Exercice 12.1

On donne un ensemble E et deux opérations : une addition interne et une multiplication par un scalaire. Obtient-on ainsi un espace vectoriel ?

a. E = ensemble des vecteurs du plan dont la longueur vaut 1
$+, \cdot$: opérations habituelles sur les vecteurs

b. E = ensemble constitué du seul vecteur nul
$+, \cdot$: opérations habituelles sur les vecteurs

c. E = ensemble des matrices 3x3 dont la trace est nulle
$+, \cdot$: opérations habituelles sur les matrices

d. E = ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$, où a et b sont des constantes réelles quelconques.
$+, \cdot$: opérations habituelles sur les fonctions. La fonction $f(x) = A\cos(x - \varphi)$ appartient-elle à E ?

e. E = ensemble des rotations du plan dont le centre O est fixe.
$+$: composition $R_1 + R_2 = R_2 * R_1$
$\cdot$: multiplication de l'angle de rotation. Avant de multiplier, on choisit une mesure de l'angle qui soit comprise entre 0° (inclus) et 360° (exclu). **Indication** : Calculer la moitié de la somme de deux rotations d'un demi-tour.

Exercice 12.2

Dans $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base standard de V_2, on considère $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2}$.

a. Que sont les composantes de $\vec{v}$ dans les bases$(\overrightarrow{e_1}\ ,\ \overrightarrow{e_2})$,$(\overrightarrow{e_2}\ ,\ \overrightarrow{e_1})$ et$(2\overrightarrow{e_1}\ ,\ 6\overrightarrow{e_2})$?

b. Montrer que $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ forment une base de V_2.

c. Déterminer les composantes de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_1} - 5\overrightarrow{e_2}$ dans la base $(\overrightarrow{v_1}\ ,\ \overrightarrow{v_2})$.

Exercice 12.3

Dans V_3 muni d'une base standard (orthonormée et directe), on donne des vecteurs. Déterminer la dimension du sous-espace engendré par ces vecteurs. Vérifier que les deux derniers sous-espaces sont égaux.

a. $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c. $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

d. $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 12.4

Dans V_3 muni d'une base standard, on collectionne les vecteurs dont les composantes x, y, z vérifient les conditions données. Obtient-on ainsi un sous-espace vectoriel ? Le cas échéant, donner la dimension de ce sous-espace.

a. $z = 0$

b. $z = 1$

c. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

d. $x = y = 2z$

e. $x + y + 2z = 0$

f. $x + y + 2z = 1$

g. $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$

h. $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$

i. $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$

Exercice 12.5

Dans l'espace, on considère $\overrightarrow{v_1} = 5\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ et $\overrightarrow{v_2} = 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - 5\overrightarrow{e_3}$.

a. Dire pourquoi $(\overrightarrow{v_1}\ ,\ \overrightarrow{v_2}\ ,\ \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2})$ est une base de V_3.

b. Exprimer $\overrightarrow{e_1}$ dans cette base.

Exercice 12.6

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré 2.

a. Déterminer les composantes de $p = 3x^2 - 4x + 5$ dans la base $(1, x, x^2)$.

b. Montrer que les polynômes $p_1 = x^2 + 2x$, $p_2 = x + 1$ et $p_3 = x^2 + 3$ forment une base de E.

c. Déterminer les composantes de $p = 3x^2 - 4x + 5$ dans la base (p_1, p_2, p_3).

Exercice 12.7

Dans l'espace nous considérons le sous-espace vectoriel W formé des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, par rapport à la base standard.

a. Montrer que $(\overrightarrow{v_1}\ ,\ \overrightarrow{v_2})$ est une base de W.

b. Déterminer l'équation du plan W.

Exercice 12.8

Proposer une base pour ces sous-espaces vectoriel de V_3 :

a. le plan d'équation $3x - 2y + 5z = 0$

b. les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} a \\ a - c \\ c \end{pmatrix}$

Exercice 12.9

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré 2, et a un réel fixé.

a. Montrer que W l'ensemble des polynômes qui s'annulent en $x = a$ est un sous-espace vectoriel de E.

b. Trouver une base de W. **Aide :** un polynôme qui s'annule en $x = a$ a $x - a$ parmi ses facteurs.

Exercice 12.10

Dans l'espace vectoriel des matrices de type $2x2$ (M_{2x2}), on considère :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel M_{2x2} ? Justifier votre réponse en exhibant une base. Que peut-on en déduire à propos du sous-espace engendré par A, B et C ?
b. Vérifier que ces matrices sont linéairement dépendantes.
c. Donner deux matrices D et E telles que (A, B, D, E) soit une base de M_{2x2}.

