ALGEBRE LINEAIRE

Corrigé des exercices

Exercice 12.1.

a. Si $u, v \in E$, on a u et v de longueur 1. Or $u+v$ n'est pas forcément de longueur 1. Donc $u+v \notin E$. Par conséquent, E n'est pas un espace vectoriel.

b. Si $u, v \in E$, on a $u=v=0$. On a alors: $u+v=0 \in E$, $\alpha . u = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, etc. Par conséquent, E est un espace vectoriel.

c. Si $A, B \in E$, on a $tr(A) = tr(B) = 0$. Autrement dit la somme des éléments de la diagonale principale de A est 0, de même que pour B. La trace de $A+B$ est la somme des éléments de la diagonale principale de $A+B$ et, donc, est la somme des éléments de la diagonale principale de A auquel on ajoute la somme des éléments de la diagonale principale de B. Ainsi $tr(A+B) = tr(A) + tr(B) = 0+0 = 0$, d'où $A+B = 0$.
Similairement $tr(\alpha A) = \alpha tr(A) = \alpha \cdot 0 = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
Les autres points à satisfaire dans la définition d'espace vectoriel sont clairement satisfaits. Par conséquent, E est un espace vectoriel.

d. Si $f, g \in E$, on a $f(x) = a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)$ et $g(x) = a_2 \cos(x) + b_2 \sin(x)$, $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$. On a alors $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(x) + b_2 \sin(x) =$
$= (a_1 + a_2)\cos(x) + (b_1 + b_2)\sin(x)$. Donc $f+g \in E$.
Similairement $(\alpha f(x)) = \alpha f(x) = \alpha a_1 \cos(x) + \alpha b_1 \sin(x)$, d'où $\alpha f(x) \in E$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Les autres points dans la définition d'espace vectoriel sont clairement satisfaits.
Par conséquent, E est un espace vectoriel.

e. Soient R_1 et $R_2 \in E$. R_1 est une rotation de centre O et d'angle Θ_1 et R_2 est une rotation de centre O et d'angle Θ_2. $R_1 + R_2$ correspond à une rotation de centre O et d'angle $\Theta_1 + \Theta_2$. Si $\cdot$ représente la multiplication de l'angle de rotation, αR_1 correspond à une rotation de centre O et d'angle $\alpha \Theta_1$. Cependant, si on choisit, avant de multiplier, une mesure de l'angle α telle que $0 \leq \alpha < 360°$, on a le phénomène suivant:
Soit R_1 la rotation de centre O et de $180°$; soit $R_2 = R_1$; on a $R_1 + R_2$ = rotation de centre O et de $180° + 180°$, donc de $0°$; on a alors $\frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ = rotation de centre O et de $0°$; or $\frac{1}{2}R_1 = \frac{1}{2}R_2$ = rotation de centre O et d'angle $90°$, d'où $\frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{2}R_2$ = rotation de centre O et d'angle $180° \neq \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$; par conséquent E n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 12.2

On a $\vec{v} = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_2}$.

a. Comme $\vec{v} = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_2}$, on a $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$.

Comme $\vec{v} = -3\vec{e_2} + 2\vec{e_1}$, on a $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e_2};\vec{e_1})$.

Comme $\vec{v} = (2\vec{e_1}) - \frac{1}{2}(6\vec{e_2})$, on a $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ dans la base $(2\vec{e_1}; 6\vec{e_2})$.

b. Pour montrer que $(\vec{v_1};\vec{v_2})$ est une base de V_2, il faut montrer qu'ils ne sont pas parallèles, autrement dit qu'il n'existe pas de $k \in \mathbb{R}$ tel que $k\vec{v_1} = \vec{v_2}$.

On a $\vec{v_1} = \vec{e_1} - \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \vec{e_1} + \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$.

La relation $k\vec{v_1} = \vec{v_2}$ s'écrirait $k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow k = 1$ et $k = -1$, ce qui est impossible. Il n'existe donc pas de $k \in \mathbb{R}$ tel que $k\vec{v_1} = \vec{v_2}$.

Ainsi $(\vec{v_1};\vec{v_2})$ est bien une base de V_2.

c. On a $\vec{u} = \vec{e_1} - 5\vec{e_2}$, $\vec{v_1} = \vec{e_1} - \vec{e_2}$ et $\vec{v_2} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$.

Par addition des 2 dernières relations, on obtient $\vec{v_1} + \vec{v_2} = 2\vec{e_1} \Rightarrow \vec{e_1} = \frac{1}{2}\vec{v_1} + \frac{1}{2}\vec{v_2}$.

En soustrayant la 2e de la 3e, on obtient $\vec{v_2} - \vec{v_1} = 2\vec{e_2} \Rightarrow \vec{e_2} = \frac{1}{2}\vec{v_2} - \frac{1}{2}\vec{v_1}$.

Ainsi $\vec{u} = \vec{e_1} - 5\vec{e_2} = \frac{1}{2}\vec{v_1} + \frac{1}{2}\vec{v_2} - 5\left(\frac{1}{2}\vec{v_2} - \frac{1}{2}\vec{v_1}\right) = \frac{1}{2}\vec{v_1} + \frac{1}{2}\vec{v_2} - \frac{5}{2}\vec{v_2} + \frac{1}{2}\vec{v_1} = \vec{v_1} - 2\vec{v_2}$.

Par conséquent, les composantes de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{v_1};\vec{v_2})$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 12.3

Si un sous-espace est engendré par k vecteurs, sa dimension est inférieure ou égale à k.
La dimension d'un sous-espace étant le nombre de vecteurs d'une de ses bases (toutes les bases ont le même nombre de vecteurs), il faut déterminer le nombre de vecteurs linéairement indépendants dans les vecteurs engendrant le sous-espace. Ce nombre donnera la dimension du sous-espace.

a. On a $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v_3}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

$\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont clairement pas parallèles.

Voyons si $\vec{v_3}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$, autrement dit s'il existe α et $\beta\in\mathbb{R}$ tels que $\vec{v_3}=\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}$. Si de tels α et β existent, on a:

$$\vec{v_3}=\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2} \Rightarrow \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\\2\beta\\3\beta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\\alpha+2\beta\\\alpha+3\beta\end{pmatrix} = \begin{cases}\alpha+\beta=2 & (1)\\ \alpha+2\beta=-1 & (2)\\ \alpha+3\beta=1 & (3).\end{cases}$$

En effectuant (2)−(1), on obtient $\beta=-3$, d'où, dans (1) $\alpha-3=2 \Rightarrow \alpha=5$.

Voyons si $\alpha=5$ et $\beta=-3$ joue dans $\alpha+3\beta=1$: $5+3(-3)=5-9=-4\neq1$.

Ainsi, on en déduit qu'il n'existe pas $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{v_3}=\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}$.

Par conséquent, $\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}$ ne sont pas coplanaires et la dimension qu'ils engendrent est 3.

b. On a $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v_3}=\begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}$.

$\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont clairement pas parallèles.

Voyons si $\vec{v_3}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$, autrement dit s'il existe α et $\beta\in\mathbb{R}$ tels que $\vec{v_3}=\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}$. Si de tels α et β existent, on a:

$$\vec{v_3}=\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2} \Rightarrow \begin{pmatrix}5\\3\\4\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\2\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\\2\beta\\5\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\\alpha+2\beta\\2\alpha+5\beta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=5 & (1)\\ \alpha+2\beta=3 & (2)\\ 2\alpha+5\beta=4 & (3).\end{cases}$$

En soustrayant (1) de (2), on obtient $\beta=-2$.

