[3]{12}\sqrt{3}}{2}i.$$

Comme $Re(z_2)=Re(z_3)=\frac{6-\sqrt[3]{12}}{2}$, pour que z_1, z_2, z_3 soient alignées dans le plan complexe, il faudrait que $Re(z_1)=\frac{6-\sqrt[3]{12}}{2}$ aussi. Or, ce n'est pas le cas: $Re(z_1)=3+\sqrt[3]{12}$.

Ainsi les solutions ne sont pas alignées dans ce cas.

3) $A\neq 0$ et $B^2-4A^3=0$: $B^2-4A^3=0 \Rightarrow 108k^3-2187k^2-170'586k+4'179'357=0$

$\overset{:27}{\Longrightarrow} 4k^3-81k^2-6318k+154'791=0$, ce qui est une équation du 3e degré de la forme $a_2k^3+b_2k^2+c_2k+d_2=0$ avec $a_2=4$, $b_2=-81$, $c_2=-6318$ et $d_2=154'791$; on a:

$A_2=b_2^2-3a_2c_2=(-81)^2-3\cdot4\cdot(-6318)=6561+75'816=82'377$ et

$B_2=2b_2^3-9a_2b_2c_2+27a_2^2d_2=2\cdot(-81)^3-9\cdot4\cdot(-81)\cdot(-6318)+27\cdot4^2\cdot154'791=$
$=-1'062'882-18'423'288+66'869'712=47'383'542$; de plus:

$B_2^2-4A_2^3=47'383'542^2-4\cdot82'377^3=12'424'291'478'752>0$ avec $A_2\neq0$;

on est donc dans le cas 2) de la résolution des équations du 3e degré et on obtient comme solution réelle:

$$k=-\frac{1}{3a_2}\left(b_2+\sqrt[3]{\frac{B_2-\sqrt{B^2-4A^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{B_2+\sqrt{B^2-4A^3}}{2}}\right)=$$
$$=-\frac{1}{3\cdot4}\left(-81+\sqrt[3]{\frac{47'383'542-3'524'810,843}{2}}+\sqrt[3]{\frac{47'383'542+3'524'810,843}{2}}\right)=$$
$$=-\frac{1}{12}(-81+279,9+294,2)=-\frac{1}{12}\cdot493,1=-41,0965$$

Ainsi, avec $k=-41,0965$, on a $A\neq0$ et $B^2-4A^3=0$. On est donc dans le cas 3) de la résolution des équations du 3e degré et on obtient 3 solutions réelles:

– solution double: $z_1=-\frac{1}{3a}\left(b-\frac{B}{2A}\right)$ avec $a=1$, $b=-9$,
$A=3(27-k)=3(27-(-41,0965))=204,29$ et
$B=81(k-31)=81(-41,0965-31)=-5839,82$
$\Rightarrow z=-\frac{1}{3}\left(-9-\frac{-5839,82}{2\cdot204,29}\right)=-1,764$

– solution simple: $z_2=-\frac{1}{3a}\left(b+\frac{B}{A}\right)=-\frac{1}{3}\left(-9+\frac{-5839,82}{204,29}\right)=12,529.$

Ainsi, si $k=-41,0965$, les 3 solutions sont $z_1=-1,764$ (solution double) et $z_2 = 12{,}529$ (solution simple) et elles sont alignées sur l'axe réel.

2) $A \neq 0$, $B^2 - 4A^3 > 0$: $B^2 - 4A^3 = 108k^3 - 2187k^2 - 130'586k + 4'179'357 > 0$;

comme l'unique solution réelle de $108k^3 - 2187k^2 - 130'586k + 4'179'357 = 0$ est $k = -41{,}0965$, on aura $B^2 - 4A^3 > 0$ si $k > -41{,}0965$;

on a donc $k > -41{,}0965$ et, ainsi,

$$z_0 = -\frac{1}{3a}\left(b + \sqrt[3]{\frac{B - \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{B + \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(-9 + \sqrt[3]{\frac{B - \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{B + \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}}\right) =$$

$$= 3 - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{B - \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{B + \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}} \quad \text{avec } A = 3(27 - k),$$

$B = 81(k - 31)$ et $B^2 - 4A^3 = 108k^3 - 2187k^2 - 130'586k + 4'179'357$.

Effectuons la division de $z^3 - 9z^2 + kz - 39$ par $z - z_0$:

$$\begin{array}{l|l}
z^3 - 9z^2 + kz - 39 & z - z_0 \\
\cline{2-2}
\underline{-(z^3 - z_0 z^2)} & z^2 + (z_0 - 9)z + z_0^2 - 9z_0 + k \\
(z_0 - 9)z^2 + kz - 39 & \\
\underline{-\left((z_0 - 9)z^2 - (z_0^2 - 9z_0)z\right)} & \\
(z_0^2 - 9z_0 + k)z - 39 & \\
\underline{-\left((z_0^2 - 9z_0 + k)z - (z_0^3 - 9z_0^2 + kz_0)\right)} & \\
z_0^3 - 9z_0^2 + kz_0 - 39 &
\end{array}$$

Le reste est bien nul puisque z_0 est solution de $z^3 - 9z^2 + kz - 39 = 0$.

Cherchons maintenant les solutions de $z^2 + (z_0 - 9)z + z_0^2 - 9z_0 + k = 0$ avec $k > -41{,}0965$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $a_2 z^2 + b_2 z + c_2 = 0$ avec $a_2 = 1$, $b_2 = z_0 - 9$ et $c_2 = z_0^2 - 9z_0 + k$;

on a $\Delta = b_2^2 - 4a_2c_2 = (z_0 - 9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (z_0^2 - 9z_0 + k) =$

$= z_0^2 - 18z_0 + 81 - 4z_0^2 + 36z_0 - 4k = -3z_0^2 + 18z_0 + 81 - 4k$.

Comme $z^3 - 9z^2 + kz - 39 = 0$ n'a que z_0 comme solution réelle, on doit avoir $\Delta < 0$; ainsi $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-3z_0^2 + 18z_0 + 81 - 4k} =$

$= \sqrt{3z_0^2 - 18z_0 - 81 + 4k}\, i$; les solutions de $z^2 + (z_0 - 9)z + z_0^2 - 9z_0 + k = 0$ sont alors :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - z_0 + \sqrt{-3z_0^2 + 18z_0 + 81 - 4k}}{2} =$$

$$= \frac{9 - z_0}{2} + \frac{\sqrt{3z_0^2 - 18z_0 - 81 + 4k}}{2}\, i \quad \text{et}$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 - z_0}{2} - \frac{\sqrt{3z_0^2 - 18z_0 - 81 + 4k}}{2}\, i.$$

En résumé, si $k > -41{,}0965$, les 3 solutions de $z^3 - 9z^2 + kz - 39 = 0$ sont:

$$z_0 = 3 - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{B - \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{B + \sqrt{B^2 - 4A^3}}{2}},$$

$$z_1 = \frac{9 - z_0}{2} + \frac{\sqrt{3z_0^2 - 18z_0 - 81 + 4k}}{2}\, i \quad \text{et}$$

$$z_2 = \frac{9 - z_0}{2} - \frac{\sqrt{3z_0^2 - 18z_0 - 81 + 4k}}{2}\, i.$$

Comme les parties réelles de z_1 et z_2 sont égales: $Re(z_1) = Re(z_2) = \frac{9 - z_0}{2}$, pour que z_1, z_2 et z_3 soient alignés, il faut que $Re(z_0) = \frac{9 - z_0}{2}$ aussi.

Comme $z_0 \in \mathbb{R}$, on a $Re(z_0) = z_0$.

$$Re(z_0) = \frac{9 - z_0}{2} \Rightarrow z_0 = \frac{9 - z_0}{2} \Rightarrow 2z_0 = 9 - z_0 \Rightarrow 3z_0 = 9 \Rightarrow z_0 = 3.$$

Avec $z_0 = 3$ solution de $z^3 - 9z^2 + kz - 39 = 0$, on a

$$3^3 - 9 \cdot 3^2 + 3k - 39 = 0 \Rightarrow 27 - 81 + 3k - 39 = 0$$

$$\Rightarrow 3k - 93 = 0 \Rightarrow 3k = 93 \Rightarrow k = 31. \quad (31 > -41{,}0965)$$

En outre, $z_1 = \frac{9 - z_0}{2} + \frac{\sqrt{3z_0^2 - 18z_0 - 81 + 4k}}{2}\, i = \frac{9 - 3}{2} + \frac{\sqrt{3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 - 81 + 4 \cdot 31}}{2}\, i =$

$$= 3 + \frac{\sqrt{27 - 54 - 81 + 124}}{2}\, i = 3 + \frac{\sqrt{16}}{2}\, i = 3 + 2i \quad \text{et}$$

$$z_2 = \frac{9 - z_0}{2} - \frac{\sqrt{3z_0^2 - 18z_0 - 81 + 4k}}{2}\, i = 3 - 2i.$$

Ainsi, avec $k = 31$, les 3 solutions sont $z_0 = 3$, $z_1 = 3 + 2i$ et $z_2 = 3 - 2i$ et elles sont alignées.

4) $A \neq 0$, $B^2 - 4A^3 < 0 \Rightarrow k < -41{,}0965$ (voir ci-dessus).

On a alors les 3 solutions réelles suivantes:

$$z_1 = -\frac{1}{3a}\left(b - 2\sqrt{A}\cos(\varphi)\right),$$

$$z_2 = -\frac{1}{3a}\left(b - 2\sqrt{A}\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

$$z_3 = -\frac{1}{3a}\left(b - 2\sqrt{A}\cos\left(\varphi + \frac{4\pi}{3}\right)\right),$$

où $a = 1$, $b = -9$, $A = 3(27 - k)$ (> 0 si $k < -41{,}0965$) et φ est tel que $\cos(3\varphi) = -\frac{B}{2A^{3/2}}$, $B = 81(k - 31)$.

Dans ce cas-là, les 3 solutions z_1, z_2, z_3 sont alignées sur l'axe réel du plan de Gauss.

