Série 4
Calcul intégral
Corrigé des exercices

Exercice 1

La surface de la zone grisée est $\int_0^3 (-x+3)\cdot e^x dx$.

On va utiliser la formule d'intégration par parties: $\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx$.

On prend $u=-x+3$ et $v'=e^x$. On a alors $u'=-1$ et $v=e^x$.

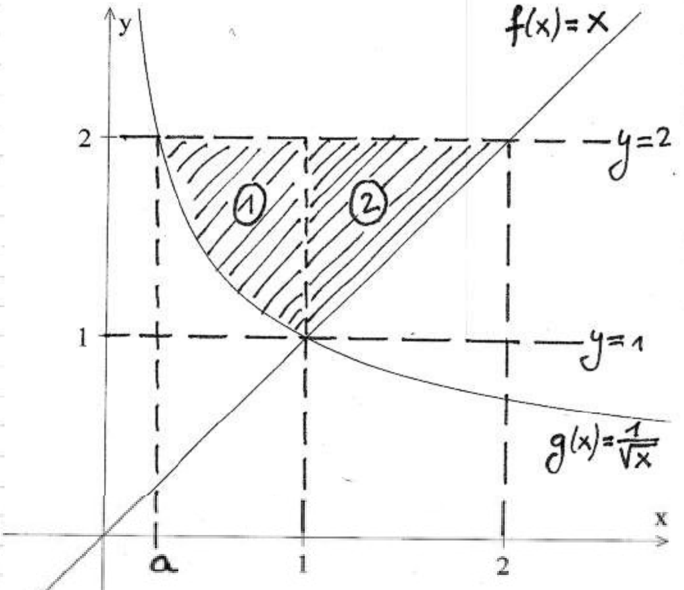
Ainsi $\int_0^3 (-x+3)e^x dx = \int_0^3 uv' dx = \left[uv\right]_0^3 - \int_0^3 u'v dx = \left[(-x+3)e^x\right]_0^3 - \int_0^3 (-1)e^x dx =$

$= (-3+3)e^3 - (0+3)e^0 + \int_0^3 e^x dx = -3 + \left[e^x\right]_0^3 = -3+e^3-e^0 = -3+e^3-1 =$

$= e^3 - 4 \cong 16{,}086.$

Exercice 2

On a la situation suivante:



L'aire cherchée est la somme des aires (1) et (2).

Quand $x=a$, on a $g(a)=2$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} = 2 \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a = \frac{1}{4}$.

On a aire (1) $= \int_{1/4}^1 (2-g(x))dx = \int_{1/4}^1 \left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_{1/4}^1 2dx - \int_{1/4}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2x\right]_{1/4}^1 - \int_{1/4}^1 x^{-\frac{1}{2}}dx =$

$= 2\cdot 1 - 2\cdot\frac{1}{4} - \left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_{1/4}^1 = 2-\frac{1}{2} - \left[2\sqrt{x}\right]_{1/4}^1 = 2-\frac{1}{2} - \left(2\cdot\sqrt{1} - 2\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}\right) =$

$= 2-\frac{1}{2} - 2 + 2\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}.$

Comme aire 2 $= \frac{1\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$, l'aire cherchée vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Exercice 3

On a $f(x) = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 3 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$.

On a $g(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 24}}{-2} = \frac{-1 \pm 5}{-2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$.

Ainsi, l'aire de la région grisée est $\int_0^2 (g(x) - f(x))\,dx + \int_2^3 g(x)\,dx =$

$$= \int_0^3 g(x)\,dx - \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^3 (-x^2 + x + 6)\,dx - \int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x + 3\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^3 - \left[-\frac{3}{4}x^2 + 3x\right]_0^2 =$$

$$= -\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 6.3 - \left(-\frac{3}{4}2^2 + 3.2\right) = -9 + \frac{9}{2} + 18 + 3 - 6 = \frac{21}{2}.$$