Dans (1), on obtient $\alpha-2=5 \Rightarrow \alpha=7$.

Voyons si $\alpha=7$ et $\beta=-2$ satisfont (3): $2\alpha+5\beta=2.7+5.(-2)=14-10=4 \to$ oui.

Ainsi il existe α et $\beta\in\mathbb{R}$ tels que $\vec{v_3}=\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}$. Cela signifie que $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ sont coplanaires et que la dimension engendrée par $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ est la dimension engendrée par $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ et est donc 2.

c. On a $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$.

$\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont clairement pas parallèles.

La dimension qu'ils engendrent est donc 2.

d. On a $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont clairement pas parallèles.

La dimension qu'ils engendrent est donc 2.

On doit vérifier que les 2 derniers sous-espaces (donnés en c. et d.) sont égaux.

Pour cela, on va montrer qu'il existe α et β tels que $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

γ et δ tels que $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cela indiquera que les 2 vecteurs donnés par c. et d. sont des vecteurs de base du même sous-espace et donc que les sous-espaces sont égaux.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\beta \\ 4\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta \\ 4\beta \\ \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 4 \\ 4\beta = 6 \\ \alpha = 7 \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Avec $\alpha = 7$ et $\beta = \frac{3}{2}$, on a bien $\alpha - 2\beta = 7 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 7 - 2 = 4$.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\delta \\ 4\delta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma - 2\delta \\ 4\delta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \gamma - 2\delta = 4 \\ 4\delta = -6 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \delta = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

Avec $\gamma = 1$ et $\delta = -\frac{3}{2}$, on a bien $\gamma - 2\delta = 1 - 2\left(-\frac{3}{2}\right) = 1 + 3 = 4$.

Ainsi les sous-espaces donnés en c. et d. sont égaux.

Exercice 12.4

Pour vérifier qu'un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel de V_3, il suffit de contrôler que :
- le vecteur nul appartient au sous-ensemble ;
- la somme de vecteurs du sous-ensemble est dans le sous-ensemble ;
- les multiples des vecteurs du sous-ensemble sont dans le sous-ensemble

a. $z=0$: les vecteurs sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$;

le vecteur nul appartient bien au sous-ensemble ;

on a $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui appartient bien au sous-ensemble ;

on a $k\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ 0 \end{pmatrix}$ qui appartient bien au sous-ensemble ;

ainsi on a bien un sous-espace vectoriel ;

une base est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$; la dimension est donc 2 ($z=0$ est un plan de l'espace).

b. $z=1$: les vecteurs sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$;

le vecteur nul n'appartient pas au sous-ensemble ;

ainsi on n'a pas un sous-espace vectoriel.

c. $x^2+y^2+z^2=1$: le vecteur nul n'appartient pas au sous-ensemble ;

ainsi on n'a pas un sous-espace vectoriel.

d. $x=y=2z$: les vecteurs sont de la forme $\begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}$;

le vecteur nul appartient bien au sous-ensemble ;

on a $\begin{pmatrix} 2z_1 \\ 2z_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2z_2 \\ 2z_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z_1+2z_2 \\ 2z_1+2z_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(z_1+z_2) \\ 2(z_1+z_2) \\ z_1+z_2 \end{pmatrix}$ qui appartient bien au sous-ensemble ;

on a $k\begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(kz) \\ 2(kz) \\ kz \end{pmatrix}$ qui appartient bien au sous-ensemble ;

ainsi on a bien un sous-espace vectoriel ;

une base est $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; la dimension est donc 1 ($x=y=2z$ est une droite).

e. $x+y+2z=0$: les vecteurs sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ -2z-x \\ z \end{pmatrix}$;

le vecteur nul appartient bien au sous-ensemble ;

on a $\begin{pmatrix} x_1 \\ -2z_1-x_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ -2z_2-x_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ -2(z_1+z_2)-(x_1+x_2) \\ z_1+z_2 \end{pmatrix}$ qui appartient bien au sous-ensemble ;

on a $k\begin{pmatrix} x \\ -2z-x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ -2(kz)-(kx) \\ kz \end{pmatrix}$ qui appartient bien au sous-ensemble ;

ainsi on a bien un sous-espace vectoriel ;

une base est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; la dimension est donc 2 ($x+y+2z=0$ est un plan).

f. $x+y+2z=1$: les vecteurs sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ 1-x-2z \\ z \end{pmatrix}$;

le vecteur nul n'appartient pas au sous-ensemble ;

ainsi on n'a pas un sous-espace vectoriel.

g. $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$: en additionnant ces 2 équations on obtient $2x=0 \Rightarrow x=0$;

on peut donc dire que le sous-ensemble est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

satisfaisant à $\begin{cases} x=0 \\ y=2z \end{cases}$;

les vecteurs du sous-ensemble sont de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ z \end{pmatrix}$;

le vecteur nul appartient bien au sous-ensemble;

on a $\begin{pmatrix} 0 \\ 2z_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2z_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2(z_1+z_2) \\ z_1+z_2 \end{pmatrix}$ qui appartient bien au sous-ensemble;

on a $k\begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2(kz) \\ kz \end{pmatrix}$ qui appartient bien au sous-ensemble;

ainsi on a bien un sous-espace vectoriel;

une base est $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; la dimension est donc 1 ($x+y-2z=0$ et $x-y+2z=0$ sont des plans et leur intersection est une droite).

h. $\begin{cases} x+y-2z=0 & (1) \\ 2x+y-z=0 & (2) \\ x+2y-5z=0 & (3) \end{cases}$: en effectuant (2) $-2\cdot$(1), on obtient $-y+3z=0$ (4);

en effectuant (2) $-2\cdot$(3), on obtient $-3y+9z=0$ (5);

(4) et (5) sont équivalentes; on a donc $y=3z$;

avec $y=3z$ dans (1), on obtient $x+3z-2z=0 \Rightarrow x+z=0$ $\Rightarrow x=-z$;

ainsi le système (1), (2) et (3) est équivalent au système $\begin{cases} x=-z \\ y=3z \end{cases}$;

les vecteurs du sous-ensemble sont de la forme $\begin{pmatrix} -z \\ 3z \\ z \end{pmatrix}$;

le vecteur nul appartient bien au sous-ensemble;

on a $\begin{pmatrix} -z_1 \\ 3z_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z_2 \\ 3z_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(z_1+z_2) \\ 3(z_1+z_2) \\ (z_1+z_2) \end{pmatrix}$ qui appartient bien au sous-ensemble;

on a $k\begin{pmatrix} -z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(kz) \\ 3(kz) \\ kz \end{pmatrix}$ qui appartient bien au sous-ensemble;

ainsi on a bien un sous-espace vectoriel;

une base est $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; la dimension est donc 1.

i. $\begin{cases} x+y-2z=0 & (1) \\ 2x+y-z=0 & (2) \\ x+2y-z=0 & (3) \end{cases}$: en effectuant (2) $-$ (1), on obtient $x+z=0$ (4);

en effectuant (3) $-2\cdot$(1), on obtient $-x+3z=0$ (5);

en additionnant (4) et (5), on obtient $4z=0$, d'où $z=0$;

avec $z=0$ dans (4), on obtient $x=0$;

avec $x=0$ et $z=0$ dans (1), on obtient $y=0$;

ainsi le système (1), (2) et (3) nous donne $x=0$, $y=0$ et $z=0$ (l'intersection de 3 plans est 1 point);

c'est clairement un sous-espace vectoriel de dimension zéro.