En résumé:

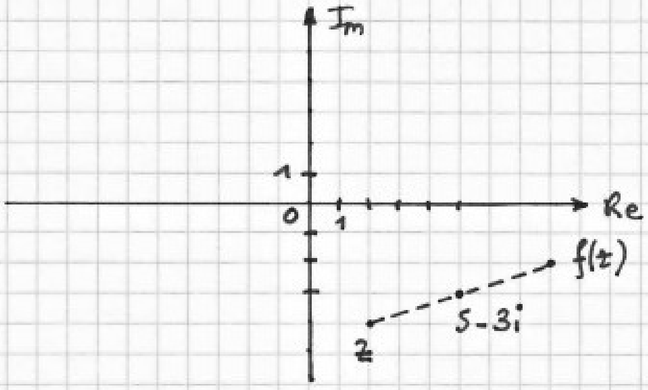
Les solutions de l'équation $z^3 - 9z^2 + kz - 39 = 0$ sont alignées dans le plan de Gauss dans les cas suivants:

a) $k = -41,0965$, les solutions sont $z_1 = -1,764$ (solution double) et $z_2 = 12,529$ (solution simple), alignées sur l'axe réel;

b) $k = 31$, les solutions sont $z_1 = 3$, $z_2 = 3+2i$ et $z_3 = 3-2i$, alignées sur la droite $x = 3$ (x = partie réelle);

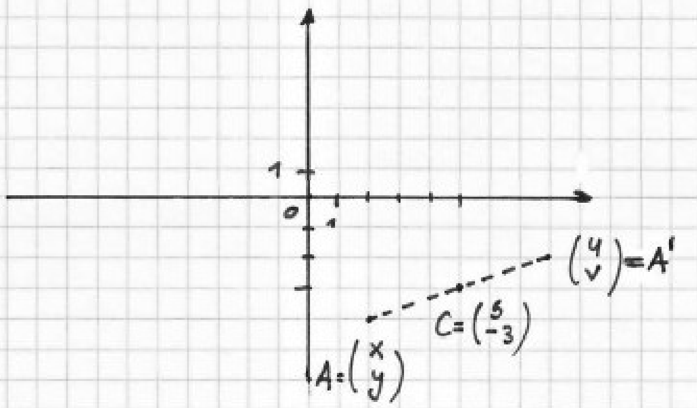
c) $k < -41,0965$, les solutions z_1, z_2 et z_3 sont réelles et donc alignées sur l'axe réel (voir ci-dessous pour les détails).

Exercice 7.17.



Posons $z = x+iy$ et $f(z) = u+iv$.

Dans le plan, on a:



On a $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA} =$

$$= 2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = 2\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-x \\ -6-y \end{pmatrix}.$$

On a ainsi $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-x \\ -6-y \end{pmatrix}$, d'où $u = 10-x$ et $v = -6-y$.

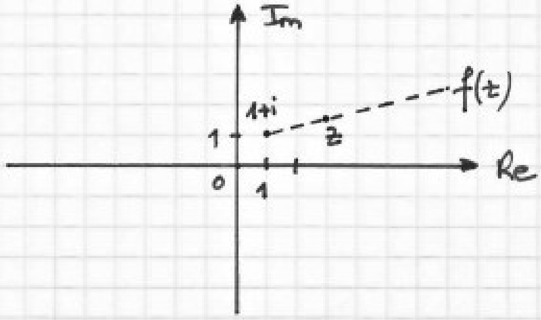
En revenant aux complexes, on obtient $f(z) = u+iv = 10-x+(-6-y)i =$

$$= 10-x-6i-yi = 10-6i-(x+yi) = 10-6i-z.$$

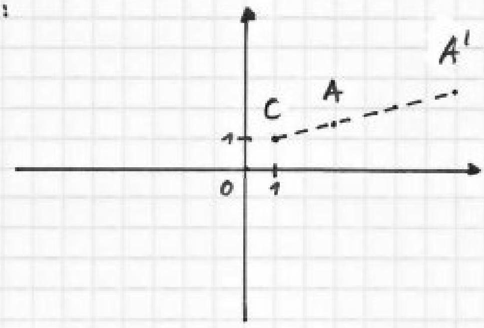
Ainsi $f(z) = -z+10-6i$.

Exercice 7.28.

f est une homothétie de centre $1+i$ et de rapport 3 :



Dans le plan euclidien, on a :



On a : $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ si on pose $z = x+iy$ et $A' = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ si on pose $f(z) = u+iv$.

De plus $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OC} + 3(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OC} =$

$= 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OC} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2 \\ 3y-2 \end{pmatrix}$.

On doit donc avoir $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2 \\ 3y-2 \end{pmatrix}$, d'où $u = 3x-2$ et $v = 3y-2$.

Ainsi, dans les complexes, $f(z) = u+iv = (3x-2) + (3y-2)i =$

$= 3x - 2 + 3yi - 2i = 3(x+iy) - 2 - 2i = 3z - 2 - 2i$, puisque $z = x+iy$.

g est une homothétie de centre $4+3i$ et de rapport $\frac{1}{2}$:

Similairement à ci-dessous, on a : $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $z = x+iy$ et $A' = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ avec $g(z) = u+iv$.

De plus, $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2}+2 \\ \frac{y}{2}+\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

On doit donc avoir $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2}+3 \\ \frac{y}{2}+\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, d'où $u = \frac{x}{2}+2$ et $v = \frac{y}{2}+\frac{3}{2}$.

Ainsi, dans les complexes, $g(z) = u+iv = \frac{x}{2}+3+\left(\frac{y}{2}+\frac{3}{2}\right)i = \frac{x}{2}+2+\frac{y}{2}i+\frac{3}{2}i =$

$= \frac{1}{2}(x+iy) + 2 + \frac{3}{2}i = \frac{1}{2}z + 2 + \frac{3}{2}i$, puisque $z = x+iy$.

Ainsi, on a $f(z) = 3z - 2 - 2i$ et $g(z) = \frac{1}{2}z + 2 + \frac{3}{2}i$.

On a $g\circ f(z) = g(f(z)) = \frac{1}{2}f(z) + 2 + \frac{3}{2}i = \frac{1}{2}(3z - 2 - 2i) + 2 + \frac{3}{2}i =$

$= \frac{3}{2}z - 1 - i + 2 + \frac{3}{2}i = \frac{3}{2}z + 1 + \frac{1}{2}i$

En posant $z = x + iy$ et $g\circ f(z) = u + iv$, on obtient $u + iv = \frac{3}{2}(x+iy) + 1 + \frac{1}{2}i$

$\Rightarrow u + iv = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}yi + 1 + \frac{1}{2}i = \frac{3}{2}x + 1 + \left(\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\right)i$,

d'où $u = \frac{3}{2}x + 1$ et $v = \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}$

Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a :

$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x + 1 \\ \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x \\ \frac{3}{2}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; on en déduit

que le rapport d'homothétie vaut $\frac{3}{2}$; reste à trouver le centre d'homothétie

$C = a + bi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

On doit avoir $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA'}$, d'où $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{CA'}$; or $\overrightarrow{CA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$;

ainsi $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA'} - \frac{3}{2}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA'} - \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OC}$;

de $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} - \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OC}$, on tire $\frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA'}$, d'où

$\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OA'}$; comme $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x + 1 \\ \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, on obtient

$\overrightarrow{OC} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} \frac{3}{2}x + 1 \\ \frac{3}{2}y + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3x + 2 \\ 3y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 3x - 2 \\ 3y - 3y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le centre de l'homothétie est donc $C = -2 - i$.

Par conséquent, $g\circ f(z)$ est bien une homothétie, son centre est $-2-i$ et son rapport est $\frac{3}{2}$.

Exercice 7.29.

On a $f(z)=\dfrac{z-2i}{z-1}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

a. $z=-2i$: $f(z)=\dfrac{-2i-2i}{-2i-1}=\dfrac{-4i}{-2i-1}=\dfrac{4i}{2i+1}=\dfrac{4i(2i-1)}{(2i+1)(2i-1)}=\dfrac{8i^2-4i}{4i^2-1^2}=\dfrac{-8-4i}{-4-1}=$

$=\dfrac{-8-4i}{-5}=\dfrac{8}{5}+\dfrac{4}{5}i$;

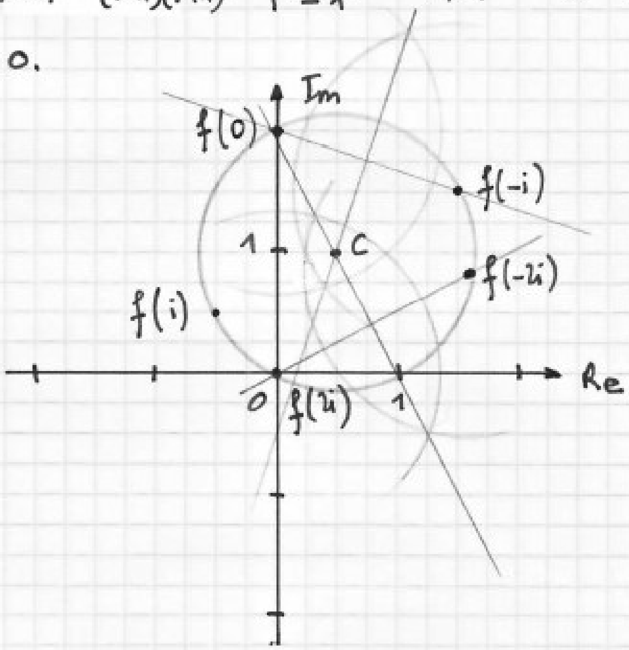
$z=-i$: $f(z)=\dfrac{-i-2i}{-i-1}=\dfrac{-3i}{-i-1}=\dfrac{3i}{i+1}=\dfrac{3i(i-1)}{(i+1)(i-1)}=\dfrac{3i^2-3i}{i^2-1^2}=\dfrac{-3-3i}{-1-1}=\dfrac{-3-3i}{-2}=$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$;

$z=0$: $f(z)=\dfrac{-2i}{-1}=2i$;

$z=i$: $f(z)=\dfrac{i-2i}{i-1}=\dfrac{-i}{i-1}=\dfrac{-i(i+1)}{(i-1)(i+1)}=\dfrac{-i^2-i}{i^2-1^2}=\dfrac{1-i}{-1-1}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$;

$z=2i$: $f(z)=\dfrac{2i-2i}{2i-1}=0$.