Exercice 12.11

Dans chacun des cas déterminer si l'application est linéaire. Si possible la décrire en termes géométriques.

a. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$
b. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$
c. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$
d. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ y+1 \end{pmatrix}$
e. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$
f. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$
g. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$
h. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + 3y$
i. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+a \\ y-2z \end{pmatrix}$, où a est un réel fixé.

Exercice 12.12

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré 2, et a un réel fixé. La transformation $f : E \to \mathbb{R}, p \mapsto f(p) = p(a)$ est-elle linéaire ?

Exercice 12.13

Deux applications linéaires f et g de V_2 dans V_2 sont données par leur effet sur les vecteurs $\vec{a} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$ et $\vec{b} = -\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$ (avec $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ une base de V_2) :

$$f(\vec{a}) = -\vec{e_1} + 6\vec{e_2},\ f(\vec{b}) = -5\vec{e_1} + 6\vec{e_2},\ g(\vec{a}) = 2\vec{e_1} - 6\vec{e_2} \text{ et } g(\vec{b}) = 7\vec{e_1} - 21\vec{e_2}$$

a. Déterminer les composantes des vecteurs $f(\vec{e_1})$, $f(\vec{e_2})$, $g(\vec{e_1})$, $g(\vec{e_2})$, $f(\vec{v})$, $g(f(\vec{v}))$, où $\vec{v} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2}$.
b. Déterminer relativement à la base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$, les matrices F de f, G de g et M de $g * f$.
c. En utilisant M, vérifier les composantes de $g(f(\vec{v}))$.

Exercice 12.14

Déterminer la matrice, par rapport à la base standard, de chacune des transformations linéaires de V_2, suivantes puis utiliser cette matrice pour calculer l'image de $\vec{v} = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_2}$.

a. Homothétie de centre O et de facteur k
b. Rotation de $+30°$ autour de l'origine
c. Projection orthogonale sur l'axe $a : x - 3y = 0$
d. Symétrie d'axe a
e. Projection sur l'axe a dans la direction $\overrightarrow{d} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$
f. Affinité axiale, d'axe a, qui envoie le point $R(2;2)$ sur $R'(1;-1)$.

Exercice 12.15

On appelle V l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $f(x) = e^{-x}(a\cos(2x) + b\sin(2x))$, avec a et b des constantes réelles arbitraires.

a. Vérifier que V est un espace vectoriel et que la dérivation est une opération interne à V
b. Expliquer pourquoi la dérivation est une transformation linéaire de V et donner sa matrice par rapport à la base (f_1, f_2) formée des fonctions $f_1(x) = e^{-x}\cos(2x)$ et $f_2(x) = e^{-x}\sin(2x)$.

Exercice 12.16

Calculer, si possible, les produits matriciels $A \cdot B$ et $B \cdot A$.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
b. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
c. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
d. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 12.17

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 2, et l'application T définie par

$$T : E \to F, T(p) = p', \text{ sa dérivée.}$$

a. Décrire l'espace vectoriel d'arrivée F.
b. Proposer une base de E, et une base de F.
c. Déterminer la matrice de T.

Exercice 12.18

Déterminer la matrice, par rapport à la base standard, de chacune des transformations linéaires de V_2, puis utiliser cette matrice pour déterminer l'image de $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}$.

a. Symétrie de plan $x = y$
b. Symétrie d'axe Oy
c. Rotation de $+120°$ autour d'un axe orienté de direction $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$
d. Projection orthogonale sur la droite // à $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$ et passant par O
e. Projection orthogonale sur le mur
f. Projection verticale sur le plan d'équation $x + y - z = 0$

g. Projection sur le plan $x + y - z = 0$
h. Symétrie de plan $x + y - z = 0$
i. Rotation de 90° autour de l'axe des abscisses de sorte que l'image de $\overrightarrow{e_3}$ soit $\overrightarrow{e_2}$

Exercice 12.19

Décrire géométriquement les transformations associées aux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.20

Déterminer la matrice de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ z - 2y \end{pmatrix}$, par rapport à la base standard.
Utiliser cette matrice pour calculer l'image de $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$.

Exercice 12.21

On travaille dans le plan muni d'un repère métrique.

a. Donner la matrice S_α de la symétrie axiale dont l'axe fait un angle de α avec l'axe x.
b. Donner la matrice R_φ de la rotation d'un angle φ.
c. Pronostiquer et vérifier par calcul matriciel les résultats de $S_\alpha \cdot S_\alpha$ et $R_\alpha \cdot R_\beta$.
d. Vérifier que $S_\alpha \cdot S_\beta = R_{2(\alpha-\beta)}$.