Exercice 12.5

a. Dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$, on a $\vec{v_1} = 5\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + \vec{e_3} = \begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = 3\vec{e_1} + \vec{e_2} - 5\vec{e_3} =$
$= \begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}$.

$\vec{v_1} = \begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}$ ne sont clairement pas parallèles.

On sait alors que le produit vectoriel $\vec{v_1}\times\vec{v_2}$ de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ existe et que $\vec{v_1}\times\vec{v_2}$ est perpendiculaire à $\vec{v_1}$ et perpendiculaire à $\vec{v_2}$.

Ainsi les vecteurs $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{v_1}\times\vec{v_2}$ ne sont pas coplanaires.

Ils forment donc une base de V_3.

b. On a $\vec{v_1} = \begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix}$. Ainsi $\vec{v_1}\times\vec{v_2} = \begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\1\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-2)\cdot(-5)-1\cdot 1\\ 1\cdot 3-5(-5)\\ 5\cdot 1-(-2)\cdot 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\28\\11\end{pmatrix}$.

On a donc $\vec{v_1} = 5\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{v_2} = 3\vec{e_1} + \vec{e_2} - 5\vec{e_3}$ et $\vec{v_1}\times\vec{v_2} = 9\vec{e_1} + 28\vec{e_2} + 11\vec{e_3}$,

ce que l'on peut écrire sous forme de système d'équations:

$$\begin{cases} \vec{v_1} = 5\vec{e_1} - 2\vec{e_2} + \vec{e_3} & (1) \\ \vec{v_2} = 3\vec{e_1} + \vec{e_2} - 5\vec{e_3} & (2) \\ \vec{v_1}\times\vec{v_2} = 9\vec{e_1} + 28\vec{e_2} + 11\vec{e_3} & (3). \end{cases}$$

En effectuant (1) + 2·(2), on obtient $\vec{v_1} + 2\vec{v_2} = 11\vec{e_1} - 9\vec{e_3}$ (4).

En effectuant 14·(1) + (3), on obtient $14\vec{v_1} + \vec{v_1}\times\vec{v_2} = 79\vec{e_1} + 25\vec{e_3}$ (5).

Multiplions (4) par 25 : on obtient $25\vec{v_1} + 50\vec{v_2} = 275\vec{e_1} - 225\vec{e_3}$ (6).

Multiplions (5) par 9 : on obtient $126\vec{v_1} + 9\vec{v_1}\times\vec{v_2} = 711\vec{e_1} - 225\vec{e_3}$ (7).

En additionnant (6) et (7), on trouve $151\vec{v_1} + 50\vec{v_2} + 9\vec{v_1}\times\vec{v_2} = 986\vec{e_1}$.

On en déduit que $\vec{e_1} = \frac{151}{986}\vec{v_1} + \frac{50}{986}\vec{v_2} + \frac{9}{986}\vec{v_1}\times\vec{v_2} =$

$$= \frac{151}{986}\vec{v_1} + \frac{25}{986}\vec{v_2} + \frac{9}{986}\vec{v_1}\times\vec{v_2},$$

ce qui est $\vec{e_1}$ exprimé dans la base $(\vec{v_1};\vec{v_2};\vec{v_1}\times\vec{v_2})$.

Exercice 12.6

a. On a $p = 3x^2 - 4x + 5 = 5 \cdot 1 - 4 \cdot x + 3 \cdot x^2$.
Les composantes de p dans la base $(1; x; x^2)$ sont donc $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

b. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $p_2 = \alpha p_1$.
On a alors $x+1 = \alpha(x^2+2x) \Rightarrow x+1 = \alpha x^2 + 2\alpha x$.
Par identification des termes, on doit avoir $\alpha = 0$, $2\alpha = 1$ et $0 = 1$, ce qui est clairement impossible.
Ainsi p_1 et p_2 ne sont pas "parallèles".
Supposons qu'il existe α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $p_3 = \alpha p_1 + \beta p_2$.
On a alors $x^2+3 = \alpha(x^2+2x) + \beta(x+1) \Rightarrow x^2+3 = \alpha x^2 + 2\alpha x + \beta x + \beta$
$\Rightarrow x^2 + 3 = \alpha x^2 + (2\alpha+\beta)x + \beta$.
Par identification des termes, on doit avoir $\alpha = 1$, $2\alpha + \beta = 0$ et $\beta = 3$.
Avec $\alpha = 1$ et $\beta = 3$, on $2\alpha + \beta = 5 \neq 0$, ce qui est une contradiction.
Ainsi il n'existe pas de α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $p_3 = \alpha p_1 + \beta p_2$.
p_1, p_2 et p_3 ne sont donc pas "coplanaires" ; ils sont linéairement indépendants.
On conclut alors que $(p_1; p_2; p_3)$ forme une base de E.

c. Ecrivons $p = \alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3$ et cherchons les valeurs de α, β et γ.
Avec $p = 3x^2 - 4x + 5$, $p_1 = x^2 + 2x$, $p_2 = x+1$ et $p_3 = x^2+3$, on a :
$3x^2 - 4x + 5 = \alpha(x^2+2x) + \beta(x+1) + \gamma(x^2+3)$
$\Rightarrow 3x^2 - 4x + 5 = \alpha x^2 + 2\alpha x + \beta x + \beta + \gamma x^2 + 3\gamma$
$\Rightarrow 3x^2 - 4x + 5 = (\alpha+\gamma)x^2 + (2\alpha+\beta)x + \beta + 3\gamma$.
Par identification des termes, on obtient le système : $\begin{cases} \alpha + \gamma = 3 & (1) \\ 2\alpha + \beta = -4 & (2) \\ \beta + 3\gamma = 5 & (3). \end{cases}$

De (1), on tire $\alpha = 3 - \gamma$; par substitution dans (2), on obtient $2(3-\gamma) + \beta = -4$
$\Rightarrow 6 - 2\gamma + \beta = -4 \Rightarrow \beta - 2\gamma = -10$ (4).
En soustrayant (4) de (3), on obtient $5\gamma = 15$, d'où $\gamma = 3$.
Avec $\gamma = 3$ dans (3), on obtient $\beta + 3 \cdot 3 = 5$, d'où $\beta = -4$.
Avec $\gamma = 3$ dans (1), on obtient $\alpha + 3 = 3 \Rightarrow \alpha = 0$.
On a donc $p = 0 \cdot p_1 - 4 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3$.
Ainsi les composantes de p dans la base $(p_1; p_2; p_3)$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 12.7.

a. W est formé des combinaisons linéaires de $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$.
Montrons que $\vec{v_3}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$, ce qui montrera que $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ sont coplanaires, et que, comme $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont clairement pas parallèles, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ forment une base de W.
Cherchons α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{v_3} = \alpha\vec{v_1} + \beta\vec{v_2}$.
Avec $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha + \beta \\ 2\alpha - 3\beta \\ 4\alpha - 4\beta \end{pmatrix}.$$

On a donc le système : $\begin{cases} -2\alpha + \beta = 1 & (1) \\ 2\alpha - 3\beta = 2 & (2) \\ 4\alpha - 4\beta = 1 & (3). \end{cases}$

En additionnant (1) et (2), on obtient $-2\beta = 3$, d'où $\beta = -\frac{3}{2}$.
Avec $\beta = -\frac{3}{2}$ dans (1), on obtient $-2\alpha - \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow -2\alpha = \frac{5}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{5}{4}$.
Vérifions que $\alpha = -\frac{5}{4}$ et $\beta = -\frac{3}{2}$ satisfont à (3) :
$4\alpha - 4\beta = 4\cdot\left(-\frac{5}{4}\right) - 4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = -5 + 6 = 1 \rightarrow$ OK.
On a donc $\vec{v_3} = -\frac{5}{4}\vec{v_1} - \frac{3}{2}\vec{v_2}$ et on conclut que $(\vec{v_1}; \vec{v_2})$ est une base de W.

b. L'équation d'un plan W est de la forme $ax+by+cz+d=0$ où le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à W.
Un vecteur perpendiculaire à W sera $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$, où $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont les vecteurs de base de W (puisque $\vec{v_1} \times \vec{v_2} \perp \vec{v_1}$ et $\vec{v_1} \times \vec{v_2} \perp \vec{v_2}$).