b. Par dessin, on voit que les 5 points sont sur un cercle de centre $C=\frac{1}{2}+i$ et de rayon $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Vérifions ceci par calcul:

distance de $f(2i)=0$ à $C=\frac{1}{2}+i$ $=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ (voir ci-dessus);

distance de $f(i)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ $=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2+\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1^2+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$;

distance de $f(0)=2i$ à $C=\frac{1}{2}+i$ $=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(1-2)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$;

distance de $f(-i)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$ à $C=\frac{1}{2}+i$ $=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{(-1)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$;

distance de $f(-2i)=\frac{8}{5}+\frac{4}{5}i$ à $C=\frac{1}{2}+i$ $=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{8}{5}\right)^2+\left(1-\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{11}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{121}{100}+\frac{1}{25}}=\sqrt{\frac{125}{100}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$;

ainsi les 5 points sont tous à une distance de $\frac{\sqrt{5}}{2}$ de $C=\frac{1}{2}+i$, d'où le fait qu'ils sont tous sur le cercle de centre $C=\frac{1}{2}+i$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

c. On pose $z = x+iy$. On a alors $f(z) = \dfrac{z-2i}{z-1} = \dfrac{x+iy-2i}{x+iy-1} = \dfrac{x+yi-2i}{x-1+iy} =$

$$= \frac{(x+yi-2i)(x-1-iy)}{(x-1+iy)(x-1-iy)} = \frac{x^2-x-\cancel{ixy}+\cancel{ixy}-yi-y^2i^2-2ix+2i+2i^2y}{(x-1+iy)(x-1-iy)} =$$

$$= \frac{x^2-x-yi+y^2-2xi+2i-2y}{(x-1)^2-i^2y^2} = \frac{x^2+y^2-x-2y-2xi-yi+2i}{(x-1)^2+y^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-x-2y}{(x-1)^2+y^2} + \frac{-2x-y+2}{(x-1)^2+y^2}\, i.$$

d. $E_1 = \{z \mid f(z) \in \mathbb{R}\}$: $f(z) \in \mathbb{R} \Rightarrow \dfrac{-2x-y+2}{(x-1)^2+y^2} = 0$ (partie imaginaire nulle)

$\Rightarrow -2x-y+2 = 0 \Rightarrow y = -2x+2$;

comme $z = x+iy$, on obtient $z = x + i(-2x+2)$, ce qui est une droite.

$E_2 = \{z \mid \arg(f(z)) = \frac{\pi}{4} = 45°\}$: si on note $f(z) = u+iv$, on a $\arg(f(z)) = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$;

ici $u = \dfrac{x^2+y^2-x-2y}{(x-1)^2+y^2}$ et $v = \dfrac{-2x-y+2}{(x-1)^2+y^2}$; on a $\dfrac{v}{u} =$

$$= \frac{-2x-y+2}{(x-1)^2+y^2} : \frac{x^2+y^2-x-2y}{(x-1)^2+y^2} = \frac{-2x-y+2}{(x-1)^2+y^2} \cdot \frac{(x-1)^2+y^2}{x^2+y^2-x-2y} =$$

$= \dfrac{-2x-y+2}{x^2+y^2-x-2y}$; en outre, on doit avoir $\tan^{-1}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\pi}{4} = 45°$,

d'où $\dfrac{u}{v} = \tan(45°) = 1$; en outre $u = r\cos 45° > 0$ et

$v = r\sin 45° > 1$; on doit donc avoir

$\dfrac{-2x-y+2}{x^2+y^2-x-2y} = 1$ avec $\dfrac{x^2+y^2-x-2y}{(x-1)^2+y^2} > 0$ et $\dfrac{-2x-y+2}{(x-1)^2+y^2} > 0$,

d'où $-2x-y+2 = x^2+y^2-x-2y$ avec $x^2+y^2-x-2y > 0$ et $-2x-y+2 > 0$;

$-2x-y+2 > 0 \Rightarrow y < -2x+2$;

$x^2+y^2-x-2y > 0 \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y-1)^2 - 1 > 0$

$\Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 > \frac{5}{4} \Rightarrow$ ce sont les points en dehors du cercle de centre $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$;

$-2x-y+2 = x^2+y^2-x-2y \Rightarrow x^2+y^2+x-y-2 = 0$

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 = 0$

$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$;

ainsi E_2 est le cercle centré en $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ et de rayon

$r = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ satisfaisant à $y < -2x+2$

et $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 > \frac{5}{4}$.

e. Soit $w \in \mathbb{C}$.

$$f(z) = w \Rightarrow w = \frac{z-2i}{z-1} \Rightarrow w(z-1) = z-2i$$

$$\Rightarrow wz - w = z - 2i \Rightarrow wz - z = w - 2i$$

$$\Rightarrow z(w-1) = w - 2i \Rightarrow z = \frac{w-2i}{w-1}.$$

L'application est injective : à un w donné correspond un unique z (sauf pour $w = 1$).

L'application n'est pas surjective : on ne peut pas obtenir $z = 1$ ($z = 1$ n'appartient pas au domaine de définition de f).

Elle n'est donc pas bijective.

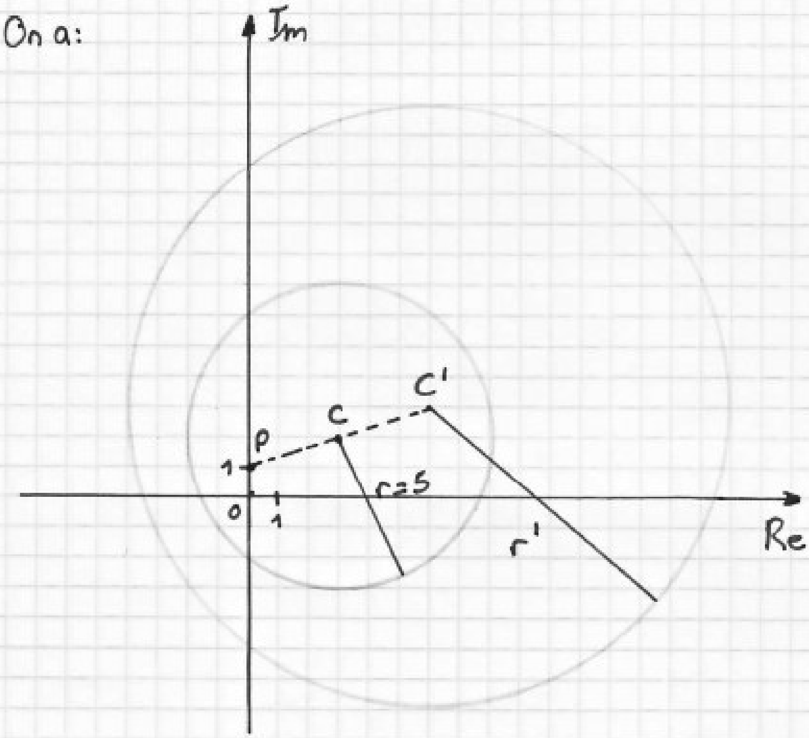
Exercice 7.30.

On a $w = 3+2i+5\,cis(\beta)$.

a. $z = 5\,cis(\beta)$ est le cercle centré à l'origine de rayon 5.
Ainsi $w = 3+2i+5\,cis(\beta)$ est le cercle centré en $3+2i$ et de rayon 5.

b. On a $w = 3+2i+5\left(\cos(\beta)+i\sin(\beta)\right) = 3+2i+5\cos(\beta)+5\sin(\beta)i =$
$= 3+5\cos(\beta)+\left(2+5\sin(\beta)\right)i$.
En posant $t=\beta \in [0;2\pi]$, les équations paramétriques sont: $\begin{cases} x = 3+5\cos(t) \\ y = 2+5\sin(t). \end{cases}$

c. On a:

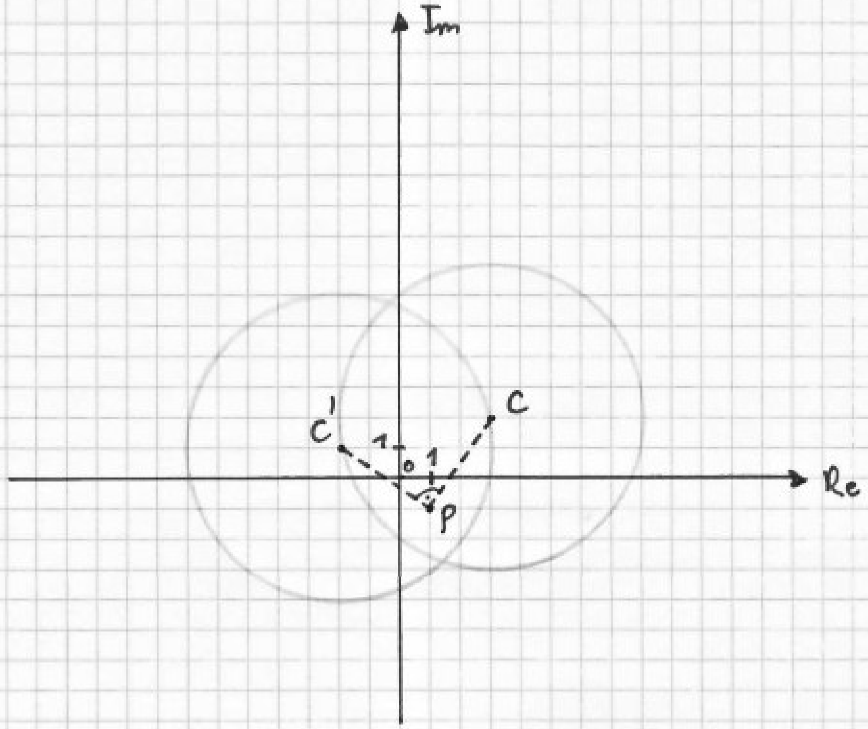


On a : C = centre du cercle décrit par $w = (3;2)$;
P = centre d'homothétie $= (0;1)$;
k = rapport d'homothétie $= 2$;
C' = image de C par l'homothétie;
r' = rayon du cercle image.

De plus: $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC'} = \overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PC}$ puisque $k=2$
$= \overrightarrow{OP}+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP} =$
$= 2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ et
$r' = 2\cdot r = 2\cdot 5 = 10$.

Ainsi l'image par l'homothétie est le cercle centré en $6+3i$ et de rayon 10.

d. On a:



On a : C = centre du cercle décrit par $w = (3;2)$;

P = centre de rotation $= (1;-1)$;

θ = angle de rotation $= 90°$;

C' = image de C par la rotation.