Exercice 12.22

On considère l'espace et sa base standard $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

a. Déterminer P la matrice de la projection orthogonale sur le plan $x - y - z = 0$.

Nous appelons I la matrice de la transformation identité $i : \vec{v} \mapsto \vec{v}$.

b. Déterminer par calculs ou raisonnement I, $Q = I - P$, P^2 et PQ.
c. Trouver les vecteurs 1-propre sous Q.
d. Déterminer le noyau de Q.
e. En déduire l'interprétation géométrique de la transformation associée à Q.

Exercice 12.23

Une application linéaire est donnée par la matrice symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Vérifier que cette application admet au moins une valeur propre.

Exercice 12.24

Dans la base standard, on donne la matrice de l'application $f : V_2 \to V_2 : F = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer ses valeurs propres ainsi que ses vecteurs propres correspondants.
b. Interpréter géométriquement l'application f.

Exercice 12.25

Montrer que le **polynôme caractéristique** d'une matrice M de type $2x2$ est

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(M) \cdot \lambda + \det(M)$$

Généralisation :
$\mathrm{tr}(M) = \sum \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$ et $\det(M) = \prod \lambda_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n$

Exercice 12.26

Proposer la matrice $2x2$ d'une affinité axiale de rapport -3. Indiquer son axe et sa direction.

Exercice 12.27

Si possible, déterminer les inverses de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$F = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 2 & -6 & -10 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.28

Une application linéaire f de V_2 dansV_2 est donnée par sa matrice $F = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$, dans la base standard $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

a. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
b. Choisir une base propre $(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})$ et donner la matrice de f dans cette base (F').
c. Chercher l'image des vecteurs $\vec{a} = 2\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$ et $\vec{b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{p_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{p_2}$ de deux manières :
d. En travaillant dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ avec la matrice F
e. En travaillant dans la base $(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})$ avec la matrice F'

Exercice 12.29

Trouver les valeurs et les sous-espaces propres de la transformation f donnée dans une base standard de V_3 par la matrice $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.Donner une base propre et la matrice F' de f dans cette base propre.

Exercice 12.30

Une application linéaire de V_2 dans V_2 est donnée par sa matrice relativement à une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$:
$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^{-1}, A^2, A^3.
b. Calculer les valeurs et vecteurs propres de f et $f * f$.
c. Choisir une base $(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})$ de vecteurs propres et donner dans cette base la matrice B de f.
d. Calculer B^{-1}, B^2, B^3 et B^n.
e. Déterminer la matrice P de l'application p (passage) qui envoie $(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})$ sur $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
f. Déterminer l'inverse de P, soit P^{-1}.
g. En utilisant la base propre de f et les matrices de passage P et P', calculer A^n.
h. Vérifier le résultat pour $n = -1$, $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 12.31

a. Calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
b. Déterminer m de telle sorte que $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2m \\ m & 11 & -m \\ m-1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ ne soit pas inversible.
c. Quelle est alors l'interprétation géométrique de la transformation associée à A ?

Exercice 12.32

L'application f est donnée par sa matrice $F = \begin{pmatrix} -7/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & -13/5 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer la matrice de f^{-1} ainsi que celle de $(f * f)^{-1}$
b. Trouver un vecteur $\vec{v}$ tel que $f(\vec{v}) = \overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} - 22\overrightarrow{e_3}$

Exercice 12.33

a. Prouver que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
b. Prouver, pour les dimensions 2 et 3, que $\det({}^tA) = \det(A)$
c. Prouver que deux vecteurs propres non nuls correspondant à des valeurs propres distinctes sont indépendants
d. Prouver que le produit des valeurs propres d'une matrice est égal au déterminant de cette matrice.
e. En déduire que lorsque le déterminant est nul l'application possède un noyau de dimension non nulle, donc qu'il y a projection sur un sous-espace.

Exercice 12.34

Soit l'application linéaire f de V_2 dans V_2 donnée par la matrice $F = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.
Calculer les valeurs et vecteurs propres de f, de $f * f$ et de f^{-1}.

Exercice 12.35

Dans l'espace muni d'une base standard, on considère une application f donnée par sa matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

a. Vérifier qu'elle admet trois valeurs propres distinctes dont une entière.
b. Diagonaliser la matrice A (l'exprimer dans une base propre, à définir)

On considère l'application $g = f * f - 12f + 25i$, où i est l'identité.

c. Trouver les valeurs propres de g en travaillant dans une " bonne " base.

Exercice 12.36

Diagonaliser les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 12.37

Une affinité du plan est donnée par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et par l'image $O'(-4;4)$ de l'origine.

a. Trouver les points fixes de l'affinité
b. Choisir un repère $(\Omega, \overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})$ tel que Ω est un point fixe et $(\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2})$ est une base propre.
c. Donner l'expression de l'affinité dans le nouveau repère
d. Expliquer pourquoi l'affinité est axiale.