On a $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-4) - 4\cdot(-3) \\ 4\cdot 1 - (-2)\cdot(-4) \\ (-2)\cdot(-3) - 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On peut donc choisir le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ comme étant $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, autrement dit choisir $a=1$, $b=-1$ et $c=1$.
L'équation du plan W s'écrit donc $x-y+z+d=0$. Reste à trouver d.
Or, on sait que W est un espace vectoriel. Cela signifie qu'il contient le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Avec $x=y=z=0$ dans $x-y+z+d=0$, on obtient $d=0$.
Ainsi l'équation du plan W est $x-y+z=0$.

Exercice 12.8.

a. Une manière de faire est de trouver 3 points A, B, C du plan $3x-2y+5z=0$ (avec A, B et C non alignés) et de choisir les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ pour former la base du sous-espace vectoriel (comme $3x-2y+5z=0$ est un plan, il aura 2 vecteurs de base).

On choisit $A(2;3;0)$, $B(5;0;-3)$ et $C(5;5;-1)$.

Ils sont clairement non alignés.

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On peut donc choisir $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ comme base du sous-espace vectoriel.

b. Dans l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ a-c \\ c \end{pmatrix}$, en posant $a=1$ et $c=0$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, en posant $a=0$ et $c=1$, on obtient $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont clairement non parallèles.

On peut donc choisir $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ comme base du sous-espace vectoriel.

Exercice 12.9.

a. Pour vérifier qu'un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de contrôler que:

- le "vecteur" nul appartient au sous-ensemble;
- la somme de "vecteurs" du sous-ensemble est dans le sous-ensemble;
- les multiples des "vecteurs" du sous-ensemble sont dans le sous-ensemble.

Ici les "vecteurs" sont les polynômes qui s'annulent en a.

- le "vecteur" nul est le polynôme nul; il s'annule clairement en a;
- soit p_1 et p_2 deux polynômes qui s'annulent en a; leur somme s'annule aussi en a;
- soit p un polynôme qui s'annule en a et $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme (αp) s'annule aussi en a.

Ainsi, W, l'ensemble des polynômes de degré 2 qui s'annulent en a, est bien un sous-espace vectoriel de E.

b. Un polynôme qui s'annule en $x=a$ a $x-a$ parmi ses facteurs.
Comme on considère les polynômes de degré 2 qui s'annulent en a, on peut toujours les écrire sous la forme $\alpha(x-a)(x-b)$, où α et $b \in \mathbb{R}$.
On a $\alpha(x-a)(x-b) = \alpha x(x-a) - \alpha b\,(x-a) = \alpha(x^2-ax) - \alpha b(x-a)$.
En posant $\beta = -\alpha b$, on en déduit que tout polynôme de degré 2 qui s'annule en a peut s'écrire $\alpha(x^2-ax) + \beta(x-a)$.
Comme x^2-ax et $x-a$ ne sont pas parallèles, on en déduit que $((x^2-ax);\,(x-a))$ est une base de W.

Exercice 12.10

a. Les matrices $E_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $E_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ sont linéairement indépendantes: $\alpha E_1+\beta E_2+\gamma E_3+\delta E_4=0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\\beta&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\gamma\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&\delta\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\\beta&\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=\delta=0.$$

En outre toutes les matrices 2×2 peut s'écrire comme combinaison linéaire de E_1, E_2, E_3 et E_4:

$$\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\b&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&c\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&d\end{pmatrix}=aE_1+bE_2+cE_3+dE_4.$$

Par conséquent $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $M_{2\times2}$.

$M_{2\times2}$ est donc de dimension 4.

Comme A, B et C est un ensemble de 3 matrices, on peut en déduire que le sous-espace engendré par A, B et C est inférieur ou égal à 3.
Comme A et B sont clairement linéairement indépendantes, on en déduit que le sous-espace engendré par A, B et C est 2 ou 3.

b. On va montrer qu'il existe α et $\beta\in\mathbb{R}$ tels que $C=\alpha A+\beta B$.

Avec $C=\begin{pmatrix}7&-1\\1&3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4&-1\\0&1\end{pmatrix}$, $C=\alpha A+\beta B$ s'écrit

$$\begin{pmatrix}7&-1\\1&3\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4&-1\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}7&-1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\alpha&\alpha\\2\alpha&3\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\beta&-\beta\\0&\beta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}7&-1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\alpha+4\beta&\alpha-\beta\\2\alpha&3\alpha+\beta\end{pmatrix}.$$

On doit donc résoudre le système:

$$\begin{aligned}2\alpha+4\beta&=7 \quad (1)\\2\alpha&=1 \quad (2)\\\alpha-\beta&=-1 \quad (3)\\3\alpha+\beta&=3 \quad (4).\end{aligned}$$

De (2), on tire $\alpha=\frac{1}{2}$.
Avec $\alpha=\frac{1}{2}$ dans (1), on obtient $2\cdot\frac{1}{2}+4\beta=7\Rightarrow 1+4\beta=7\Rightarrow 4\beta=6\Rightarrow\beta=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.
Avec $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{3}{2}$ dans (3), on a bien $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$.
Avec $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=\frac{3}{2}$ dans (4), on a bien $3\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$.
On a donc $C=\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}B$, ce qui signifie que A, B et C sont linéairement dépendantes.

c. On peut choisir $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$(A; B; D; E)$ sera alors une base de $M_{2\times 2}$.

Pour le montrer, il faut montrer que A, B, D et E sont linéairement indépendantes.
Commençons par montrer que A, B et D sont linéairement indépendantes, autrement dit qu'il n'existe pas α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $A = \alpha B + \beta D$:

$$A = \alpha B + \beta D \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha+\beta & -\alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\alpha+\beta = 2 \\ 0 = 2 \\ -\alpha = 1 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$ $\rightarrow$ impossible. Donc A, B et E sont linéairement indépendantes.

Montrons maintenant que A, B, D et E sont linéairement indépendantes, autrement dit qu'il n'existe pas α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $A = \alpha B + \beta D + \gamma E$:

$$A = \alpha B + \beta D + \gamma E \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha+\beta & -\alpha \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha+\beta = 2 \\ \gamma = 2 \\ \left.\begin{array}{l} -\alpha = 1 \\ \alpha = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{impossible.} \end{cases}$$

Ainsi A, B, C et D sont linéairement indépendantes et elles forment une base de $M_{2\times 2}$.