Avec $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{PC'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (voir dessin).

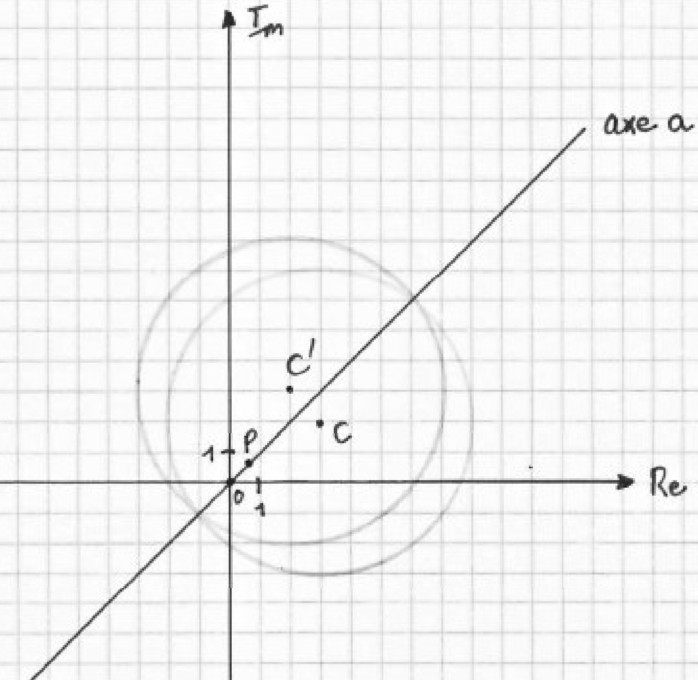
Comme $\overrightarrow{PC'} = \overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OP}$, on a $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{PC'} + \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $C' = (-2;1)$.

Le rayon reste bien sûr le même.

Ainsi l'image de la rotation est le cercle centré en $-2+i$ et de rayon 5.

e. On a $\text{cis}(45°) = \cos(45°) + i\sin(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$:



On a : C = centre du cercle décrit par $w = (3;2)$;

$P = \text{cis}(45°) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

C' = image de C par la symétrie axiale.

D'après le dessin, on a clairement $C' = (2;3)$

Le rayon reste bien sûr le même.

Ainsi l'image de la symétrie axiale est le cercle centré en $2+3i$ et de rayon 5.

f. Voir ci-dessus.

Exercice 7.31.

On a $z_1 = 1-i$ et $z_2 = 1$.

Une progression géométrique est telle que $z_{j+1} = k \cdot z_j$, où $k \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}^*$.

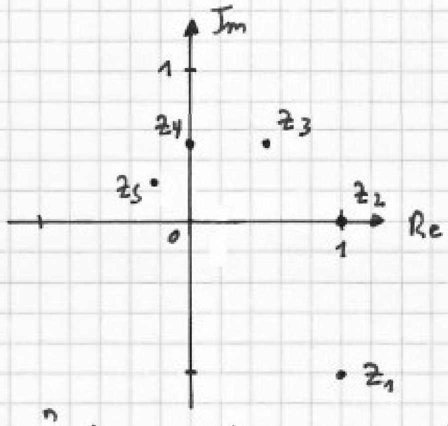
a. On a $k = \frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{1^2 - i^2} = \frac{1+i}{1+1} = \frac{1+i}{2}$.

Ainsi $z_3 = k \cdot z_2 = \frac{1+i}{2} \cdot 1 = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$;

$z_4 = k \cdot z_3 = \frac{1+i}{2} \cdot \frac{1+i}{2} = \frac{1^2 + 2i + i^2}{4} = \frac{1+2i-1}{4} = \frac{2i}{4} = \frac{1}{2}i$;

$z_5 = k \cdot z_4 = \frac{1+i}{2} \cdot \frac{1}{2}i = \frac{i+i^2}{4} = \frac{i-1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$.

b.



c. Commençons par calculer $\sum_{j=1}^{n} |z_{j+1} - z_j|$, ce qui est égal à la longueur de la ligne polygonale passant par $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

On a $z_{j+1} = k \cdot z_j$ et $|z_{j+1} - z_j| = |k \cdot z_j - z_j| = |(k-1) \cdot z_j| = \left|\left(\frac{1+i}{2} - 1\right) \cdot z_j\right| =$

$= \left|\frac{i-1}{2} \cdot z_j\right|$.

En posant $z_j = u + vi$, on a $\frac{i-1}{2} \cdot z_j = \frac{i-1}{2}(u+vi) = \frac{ui + vi^2 - u - vi}{2} = \frac{ui - v - u - vi}{2} =$

$= \frac{-u-v}{2} + \frac{u-v}{2}i$ et $\left|\frac{i-1}{2} \cdot z_j\right| = \sqrt{\left(\frac{-u-v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{u^2 + 2uv + v^2}{4} + \frac{u^2 - 2uv + v^2}{4}} = \sqrt{\frac{2u^2 + 2v^2}{4}} = \sqrt{\frac{u^2+v^2}{2}} = \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{2}} = \frac{|z_j|}{\sqrt{2}}$, puisque $|z_j| = \sqrt{u^2+v^2}$.

Ainsi $|z_{j+1} - z_j| = \frac{|z_j|}{\sqrt{2}}$.

En outre : $|z_1| = |1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$; $|z_2| = |1| = 1$; $|z_3| = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| =$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $|z_4| = \left|\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$; $|z_5| = \left|-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{2}{16}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; etc.

On peut donc penser que $|z_j| = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^{j-1}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}^{1-j} = \sqrt{2}^{2-j}$.

Montrons-le par récurrence :

$j = 1$: $|z_1| = \sqrt{2}^{2-1} = \sqrt{2} \to$ OK ;

supposons la relation vraie pour $j \geqslant 1$ et montrons-la pour $j+1$:

$|z_{j+1}| = |k \cdot z_j| = \frac{|z_j|}{\sqrt{2}}$ (voir ci-dessus) ; puisque, par hypothèse de récurrence,

$|z_j| = \sqrt{2}^{2-j}$, on a $|z_{j+1}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2}^{2-j} = \sqrt{2}^{2-(j+1)}$ CQFD.

On a ainsi $|z_{j+1} - z_j| = \frac{1}{\sqrt{2}} |z_j| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2}^{2-j} = (\sqrt{2})^{1-j} = \frac{1}{(\sqrt{2})^{j-1}}$.

Par conséquent, $\sum_{j=1}^{n} |z_{j+1} - z_j| = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(\sqrt{2})^{j-1}}$.

La suite $\frac{1}{(\sqrt{2})^{j-1}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.

Ainsi $\sum_{j=1}^{\infty} |z_{j+1} - z_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^{j-1}} = \frac{1}{(\sqrt{2})^{1-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} =$

$$= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{2+\sqrt{2}}{2-1} = 2 + \sqrt{2}.$$

La longueur de la ligne polygonale passant par $z_1, z_2, z_3, \ldots$ est $2+\sqrt{2}$.

Exercice 7.32.

A résoudre $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$.

On remarque tout d'abord que $z_1=-1$ est solution car
$(-1)^5+(-1)^4+(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=-1+1-1+1-1+1=0$.

Divisons $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$ par $z+1$:

$$\begin{array}{r|l} z^5+z^4+z^3+z^2+z+1 & z+1 \\ \hline -(z^5+z^4) & z^4+z^2+1 \\ \hline z^3+z^2+z+1 & \\ -(z^3+z^2) & \\ \hline z+1 & \\ -(z+1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Il faut maintenant chercher les solutions de $z^4+z^2+1=0$.

C'est une équation biquadratique. On pose $w=z^2$ et on obtient l'équation w^2+w+1.

On a $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3$ et $\sqrt{\Delta}=\sqrt{-3}=\sqrt{3}\,i$.

Les solutions de w^2+w+1 sont ainsi $w_1=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et
$w_2=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Mettons w_1 et w_2 sous la forme $r\,\text{cis}\,\varphi$:

$w_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$: $r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$ et
$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}/2}{-1/2}\right)=\tan^{-1}(\sqrt{3})=120°$; ainsi $w_1=\text{cis}\,120°$;

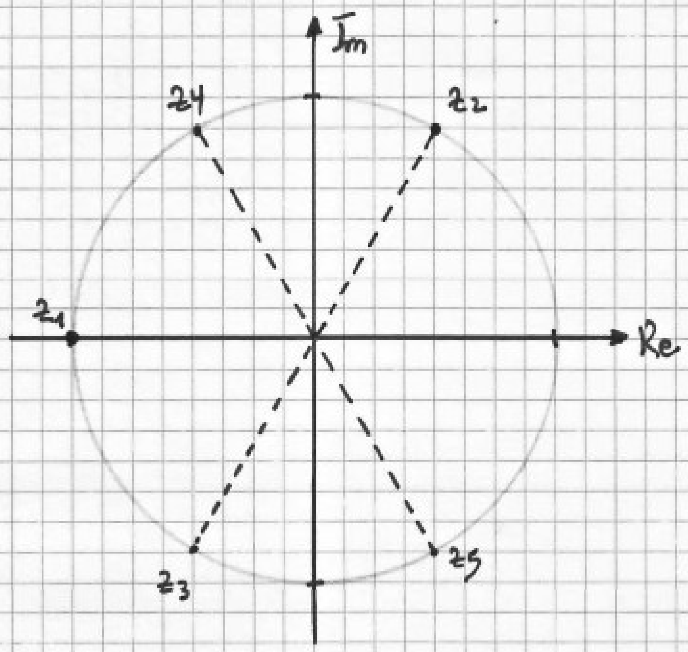
$w_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$: $r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2}\right)=\tan^{-1}(\sqrt{3})=240°$;
ainsi $w_2=\text{cis}\,(300°)$.

Avec $w_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $w=z^2$, on obtient $z_2=\text{cis}\,(60°)$ et $z_3=\text{cis}\,(60°+180°)=\text{cis}\,(240°)$.
Avec $w_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $w=z^2$, on obtient $z_4=\text{cis}\,(120°)$ et $z_5=\text{cis}\,(120°+180°)=\text{cis}\,(300°)$.