Exercice 12.38

Dans le plan muni d'un repère métrique, donner la matrice et l'image de l'origine qui caractérisent chacune des affinités suivantes :

a. Symétrie d'axe $x - y + 1 = 0$
b. Affinité d'axe $y = x + 1$ qui envoie l'origine sur $O'(2;-1)$
c. Translation de vecteur $\vec{t} = -2\overrightarrow{u_1} + 3\overrightarrow{u_2}$
d. Homothétie de centre $\Omega(\alpha;\beta)$ et de rapport λ
e. Rotation de 120° qui envoie $A(-2;1)$ sur $A'(1;0)$

Exercice 12.39

a. Quel est le centre de la rotation que l'on obtient en effectuant d'abord une rotation de 180° autour de $(1;-1)$ puis une rotation de $-90°$ autour de $(3;1)$?
b. Le centre est-il le même si on effectue les rotations dans l'autre ordre ?

Exercice 12.40

Une affinité ψ est donnée par $A(1\,;\,2)$, $B(3\,;\,0)$, $C(\,5\,;\,4)$ et leurs images A ' (–10 ; –1) , B ' (12 ; 13) et C ' (–2 ; 3).

a. Donner l'expression de ψ
b. Trouver ses points fixes
c. Trouver ses directions invariantes

Exercice 12.41

Dans le plan muni d'un repère métrique, une affinité ψ est donnée par son expression en coordonnées :

$$\begin{cases} x' = 0,8x - 0,6y + 1 \\ y' = 0,6x + 0,8y - 3 \end{cases}$$

a. Trouver l'équation cartésienne de la courbe Γ dont l'image est la parabole d'équation $y' = x'^2$.
b. Trouver l'expression de l'affinité inverse.
c. Chercher l'équation de la courbe Γ', image par ψ du cercle de rayon 1 centré en $(1;3)$
d. Montrer que ψ est une rotation. Calculer son angle et son centre.

Exercice 12.42

a. Trouver les caractéristiques géométriques de la transformation vectorielle f de matrice

$$F = \begin{pmatrix} -5/13 & 12/13 \\ 12/13 & 5/13 \end{pmatrix}$$

b. Trouver la matrice de la transformation g telle que $g * f$ soit la symétrie d'axe $y = x$.
c. Interpréter géométriquement g.

Exercice 12.43

La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$ est celle de la composition d'une symètrie de plan π_1 : $x = 0$, suivie d'une autre transformation de matrice B.

a. Interpréter géométriquement la transformation de matrice A.
b. Calculer et interpréter géométriquement B.

Exercice 12.44

Dans l'espace muni d'une base standard, une transformation est donnée par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

a. Vérifier que $B = \frac{1}{9}A$ est une matrice orthogonale. En déduire les matrices B^{-1} et A^{-1}.
b. Par un minimum de calcul, trouver les valeurs et les vecteurs propres de B. En déduire celles et ceux de A.
c. Donner les caractéristiques géométriques de B, puis celles de A.

Exercice 12.45

Relativement à la base standard $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$, une application linéaire f de V_3 dans V_3 est donnée par :

$$f(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3},\ f(\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3} \text{ et } f(\overrightarrow{u_3}) = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$$

a. Donner une base orthonormée directe $\{\overrightarrow{p_1}, \overrightarrow{p_2}, \overrightarrow{p_3}\}$ formée de vecteurs propres de f.

b. Expliquer pourquoi la transformation qui envoie $\overrightarrow{u_i}$ sur $\overrightarrow{p_i}$ est une rotation. Donner sa matrice et son axe.

Exercice 12.46

Soit $\vec{u}$ un vecteur unité fixé de l'espace. On considère dans V_3 les quatre transformations suivantes :

$$i : \vec{v} \to \vec{v},\ f : \vec{v} \to \vec{u} \times \vec{v},\ g : \vec{v} \to (\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{u} \text{ et } h = i - g$$

a. Vérifier que f, g, h et i sont des applications linéaires.

b. Relativement à une base standard $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$, le vecteur $\vec{u}$ est donné par $\vec{u} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2} + c\overrightarrow{u_3}$, avec $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Déterminer relativement à cette base les matrices F, G et H de f, g et h.

c. Vérifier que $f * f = -h$

d. Chercher l'image de $\vec{u}$ et des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ par les applications g et h.

e. Interpréter géométriquement g et h et en déduire les égalités $g{*}g = g$, $h{*}h = h$ et $h{*}g = 0$.