Exercice 12.11

Une application linéaire f est une application entre 2 espaces vectoriels E et F telle que:

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad , \forall \vec{u}, \vec{v} \in E \, ;$$
$$f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u}) \, , \quad \forall \vec{u} \in E, \, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Une propriété d'une application linéaire f est que $f(0_E) = 0_F$, où 0_E et 0_F sont les éléments neutres pour l'addition de E et F respectivement.

Pour montrer qu'une application est linéaire ou non, il suffit de vérifier si elle satisfait :
① $f(0_E) = 0_F$;
② $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$;
③ $f(\lambda \vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$.

Le numéro ① n'est pas indispensable, mais c'est un critère plus rapide de montrer qu'une application n'est pas linéaire que ② et ③.

a. $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$: ① $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f$ n'est pas linéaire.

b. $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$: ① $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ OK.

② $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix} =$
$= f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow$ OK.

③ $f\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow$ OK

$\Rightarrow f$ est linéaire.

c. $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$: ① $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ OK.

② $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1+y_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} =$
$= f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow$ OK.

③ $f\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y \\ \lambda x \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow$ OK

$\Rightarrow f$ est linéaire.

d. $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y+1 \end{pmatrix}$: ① $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f$ n'est pas linéaire.

e. $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$: ① $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ OK.

② $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

$$= f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \to \text{ok}.$$

③ $f\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda x \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \text{ok}.$

$\Rightarrow$ f est linéaire.

f. $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$: ① $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \text{ok}.$

② $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(y_1+y_2) \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1-y_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \to \text{ok}.$

③ $f\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda y \\ \lambda x \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \text{ok}.$

$\Rightarrow$ f est linéaire.

g. $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$: ① $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \text{ok}.$

② $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ (x_1+x_2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1^2+x_2^2+2x_1x_2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix} \neq$

$\neq f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ f n'est pas linéaire.

h. $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 3y$: ① $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \to \text{ok}.$

② $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = x_1+x_2+3(y_1+y_2) =$

$= x_1+x_2+3y_1+3y_2 = x_1+3y_1+x_2+3y_2 = f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \to \text{ok}.$

③ $f\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \lambda x + 3\lambda y = \lambda(x+3y) = \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \text{ok}.$

$\Rightarrow$ f est linéaire.

i. $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y-2z \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$: ① $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ si $a \neq 0$, f n'est pas linéaire.

Voyons ce qu'il se passe pour $a = 0$:

① $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \text{ok}.$

② $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2-2(z_1+z_2) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ y_1+y_2-2z_1-2z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1-2z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2-2z_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \to \text{ok}$

③ $f\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y - 2\lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda(y-2z) \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y-2z \end{pmatrix} =$

$= \lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \text{ok}.$

Ainsi, si $a=0$, f est linéaire.

Exercice 12.12

Pour montrer que f est linéaire, il faut montrer :

① $f(0)=0$;
② $f(p_1+p_2)=f(p_1)+f(p_2)$;
③ $f(\lambda p)=\lambda f(p)$.

① $f(0)=0(a)=0 \longrightarrow$ ok.

② $f(p_1+p_2)=(p_1+p_2)(a)=p_1(a)+p_2(a) \longrightarrow$ ok.

③ $f(\lambda p)=(\lambda p)(a)=\lambda p(a) \longrightarrow$ ok.

Ainsi f est linéaire.

Exercice 12.13

a. On a $f(\vec{a}) = -\vec{e_1} + 6\vec{e_2}$, où $\vec{a} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$.

Ainsi $f(\vec{e_1} + \vec{e_2}) = -\vec{e_1} + 6\vec{e_2}$.

Comme f est une application linéaire, on a $f(\vec{e_1} + \vec{e_2}) = f(\vec{e_1}) + f(\vec{e_2})$.

On obtient ainsi $f(\vec{e_1}) + f(\vec{e_2}) = -\vec{e_1} + 6\vec{e_2}$ ①.

On a $f(\vec{b}) = -5\vec{e_1} + 6\vec{e_2}$, où $\vec{b} = -\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$.

Ainsi $f(-\vec{e_1} + 2\vec{e_2}) = -5\vec{e_1} + 6\vec{e_2}$.

Comme f est une application linéaire, on a $f(-\vec{e_1} + 2\vec{e_2}) = f(-\vec{e_1}) + f(2\vec{e_2}) =$
$= -f(\vec{e_1}) + 2f(\vec{e_2})$.

On obtient ainsi $-f(\vec{e_1}) + 2f(\vec{e_2}) = -5\vec{e_1} + 6\vec{e_2}$ ②.

On obtient donc 2 relations : $f(\vec{e_1}) + f(\vec{e_2}) = -\vec{e_1} + 6\vec{e_2}$ ① et
$-f(\vec{e_1}) + 2f(\vec{e_2}) = -5\vec{e_1} + 6\vec{e_2}$ ②.

En additionnant ① et ② terme à terme, on obtient :

$$3f(\vec{e_2}) = -6\vec{e_1} + 12\vec{e_2} \Rightarrow f(\vec{e_2}) = -2\vec{e_1} + 4\vec{e_2}.$$

Avec $f(\vec{e_2}) = -2\vec{e_1} + 4\vec{e_2}$ dans ①, on obtient :

$$f(\vec{e_1}) - 2\vec{e_1} + 4\vec{e_2} = -\vec{e_1} + 6\vec{e_2} \Rightarrow f(\vec{e_1}) = \vec{e_1} + 2\vec{e_2}.$$

On a donc $f(\vec{e_1}) = \vec{e_1} + 2\vec{e_2}$ et $f(\vec{e_2}) = -2\vec{e_1} + 4\vec{e_2}$.

On a $g(\vec{a}) = 2\vec{e_1} - 6\vec{e_2}$, où $\vec{a} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$.

Ainsi $g(\vec{e_1} + \vec{e_2}) = 2\vec{e_1} - 6\vec{e_2}$.

Comme g est une application linéaire, on a $g(\vec{e_1} + \vec{e_2}) = g(\vec{e_1}) + g(\vec{e_2})$.

On obtient ainsi $g(\vec{e_1}) + g(\vec{e_2}) = 2\vec{e_1} - 6\vec{e_2}$ ③.

On a $g(\vec{b}) = 7\vec{e_1} - 21\vec{e_2}$, où $\vec{b} = -\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$.

Comme g est une application linéaire, on a $g(-\vec{e_1} + 2\vec{e_2}) = g(-\vec{e_1}) + g(2\vec{e_2}) =$
$= -g(\vec{e_1}) + 2g(\vec{e_2})$.

On obtient ainsi $-g(\vec{e_1}) + 2g(\vec{e_2}) = 7\vec{e_1} - 21\vec{e_2}$ ④.

On obtient donc 2 relations : $g(\vec{e_1}) + g(\vec{e_2}) = 2\vec{e_1} - 6\vec{e_2}$ ③ et
$-g(\vec{e_1}) + 2g(\vec{e_2}) = 7\vec{e_1} - 21\vec{e_2}$ ④.