Les solutions de $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$ sont donc:

$$\begin{cases} z_1=-1 \\ z_2=\text{cis}(60°) \\ z_3=\text{cis}(240°) \\ z_4=\text{cis}\,(120°) \\ z_5=\text{cis}\,(300°) \end{cases}$$

Comme $z_1=-1=\text{cis}\,(180°)$, on peut les résumer en $z=\text{cis}\,(k\cdot60°)$,
$k=1,2,3,4,5$.



Im
z4
z2
z1
Re
z3
z5

Exercice 7.33.

a. On a $z_0 = 3+4i$.

Son module est $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$.

Son argument est $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \simeq 53,13°$.

b. On a : $z \longmapsto z-2+i \longmapsto (3+4i)(z-2+i) \longmapsto w = (3+4i)(z-2+i)+2-i$.

$z \longmapsto z-2+i$ correspond à une translation de vecteur $\binom{-2}{1}$.

$z' \longmapsto (3+4i)z' = 5\,\text{cis}(53,13°)\, r\,\text{cis}\,\varphi$ avec $z' = r\,\text{cis}\,\varphi$; ainsi

$(3+4i)z' = 5r\,\text{cis}(53,13°)\,\text{cis}\,\varphi = 5r\,\text{cis}(53,13°+\varphi)$; donc

$z' \longmapsto (3+4i)z'$ correspond à une rotation autour de l'origine d'angle $53,13°$ et à une homothétie de centre à l'origine et de facteur 5.

Par conséquent :

$z \longmapsto w = (3+4i)(z-2+i)+2-i$ correspond à une rotation autour de $2-i$ et d'angle $53,13°$ et à une homothétie de centre $2-i$ et de facteur 5.

c. On a $w = (3+4i)(z-2+i)+2-i$.

Ainsi $(3+4i)(z-2+i) = w-2+i$

$$\Rightarrow z-2+i = \frac{w-2+i}{3+4i} = \frac{(w-2+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{(w-2+i)(3-4i)}{3^2-4^2i^2} =$$

$$= \frac{(w-2+i)(3-4i)}{9+16} = \frac{(w-2+i)(3-4i)}{25} = \left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)(w-2+i)$$

$$\Rightarrow z = \left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)(w-2+i)+2-i$$

Donc $f^{-1}(w) = \left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)(w-2+i)+2-i$.

Comme f est une rotation autour de $2-i$ et d'angle $53,13°$ et une homothétie de centre $2-i$ et de facteur 5, f^{-1} correspond à une rotation autour de $2-i$ et d'angle $-53,13°$ et une homothétie de centre $2-i$ et de facteur $\frac{1}{5}$.

On a $\frac{1}{5}\,\text{cis}(-53,13°) = \frac{1}{5}\left(\cos(-53,13°)+i\sin(-53,13°)\right) =$

$= \frac{1}{5}\left(\cos(53,13°)-i\sin(53,13°)\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right) = \frac{3}{25}-\frac{4}{25}i$.

On en déduit alors que $f^{-1}(w) = \left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}i\right)(w-2+i)+2-i$.

Exercice 7.34.

On a $f(z) = az,\ a \in \mathbb{C}$

a. $f\left(\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i \implies a\left(\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i$

$$\implies a = \frac{\frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i}{\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i} = \frac{\left(\frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i\right)\left(\frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)}{\left(\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)} =$$

$$= \frac{\frac{81}{8} - \frac{27\sqrt{3}}{8}i + \frac{81\sqrt{3}}{8}i - \frac{27\cdot 3}{8}i^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 i^2} = \frac{\frac{81}{8} + \frac{54\sqrt{3}}{8}i + \frac{81}{8}}{\frac{81}{4} + \frac{9\cdot 3}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{162}{8} + \frac{54\sqrt{3}}{8}i}{\frac{81}{4} + \frac{27}{4}} = \frac{\frac{81}{4} + \frac{27\sqrt{3}}{4}i}{\frac{108}{4}} = \frac{\frac{81}{4} + \frac{27\sqrt{3}}{4}i}{27} =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i.$$

Ainsi $a = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

b. Le rapport d'homothétie est module$(a) = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} =$

$= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'angle de rotation est argument$(a) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}/4}{3/4}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30°$.

On a $z_0 = 6,\ z_1 = g(z_0),\ z_2 = g(z_1), \dots, z_n = g(z_{n-1}), \dots$

c. $z_1 = g(z_0) = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\cdot z_0 = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\cdot 6 = \frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$;

$z_2 = g(z_1) = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\cdot z_1 = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\cdot\left(\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{27}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{8}i + \frac{9\sqrt{3}}{8}i + \frac{9}{8}i^2 =$

$= \frac{27}{8} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i - \frac{9}{8} = \frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i$;

$z_3 = g(z_2) = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\cdot\left(\frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i\right) = \frac{27}{16} + \frac{27\sqrt{3}}{16}i + \frac{9\sqrt{3}}{16}i + \frac{27}{16}i^2 =$

$= \frac{27}{16} + \frac{9\sqrt{3}}{4}i - \frac{27}{16} = \frac{9\sqrt{3}}{4}i$;

$z_4 = g(z_3) = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_3 = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\frac{9\sqrt{3}}{4}i = \frac{27\sqrt{3}}{16}i + \frac{27}{16}i^2 = -\frac{27}{16} + \frac{27\sqrt{3}}{16}i$; etc.

Regardons ce qu'il se passe avec les formes trigonométriques.

On a $a = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i = r\,\mathrm{cis}\,\varphi$ avec $r = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}/4}{3/4}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30°$; ainsi $a = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cis}(30°)$.

De plus $z_0 = 6 = 6\,\mathrm{cis}(0°)$.

Ainsi $z_1 = g(z_0) = a \cdot z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{cis}(30°) \cdot 6 \operatorname{cis}(0°) = 6 \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{cis}(30°)$;

$z_2 = g(z_1) = a \cdot z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{cis}(30°) \cdot 6 \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{cis}(30°) = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \operatorname{cis}(2 \cdot 30°)$;

$z_3 = g(z_2) = a \cdot z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{cis}(30°) \cdot 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \operatorname{cis}(2 \cdot 30°) = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \operatorname{cis}(3 \cdot 30°)$; etc.

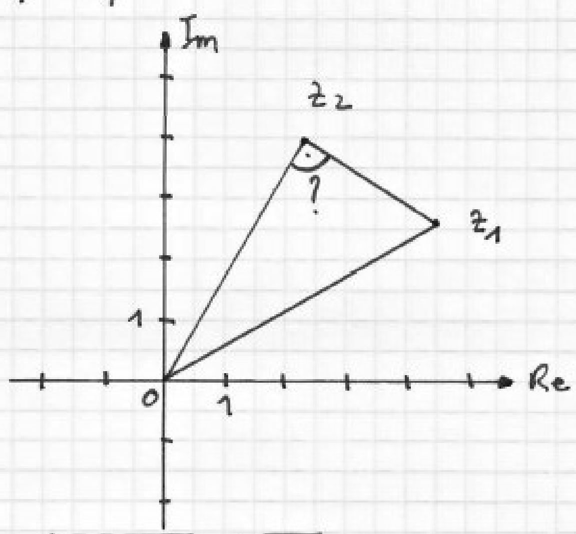
On en déduit que $z_9 = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^9 \operatorname{cis}(9 \cdot 30°) = 6 \frac{((\sqrt{3})^2)^4 \sqrt{3}}{512} \operatorname{cis}(270°) =$

$= 6 \cdot \frac{81\sqrt{3}}{512} (\cos(270°) + i \sin(270°)) = \frac{243\sqrt{3}}{512}(0 - i) = -i \frac{243\sqrt{3}}{512}$ et que

$z_n = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \operatorname{cis}(n \cdot 30°)$.

d. On a $z_1 = \frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i$ et $z_2 = \frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4} i$.

Géométriquement:



On a: $|z_1| = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{108}{4}} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$;

$|z_2| = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right) + \left(\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{16} + \frac{243}{16}} = \sqrt{\frac{324}{16}} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$;

$z_2 - z_1 = \frac{9}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4} i - \frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i = -\frac{9}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} i$;

$|z_2 - z_1| = \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{16} + \frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{108}{16}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

$|z_2|^2 + |z_2 - z_1|^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{81}{4} + \frac{27}{4} = \frac{108}{4} = 27 = (\sqrt{27})^2 =$

$= (3\sqrt{3})^2 = |z_1|^2$.

Ainsi le triangle $O z_1 z_2$ est rectangle.

e. On a $z_{k-1} = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1} \operatorname{cis}((k-1) 30°)$ et $z_k = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k \operatorname{cis}(k \cdot 30°)$.

L'angle entre z_1 et z_2 est de $30°$: $k \cdot 30° - (k-1) \cdot 30° = 30°$.

Montrons que l'angle en z_k est $90°$.

Pour cela, dans le plan, on va montrer que $\overrightarrow{Oz_k}$ et $\overrightarrow{Oz_k} - \overrightarrow{Oz_{k-1}}$ sont perpendiculaire, autrement dit que $\overrightarrow{Oz_k} \cdot (\overrightarrow{Oz_k} - \overrightarrow{Oz_{k-1}}) = 0$.

On a $\overrightarrow{Oz_k} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k}\begin{pmatrix}\cos(k30°)\\ \sin(k30°)\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{Oz_{k-1}} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1}\begin{pmatrix}\cos((k-1)30°)\\ \sin((k-1)30°)\end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{Oz_k} - \overrightarrow{Oz_{k-1}} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(k30°) - \cos((k-1)30°)\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(k30°) - \sin((k-1)30°)\end{pmatrix}$ et

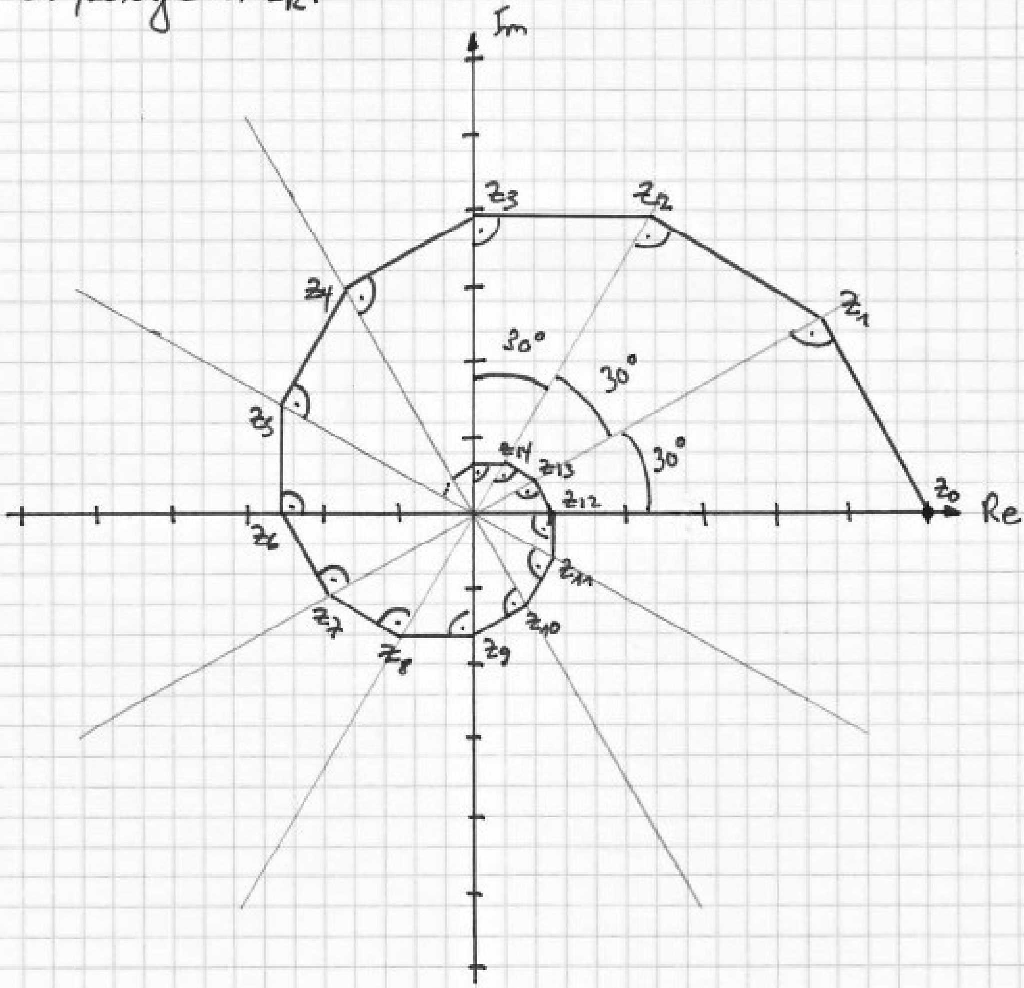
$$\overrightarrow{Oz_k}\cdot\overrightarrow{Oz_{k-1}} = 36\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2k-1}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2(k30°) - \cos(k30°)\cos((k-1)30° + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2(k30°) - \sin(k30°)\sin((k-1)30°)\Big).$$

Or $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2(k30°) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2(k\cdot 30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos^2(k30°) + \sin^2(k\cdot 30°)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et

$$-\cos(k30°)\cos((k-1)30°) - \sin(k30°)\sin((k-1)30°) =$$
$$= -\left(\cos(k30°)\cos((k-1)30° + \sin(k30°)\sin((k-1)30°)\right) =$$
$$= -\cos(k\cdot 30° - (k-1)30°) = -\cos(30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Par conséquent $\overrightarrow{Oz_k} - \overrightarrow{Oz_{k-1}} = 36\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2k-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ et le triangle Oz_kz_{k-1} est rectangle en z_k.

f.



g. On a $z_0 = 6$ et $z_1 = \frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

La longueur du segment d'extrémités z_0 et z_1 est

$$|z_1 - z_0| = \left|\frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i - 6\right| = \left|-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3.$$

h. On doit calculer $L = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k - z_{k-1}|$.

D'après e), dans le plan, on a $\overrightarrow{Oz_k} - \overrightarrow{Oz_{k-1}} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(k30°) - \cos((k-1)30°) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(k30°) - \sin((k-1)30°)\end{pmatrix}$.

On a alors: $|z_k - z_{k-1}|^2 = \| \overrightarrow{Oz_k} - \overrightarrow{Oz_{k-1}} \|^2 =$

$$= \left(6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k-1}\right)^2 \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(k30°) - \cos((k-1)30°)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(k30°) - \sin((k-1)30°\right)^2 \right) =$$

$$= 36\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^{k-1} \left(\frac{3}{4}\cos^2(k30°) - \sqrt{3}\cos(k30°)\cos((k-1)30°) + \cos^2((k-1)30°) + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{4}\sin^2(k30°) - \sqrt{3}\sin(k30°)\sin((k-1)30°) + \sin^2((k-1)30°) \right) =$$

$$= 36\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \left(\frac{3}{4}(\cos^2(k30°) + \sin^2(k30°)) + \cos^2((k-1)30°) + \sin^2((k-1)30°) \right.$$
$$\left. - \sqrt{3}\left(\cos(k30°)\cos((k-1)30°) + \sin(k30°)\sin((k-1)30°\right) \right) =$$

$$= 36\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{3}{4}\cdot 1 + 1 - \sqrt{3}\cos(k30° - (k-1)30°)\right) =$$

$$= 36\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{3}{4} + 1 - \sqrt{3}\cos(30°)\right) = 36\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{7}{4} - \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= 36\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{7}{4} - \frac{3}{2}\right) = 36\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{4} = 9\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

Ainsi $|z_k - z_{k-1}| = \sqrt{9\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}} = 3\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}}$.

On obtient $L = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k - z_{k-1}| = \sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}} = 3\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}}$.

On va séparer cette somme en 2 parties: pour k impairs et pour k pairs:

$$L = 3\left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impairs}}}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pairs}}}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}} \right).$$

Si k est impairs, alors $\frac{k-1}{2}$ est la suite des nombres entiers naturels depuis 0.

Ainsi $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impairs}}}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i$.

Or, on sait que, si $|r| < 1$, $\sum_{i=0} r^i = \frac{1}{1-r}$.

Ici $r = \frac{3}{4} < 1$ et on a $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impairs}}}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}} = \frac{1}{1 - 3/4} = \frac{1}{1/4} = 4$.

De plus $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pairs}}}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pairs}}}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k}{2}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pairs}}}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k}{2}} =$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pairs}}}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k}{2}} = \sqrt{\frac{4}{3}} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k}{2}} =$$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pairs}}} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i$ puisque si k est pair, les $\frac{k}{2}$

forment la suite des entiers naturels depuis 1.

On a $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i = \frac{1}{1-3/4} = 4$ (voir ci-dessous).

Ainsi $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i - \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 4-1 = 3.$

On a donc $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pairs}}}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 3 = 2\sqrt{3}.$

Finalement, on obtient $L = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k - z_{k-1}| = 3\left(4 + 2\sqrt{3}\right) = 6\left(2+\sqrt{3}\right).$

Exercice 7.35.

On a $w = f(z) = 2 + \frac{3-4i}{z-2}$.

a. $w = 2 + \frac{3-4i}{z-2} \Rightarrow w-2 = \frac{3-4i}{z-2} \Rightarrow (w-2)(z-2) = 3-4i$

$\Rightarrow z-2 = \frac{3-4i}{w-2} \Rightarrow z = 2 + \frac{3-4i}{w-2}$.

Ainsi $f^{-1}(z) = 2 + \frac{3-4i}{z-2} = f(z)$.

b. Les points fixes de f sont les z tels que $f(z) = z$.

$f(z) = z \Rightarrow 2 + \frac{3-4i}{z-2} = z \Rightarrow \frac{3-4i}{z-2} = z-2 \Rightarrow 3-4i = (z-2)^2$.

Cherchons les racines carrées de $3-4i$.

On a $3-4i = r\operatorname{cis}\varphi$ avec $r = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ et

$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right) = -53{,}13°$. Ainsi $3-4i = 5\operatorname{cis}(-53{,}13°)$.

Les racines de $3-4i$ sont alors $\sqrt{5}\operatorname{cis}\left(\frac{-53{,}13°}{2}\right) = \sqrt{5}\left(\cos(-26{,}57°) + i\sin(-26{,}57°)\right) =$

$= 2-i$ et $\sqrt{5}\operatorname{cis}\left(\frac{-53{,}13°}{2} + 180°\right) = \sqrt{5}\left(\cos(153{,}43°) + i\sin(153{,}43°)\right) = -2+i$.

Avec la racine $2-i$, on obtient $2-i = z-2 \Rightarrow z = 4-i$.

Avec la racine $-2+i$, on obtient $-2+i = z-2 \Rightarrow z = i$.

Les points fixes de z sont donc $z = 4-i$ et $z = i$.

c. On pose $z = x+yi$ et $w = u+vi$. On a $w = f(z) = 2 + \frac{3-4i}{z-2}$.

Ainsi $u+vi = 2 + \frac{3-4i}{x+yi-2} = 2 + \frac{3-4i}{x-2+yi} = 2 + \frac{(3-4i)(x-2-yi)}{(x-2+yi)(x-2-yi)} =$

$$= 2 + \frac{3x-6-3yi-4xi+8i+4yi^2}{(x-2)^2-y^2i^2} = 2 + \frac{3x-6-4y-3yi-4xi+8i}{(x-2)^2+y^2} =$$

$$= \frac{2(x-2)^2+2y^2+3x-6-4y+(-3y-4x+8)i}{(x-2)^2+y^2} =$$

$$= \frac{2(x-2)^2+3(x-2)+2y^2-4y+(-4x-3y+8)i}{(x-2)^2+y^2} =$$

$$= \frac{(2(x-2)+3)(x-2)+2y(y-2)+(-4x-3y+8)i}{(x-2)^2+y^2} =$$

$$= \frac{(2x-1)(x-2)+2y(y-2)}{(x-2)^2+y^2} + \frac{-4x-3y+8}{(x-2)^2+y^2}i.$$

On en déduit que $u = \dfrac{(2x-1)(x-2) + 2y(y-2)}{(x-2)^2 + y^2}$ et $v = \dfrac{-4x-3y+8}{(x-2)^2+y^2}$.

d. Si la partie imaginaire de w vaut 1, on doit avoir $v = 1$, c'est-à-dire

$$\frac{-4x-3y+8}{(x-2)^2+y^2} = 1 \implies -4x-3y+8 = (x-2)^2+y^2$$

$$\implies -4x-3y+8 = x^2-4x+4+y^2 \implies -3y+8 = x^2+4+y^2$$

$$\implies x^2+y^2+3y-4 = 0 \implies x^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-4=0$$

$$\implies x^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=0 \implies x^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}.$$

C'est donc un cercle centré en $(0; -\frac{3}{2})$ $(-\frac{3}{2}i)$ et de rayon $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$.