En additionnant ③ et ④ terme à terme, on obtient :

$$3g(\vec{e_2}) = 9\vec{e_1} - 27\vec{e_2} \Rightarrow g(\vec{e_2}) = 3\vec{e_1} - 9\vec{e_2}.$$

Avec $g(\vec{e_2}) = 3\vec{e_1} - 9\vec{e_2}$ dans ③, on obtient :

$$g(\vec{e_1}) + 3\vec{e_1} - 9\vec{e_2} = 2\vec{e_1} - 6\vec{e_2} \Rightarrow g(\vec{e_1}) = -\vec{e_1} + 3\vec{e_2}.$$

On a donc $g(\vec{e_1}) = -\vec{e_1} + 3\vec{e_2}$ et $g(\vec{e_2}) = 3\vec{e_1} - 9\vec{e_2}$.

Calculons maintenant $f(v)$ avec $\vec{v} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2}$.
Comme f est une application linéaire, on a:

$$f(\vec{v}) = f(2\vec{e_1} - \vec{e_2}) = f(2\vec{e_1}) - f(\vec{e_2}) = 2f(\vec{e_1}) - f(\vec{e_2}) =$$
$$= 2(\vec{e_1} + 2\vec{e_2}) - (-2\vec{e_1} + 4\vec{e_2}) = 2\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + 2\vec{e_1} - 4\vec{e_2} = 4\vec{e_1}.$$

Reste à trouver $g(f(\vec{v}))$ avec $f(\vec{v}) = 4\vec{e_1}$.
Comme g est une application linéaire, on a:

$$g(f(\vec{v})) = g(4\vec{e_1}) = 4g(\vec{e_1}) = 4(-\vec{e_1} + 3\vec{e_2}) = -4\vec{e_1} + 12\vec{e_2}.$$

b. La matrice F d'une transformation f dans la base $\{\vec{e_1}; \vec{e_2}\}$ est formée de 2 colonnes qui sont les composantes de $f(\vec{e_1})$ et $f(\vec{e_2})$.
D'après a., $f(\vec{e_1}) = \vec{e_1} + 2\vec{e_2}$ et $f(\vec{e_2}) = -2\vec{e_1} + 4\vec{e_2}$.
Dans la base $\{\vec{e_1}; \vec{e_2}\}$, on peut écrire $f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
La matrice F de f est alors $F = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

D'après a., $g(\vec{e_1}) = -\vec{e_1} + 3\vec{e_2}$ et $g(\vec{e_2}) = 3\vec{e_1} - 9\vec{e_2}$.
Dans la base $\{\vec{e_1}; \vec{e_2}\}$, on peut écrire $g(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $g(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$.
La matrice G de g est alors $G = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$.

La matrice M de $g * f$ est donnée par $M = G \cdot F = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -1.1 + 3.2 & -1.(-2) + 3.4 \\ 3.1 + (-9).2 & 3.(-2) + (-9).4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+6 & 2+12 \\ 3-18 & -6-36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ -15 & -42 \end{pmatrix}.$$

c. Les composantes de $g(f(\vec{v}))$ seront données par $M\vec{v}$.
Dans la base $\{\vec{e_1}; \vec{e_2}\}$, on a $M = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ -15 & -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Ainsi $M\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ -15 & -42 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.2 + 14.(-1) \\ -15.2 + (-42).(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-14 \\ -30+42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

On a ainsi $g(f(\vec{v})) = -4\vec{e_1} + 12\vec{e_2}$, ce qui est compatible avec le dernier résultat de a.

Exercice 11.14.

La matrice M d'une transformation linéaire f est formée de colonnes formées par les composantes des images par f des vecteurs de bases.

a. Homothétie de centre O et de facteur k : on a $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$; ainsi $M = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

Avec $\vec{v} = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, on a $f(\vec{v}) = M\vec{v} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ -3k \end{pmatrix} =$

$= 2k\vec{e_1} - 3k\vec{e_2}$.

b. Rotation de 30° autour de l'origine : on a $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} \cos 30° \\ \sin 30° \end{pmatrix} =$

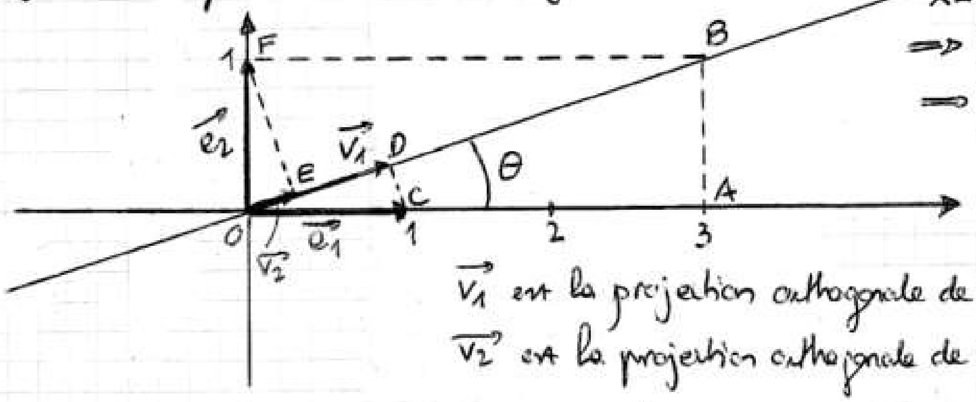
$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ et $f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} \cos(120°) \\ \sin(120°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$; ainsi $M = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

Avec $\vec{v} = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, on a $f(\vec{v}) = M\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 - \frac{1}{2}\cdot(-3) \\ \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} + \frac{3}{2} \\ 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)\vec{e_1} + \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\vec{e_2} \cong$

$\cong 4{,}964\,\vec{e_1} + 1{,}732\,\vec{e_2}$.

c. Projection orthogonale sur l'axe $a : x - 3y = 0$: on a la situation suivante :



$x - 3y = 0$
$\Rightarrow 3y = x$
$\Rightarrow y = \frac{1}{3}x$.

$\vec{v_1}$ est la projection orthogonale de $\vec{e_1}$ sur la droite ;
$\vec{v_2}$ est la projection orthogonale de $\vec{e_2}$ sur la droite.

Dans le triangle rectangle OAB, on a $\tan(\theta) = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \cong 18{,}435°$

Dans le triangle rectangle OCD, on a $\cos(\theta) = \frac{v_1}{1} \Rightarrow v_1 = \cos(\theta) \cong 0{,}949$.

Les composantes de $\vec{v_1}$ dans la base $(\vec{e_1} ; \vec{e_2})$ sont alors $\begin{pmatrix} v_1 \cos(\theta) \\ v_1 \sin(\theta) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0{,}949\cdot\cos(18{,}435°) \\ 0{,}949\cdot\sin(18{,}435°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$.

On a ainsi $\vec{v_1} = 0{,}9\vec{e_1} + 0{,}3\vec{e_2}$.

Dans le triangle rectangle OEF, on a $\cos(90° - \theta) = \frac{v_2}{1} \Rightarrow v_2 = \cos(90° - \theta) \cong 0{,}316$.

Les composantes de $\vec{v_2}$ dans la base $(\vec{e_1} ; \vec{e_2})$ sont alors $\begin{pmatrix} v_2 \cos(\theta) \\ v_1 \sin(\theta) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0{,}316\cdot\cos(18{,}435°) \\ 0{,}316\cdot\sin(18{,}435°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$.

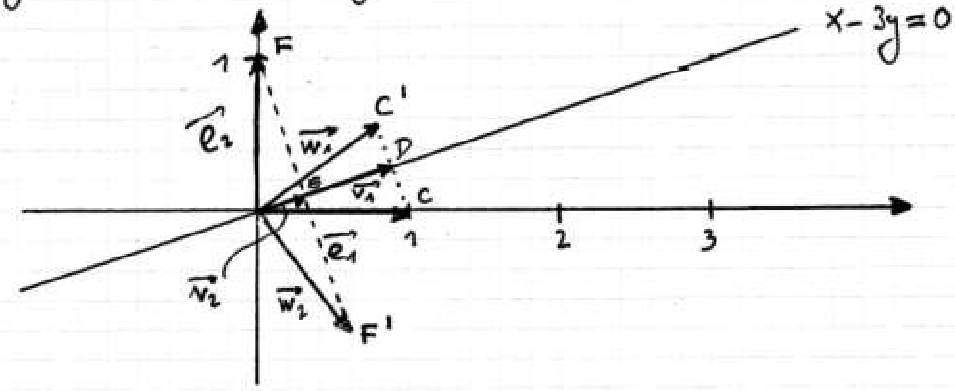
On a ainsi $\vec{v_2} = 0{,}3\vec{e_1} + 0{,}1\vec{e_2}$.

La matrice M associée à cette projection est ainsi $M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

Avec $\vec{v} = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, on a $M\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 \cdot 2 - 0{,}3 \cdot 3 \\ 0{,}3 \cdot 2 - 0{,}1 \cdot 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1{,}8 - 0{,}9 \\ 0{,}6 - 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} = 0{,}9\vec{e_1} + 0{,}3\vec{e_2} \quad (= \vec{v_1})$.

d. Symétrie d'axe $a : x - 3y = 0$: on a la situation suivante :



D'après c., on a $\vec{v_1} = 0{,}9\vec{e_1} + 0{,}3\vec{e_2}$ et $\vec{v_2} = 0{,}3\vec{e_1} + 0{,}1\vec{e_2}$

On a ainsi $\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = \vec{v_1} - \vec{e_1} = 0{,}9\vec{e_1} + 0{,}3\vec{e_2} - \vec{e_1} = -0{,}1\vec{e_1} + 0{,}3\vec{e_2}$.

Par conséquent, $\vec{w_1} = \vec{e_1} + 2\vec{CD} = \vec{e_1} + 2(-0{,}1\vec{e_1} + 0{,}3\vec{e_2}) = \vec{e_1} - 0{,}2\vec{e_1} + 0{,}6\vec{e_2} =$

$= 0{,}8\vec{e_1} + 0{,}6\vec{e_2}$.

De même, on a $\vec{FE} = \vec{OE} - \vec{OF} = \vec{v_2} - \vec{e_2} = 0{,}3\vec{e_1} + 0{,}1\vec{e_2} - \vec{e_2} = 0{,}3\vec{e_1} - 0{,}9\vec{e_2}$.

Par conséquent, $\vec{w_2} = \vec{e_2} + 2\vec{FE} = \vec{e_2} + 2(0{,}3\vec{e_1} - 0{,}9\vec{e_2}) = \vec{e_2} + 0{,}6\vec{e_1} - 1{,}8\vec{e_2} =$

$= 0{,}6\vec{e_1} - 0{,}8\vec{e_2}$.

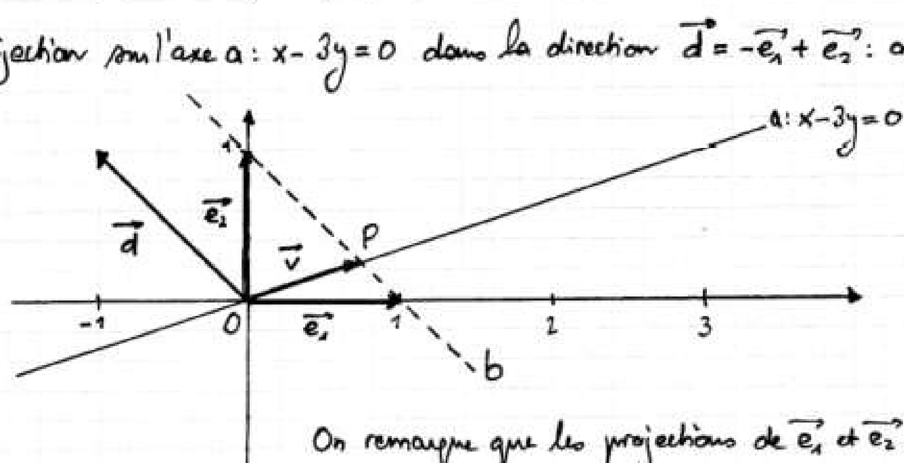
On a ainsi $\vec{w_1} = 0{,}8\vec{e_1} + 0{,}6\vec{e_2}$ et $\vec{w_2} = 0{,}6\vec{e_1} - 0{,}8\vec{e_2}$.

La matrice M associée à cette projection est ainsi $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix}$.

Avec $\vec{v} = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, on a $M\vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & -0{,}8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 2 - 0{,}6 \cdot 3 \\ 0{,}6 \cdot 2 + 0{,}8 \cdot 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1{,}6 - 1{,}8 \\ 1{,}2 + 2{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}2 \\ 3{,}6 \end{pmatrix} = -0{,}2\vec{e_1} + 3{,}6\vec{e_2}$.

e. Projection sur l'axe $a : x - 3y = 0$ dans la direction $\vec{d} = -\vec{e_1} + \vec{e_2}$: on a la situation suivante :



On remarque que les projections de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ sur l'axe a dans la direction $\vec{d}$ seront égales (on les note $\vec{v}$).

Cherchons l'équation de la droite b (voir schéma).

b est parallèle à $\vec{d} = -\vec{e_1} + \vec{e_2} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. Sa pente est donc -1. Comme b passe par $(0;1)$, son équation est $y = -x+1$.

Cherchons les coordonnées de P, intersection de a et b.

On doit résoudre le système $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ y = -x+1 \end{cases}$.

Par substitution de la 2^e^ équation dans la 1^e^, on a $x - 3(-x+1) = 0$

$\Rightarrow x + 3x - 3 = 0 \Rightarrow 4x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4}$.

Ainsi les coordonnées de P sont $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

Ainsi $\vec{v}$, projection de $\vec{e_1}$ et de $\vec{e_2}$, est $\vec{v} = \vec{OP} = \begin{pmatrix}3/4\\1/4\end{pmatrix}$.

La matrice M associée à cette projection est alors $M = \begin{pmatrix}3/4 & 3/4\\1/4 & 1/4\end{pmatrix}$.

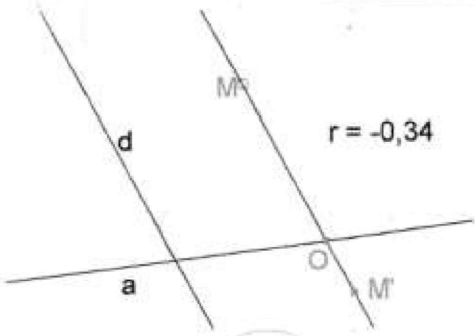
Avec $\vec{v} = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_2} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$, on a $M\vec{v} = \begin{pmatrix}3/4 & 3/4\\1/4 & 1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{4}\cdot 2 - \frac{3}{4}\cdot 3\\ \frac{1}{4}\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3/4\\-1/4\end{pmatrix} =$

$= -\frac{3}{4}\vec{e_1} - \frac{1}{4}\vec{e_2}$.