Exercice 7.36.

a. On a les équations $z^3+(-2-5i)z^2+(-11+18i)+(28-29i)=0$ et
$z^2+(1-3i)z+(-14-5i)=0.$

On commence par résoudre la 2^e. C'est une équation du 2^e degré de la forme $az^2+bz+c=0$ avec $a=1$, $b=1-3i$ et $c=-14-5i$.

On a $\Delta=b^2-4ac=(1-3i)^2-4\cdot1\cdot(-14-5i)=1-6i+9i^2+56+20i=$
$=1-6i-9+56+20i=48+14i$. Calculons $\sqrt{\Delta}$, c'est-à-dire cherchons les racines de $48+14i$.

On a $48+14i=r\cos\varphi$ avec $r=\sqrt{48^2+14^2}=\sqrt{2304+196}=\sqrt{2500}=50$
et $\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{14}{48}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{7}{24}\right)=16{,}26°$. On a donc $48+14i=50\,\mathrm{cis}(16{,}26°)$.

Ainsi les racines de $48+4i$ sont :

$\sqrt{50}\,\mathrm{cis}\left(\frac{16{,}26°}{2}\right)=\sqrt{50}\left(\cos\left(\frac{16{,}26°}{2}\right)+i\sin\left(\frac{16{,}26°}{2}\right)\right)=7+i$ et

$\sqrt{50}\,\mathrm{cis}\left(\frac{16{,}26°}{2}+180°\right)=-7-i.$

On peut donc prendre $\sqrt{\Delta}=7+i$.

Ainsi, les solutions de $z^2+(1-3i)z+(-14-5i)=0$ sont:

$z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+3i+7+i}{2}=\dfrac{6+4i}{2}=3+2i$ et

$z_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+3i-7-i}{2}=\dfrac{-8+2i}{2}=-4+i.$

Cherchons lequel de z_1 ou z_2 est solution de la 1^e équation.

Avec $z_1=3+2i$, on a: $z_1^3+(-2-5i)z_1^2+(-11+18i)z_1+(28-29i)=$
$=z_1^2(z_1-2-5i)+(-11+18i)z_1+(28-29i)=$
$=(3+2i)^2(3+2i-2-5i)+(-11+18i)(3+2i)+28-29i=$
$=(9+12i-4)(1-3i)-33-22i+54i-36+28-29i=$
$=(5+12i)(1-3i)-41+3i=5-15i+12i+36-41+3i=0.$

Ainsi z_1 est solution de la 1^e équation.

Les 2 équations ont bien une solution commune: $z_1=3+2i$.

b. On a $f(z)=-i\bar{z}+4+4i$.

Les points invariants de f sont les z tels que $f(z)=z$.

$f(z)=z \Rightarrow z=-i\bar{z}+4+4i.$

Posons $z=x+yi$. On a $\bar{z}=x-yi$.

On obtient $x+yi=-i(x-yi)+4+4i \Rightarrow x+yi=-xi+yi^2+4-4i$

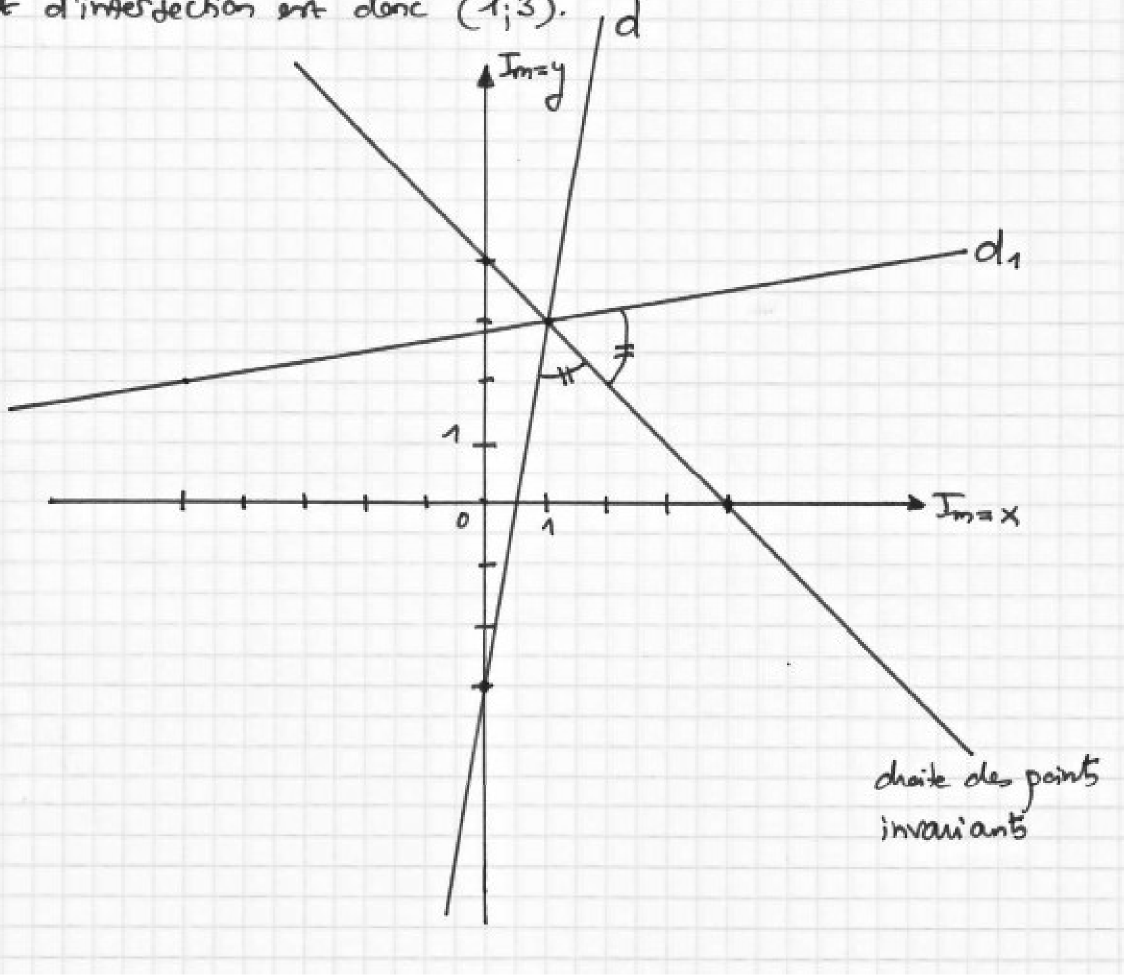
$\Rightarrow x+yi=-xi-y+4-4i \Rightarrow x+yi=-y+4+(-x-4)i.$

On doit donc avoir $x=-y+4$ et $y=-x+4$, c'est-à-dire
$x+y-4=0$.
Les points invariants de f sont donc les $z=x+yi$, tels que $x+y-4=0$, ce qui est une droite.

c. On a la droite d: $y=6x-3$.
Un point $z=x+iy$ de la droite est donc de la forme $z=x+i(6x-3)$.
On a $f(z)=-i\bar{z}+4+4i$. On a $\bar{z}=x-i(6x-3)$.
Ainsi $f(z)=-i\left(x-i(6x-3)\right)+4+4i=-xi-(6x-3)+4+4i=$
$=-xi-6x+3+4+4i=-6x+7+(-x+4)i$.
En posant $f(z)=u+vi$, on doit donc avoir $u=-6x+7$ et $v=-x+4$.
De la 2^e relation, on tire $x=-v+4$.
Substitué dans la 1^e relation, on obtient $u=-6(-v+4)+7$
$\Rightarrow u=6v-24+7 \Rightarrow u=6v-17$.
L'image de la droite $d: y=6x-3$ est ainsi la droite d_1: $x=6y-17$.

Cherchons l'intersection de d: $y=6x-3$ et d_1: $x=6y-17$.
Par substitution, on a : $y=6(6y-17)-3=36y-102-3=36y-105$
$\Rightarrow -35y=-105 \Rightarrow y=3$.
Avec $y=3$, on obtient $x=6y-17=6\cdot 3-17=18-17=1$.
Le point d'intersection est donc $(1;3)$.

d.



Comme la droite $x+y-4=0$ ne bouge pas par la transformation f (puisqu'elle est l'ensemble des points invariants de f), on voit sur le dessin que f est la symétrie d'axe $x+y-4=0$.

e. On a $g(z)=f(z^2)$ avec $f(z)=-i\bar{z}+4+4i$.

On considère la droite $x=1$, ce qui correspond, dans le plan complexe, à $z=1+yi$.

Avec $z=1+yi$, on a $z^2=(1+yi)^2=1+2yi+y^2i^2=1+2yi-y^2=1-y^2+2yi$.

Ainsi
$$\begin{aligned} g(z)=f(z^2) &= -i\left(1-y^2-2yi\right)+4+4i= \\ &= -i+y^2i+2yi^2+4+4i= \\ &= 3i+y^2i-2y+4 = -2y+4+\left(y^2+3\right)i. \end{aligned}$$

En posant $g(z)=u+vi$, on doit avoir $u=-2y+4$ et $v=y^2+3$.

De la 1^e^ relation, on tire $2y=-u+4 \Longrightarrow y=-\frac{1}{2}u+2$.

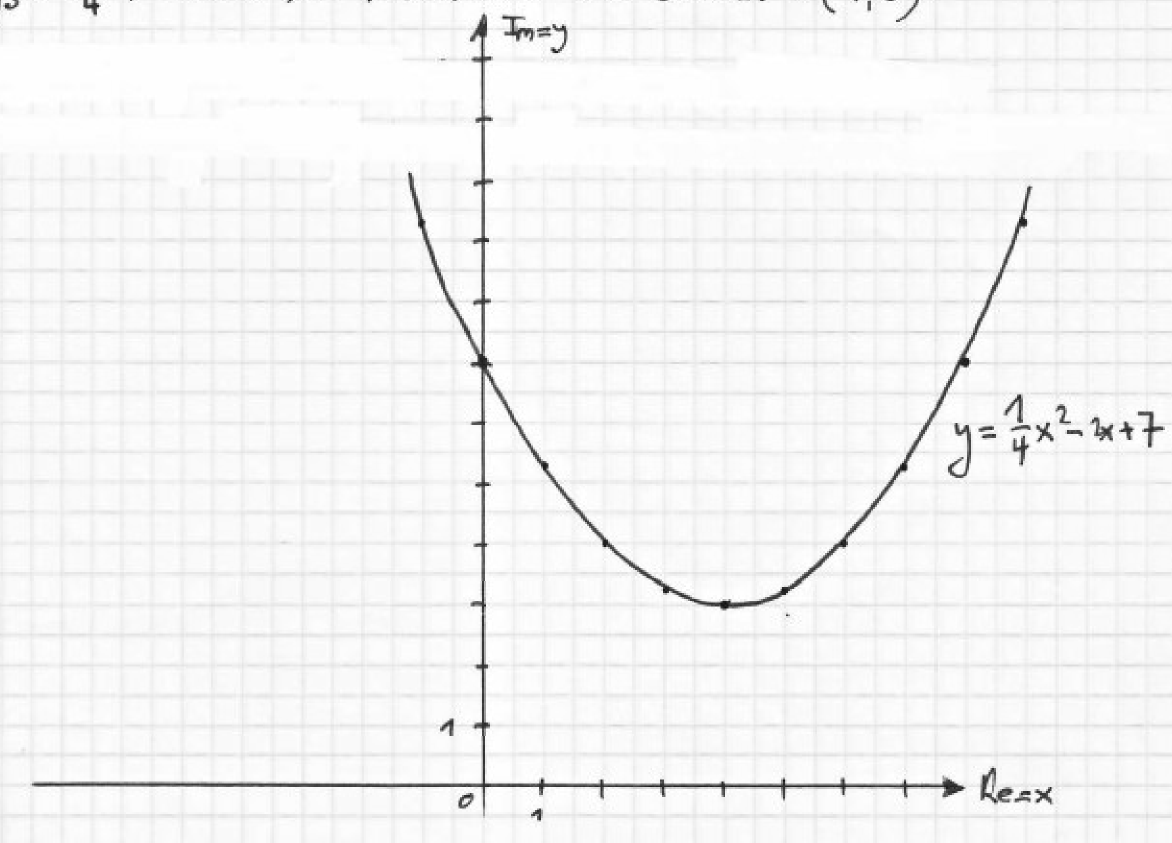
Par substitution dans la 2^e^ relation, on obtient:

$$v=y^2+3=\left(-\frac{1}{2}u+2\right)^2+3=\frac{1}{4}u^2-2u+4+3=\frac{1}{4}u^2-2u+7.$$

La courbe ainsi obtenue est la parabole $y=\frac{1}{4}x^2-2x+7$

Son sommet est $(x_S;y_S)$ avec $x_S=-\dfrac{-2}{2\cdot\frac{1}{4}}=\dfrac{2}{1/2}=4$ et

$$y_S=\frac{1}{4}4^2-2\cdot 4+7=4-8+7=3 \Longrightarrow \text{sommet}=(4;3).$$



f. On veut trouver les z tels que $g(z) \in \mathbb{R}$.

En posant $z = x+yi$ et $g(z) = u+vi$ (on prendra $v=0$), on a

$$u+vi = g(z) = f(z^2) = f((x+yi)^2) = f(x^2+2xyi-y^2) = f(x^2-y^2+2xyi) =$$

$$= -i(x^2-y^2-2xyi) + 4 + 4i = -x^2i+y^2i+2xyi^2+4+4i =$$

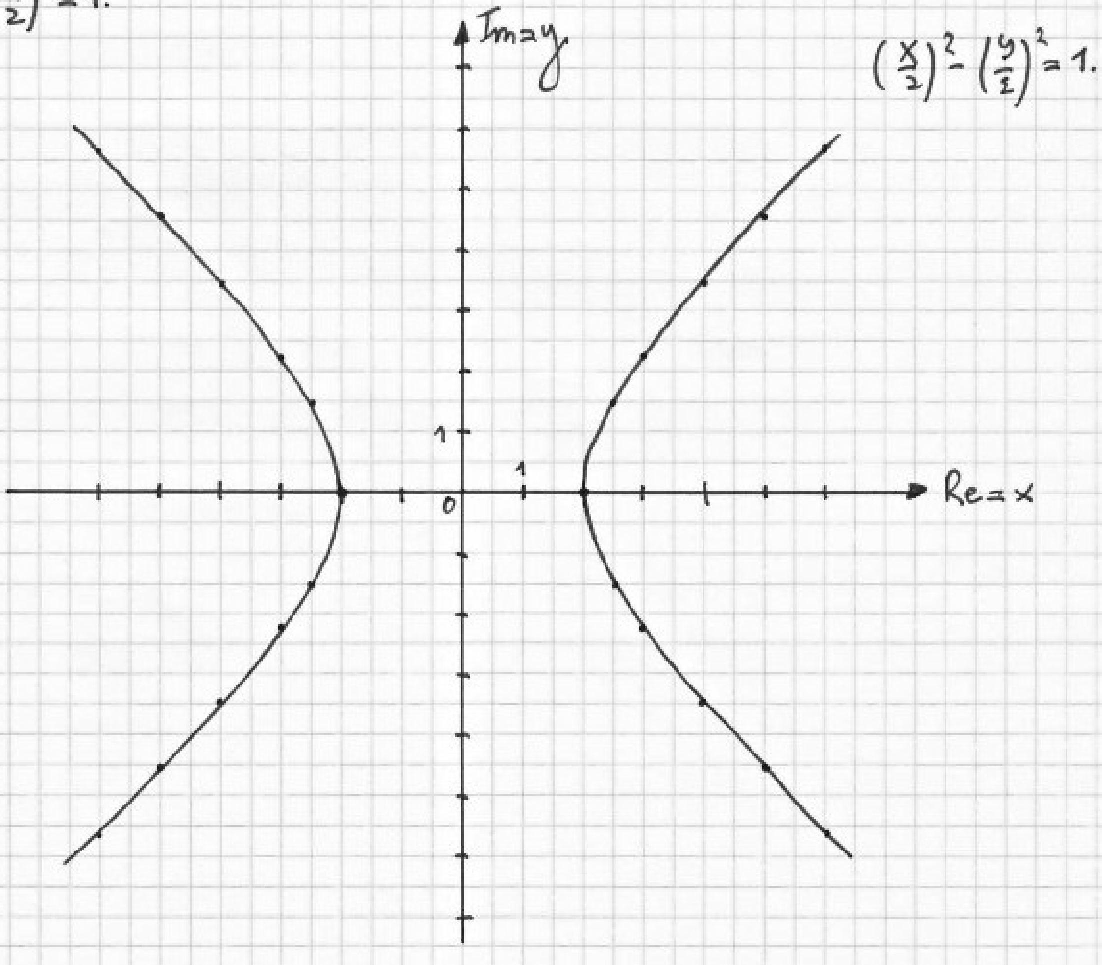
$$= -x^2i+y^2i-2xy+4+4i = -2xy+(-x^2+y^2+4)i.$$

On doit ainsi avoir $u = -2xy$ et $v = -x^2+y^2+4$.

Comme on veut $v=0$, on a $-x^2+y^2+4=0 \implies x^2-y^2=4$

$\implies \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1 \implies \left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2=1.$

Ainsi l'ensemble des $z=x+yi$ tels que $g(z) \in \mathbb{R}$ est l'hyperbole $\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{y}{2}\right)^2=1.$



Exercice 7.37.

a. N°1 : $\frac{1}{2}$;

N°2 : la moitié du reste $= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$;

N°3 : la moitié du reste $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$;

N°4 : $\frac{1}{2^4}$;

⋮

N°n : $\frac{1}{2^n}$.

b. Une fois que le n s'est servi, il reste exactement une part égale à celui du n-ième, puisque celui-ci a pris la moitié de ce qu'il reste. Il reste donc $\frac{1}{2^n}$.

La part du gâteau prise par les invités N°1 à n est donc $1-\frac{1}{2^n}$.

c. $90\% = 0{,}9 \Rightarrow 1-\frac{1}{2^n} > 0{,}9 \Rightarrow 1-0{,}9 > \frac{1}{2^n} \Rightarrow 0{,}1 > \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow 0{,}1\cdot 2^n > 1 \Rightarrow 2^n > 10 \Rightarrow n = 4.$

Ainsi, après 4 invités, plus de 90% du gâteau est pris.

d. $99{,}9\% = 0{,}999 \Rightarrow 1-\frac{1}{2^n} > 0{,}999 \Rightarrow 1-0{,}999 > \frac{1}{2^n} \Rightarrow 0{,}001 > \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow 0{,}001\cdot 2^n > 1 \Rightarrow 2^n > 1000 \Rightarrow n = 10.$

Ainsi, après 10 invités, plus de 99,9% du gâteau est pris.

e. On sait que si $|r|<1$, alors $\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$.

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}.$

$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots = \sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{1+1/3} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4}.$

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^2}\right)^i = \frac{1}{1+1/2^2} = \frac{1}{1+1/4} = \frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}.$

$\frac{3}{2}+\frac{3}{2^3}+\frac{3}{2^5}+\frac{3}{2^7}+\ldots = \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{6}{5}.$

Exercice de récurrence

On doit montrer que $\sum_{k=1}^{n} k.k! = 1.1 + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! = (n+1)! - 1$,

avec $n! = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3.2.1$.

Vérifions la relation pour $n=1$: $\sum_{k=1}^{1} k.k! = 1.1 = 1$ et $(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$.

Supposons la relation vraie pour n: $\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$ et montrons-là pour $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k.k! = \sum_{k=1}^{n} k.k! + (n+1)\cdot(n+1)! =$$

$$= (n+1)! - 1 + (n+1)\cdot(n+1)! \quad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

Ainsi $\sum_{k=1}^{n+1} k.k! = (n+1)!(1+n+1) - 1 = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$, ce qui est bien la relation à montrer avec $n+1$.