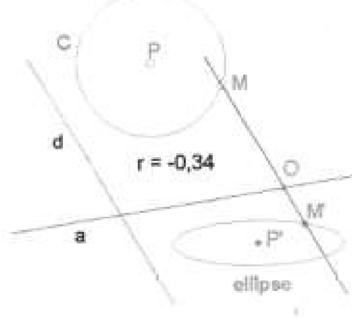
f. Affinité axiale, d'axe a, qui envoie le point $R(2;2)$ sur $R'(1;-1)$:

Voici ce qu'est une affinité axiale :

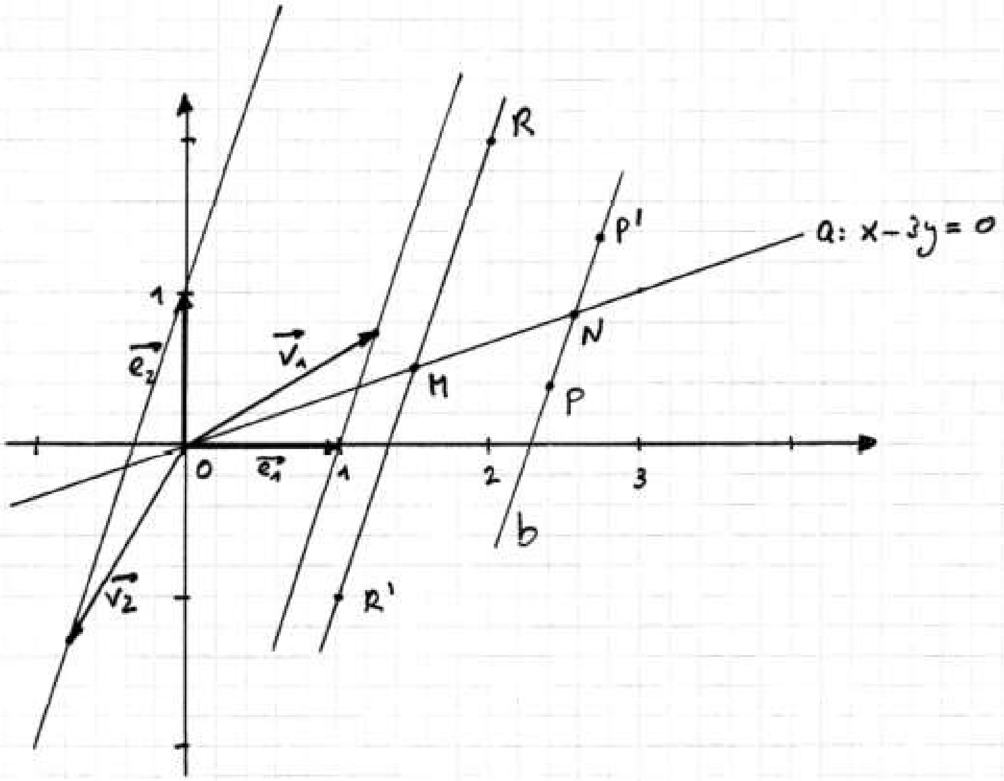
Soient deux droites a et d, un nombre r et un point M ; construire la parallèle d' par M à d, le point O intersection de d' et de a, puis le point M' homothétique de M dans l'homothétie de centre O et de rapport r.
L'application du plan dans lui-même qui associe M à M' est une affinité d'axe a, de direction d et de rapport r.



L'image d'un cercle est alors une ellipse.



Ici, on a la situation suivante :



Commençons par chercher l'équation de la droite RR' : on a $R(2;2)$ et $R'(1;-1)$; la pente de la droite est $\frac{2-(-1)}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$; la droite s'écrit donc $y=3x+h$; avec $R(2;2)$, on a $2=3\cdot 2+h \Rightarrow h=2-6=-4$; l'équation de la droite RR' est donc $y=3x-4$.

Cherchons maintenant les coordonnées de M, intersection de a et de la droite RR' : on doit résoudre le système $\begin{cases} x-3y=0 \\ y=3x-4 \end{cases}$; par substitution de la 2e équation dans la 1e, on trouve $x-3(3x-4)=0 \Rightarrow x-9x+12=0 \Rightarrow -8x+12=0 \Rightarrow 8x=12 \Rightarrow x=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ $\Rightarrow y=3x-4=3\cdot\frac{3}{2}-4=\frac{9}{2}-4=\frac{9}{2}-\frac{8}{2}=\frac{1}{2}$; ainsi, on a $M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Calculons ensuite le rapport de l'homothétie faisant partie de l'affinité : il est donné par $k=\frac{MR'}{MR}$; on a $MR'=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ et $MR=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-2\right)^2+\left(\frac{1}{2}-2\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$; comme $MR'=MR$, on trouve $k=1$.

Cherchons maintenant les coordonnées de P', image de P par l'affinité.

Posons $P(x_0;y_0)$. On cherche l'équation de la droite b parallèle à la droite RR' et passant par P. Comme b est parallèle à la droite RR', son équation s'écrit $y=3x+h$. Avec $P(x_0;y_0)$, on obtient $y_0=3x_0+h \Rightarrow h=y_0-3x_0$; ainsi l'équation de b est $y=3x+y_0-3x_0$. Cherchons les coordonnées de N, intersection de a et b. On doit résoudre le système $\begin{cases} x-3y=0 \\ y=3x+y_0-3x_0 \end{cases}$. Par substitution de la 2e équation dans la 1e, on trouve $x-3(3x+y_0-3x_0)=0 \Rightarrow x-9x-3y_0+9x_0=0 \Rightarrow -8x-3y_0+9x_0=0 \Rightarrow 8x=9x_0-3y_0$ $\Rightarrow x=\frac{9x_0-3y_0}{8} \Rightarrow y=3x+y_0-3x_0=3\cdot\frac{9x_0-3y_0}{8}+y_0-3x_0=\frac{27x_0-9y_0}{8}+y_0-3x_0=$ $=\frac{27x_0-9y_0+8y_0-24x_0}{8}=\frac{3x_0-y_0}{8}$. Les coordonnées de M sont donc $\left(\frac{9x_0-3y_0}{8};\frac{3x_0-y_0}{8}\right)$.

Pour trouver les coordonnées de P', on peut procéder comme suit : on a

$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{OP} + 2(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP}) =$
$= \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP}$.

Avec $\overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} \frac{9x_0 - 3y_0}{8} \\ \frac{3x_0 - y_0}{8} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, on trouve :

$$\overrightarrow{OP'} = 2\begin{pmatrix} \frac{9x_0 - 3y_0}{8} \\ \frac{3x_0 - y_0}{8} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9x_0 - 3y_0}{4} - x_0 \\ \frac{3x_0 - y_0}{4} - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5x_0 - 3y_0}{4} \\ \frac{3x_0 - 5y_0}{4} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les coordonnées de P' sont $\left(\frac{5x_0 - 3y_0}{4} ; \frac{3x_0 - 5y_0}{4} \right)$.

On peut maintenant chercher les images de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$.
Pour $\vec{e_1}$, on a $P(1;0)$, autrement dit $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$. Ainsi, on a
$P'\left(\frac{5}{4} ; \frac{3}{4}\right)$, d'où l'image de $\vec{e_1}$ est $\vec{v_1} = \frac{5}{4}\vec{e_1} + \frac{3}{4}\vec{e_2}$.
Pour $\vec{e_2}$, on a $P(0;1)$, autrement dit $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$. Ainsi, on a
$P'\left(-\frac{3}{4} ; -\frac{5}{4}\right)$, d'où l'image de $\vec{e_2}$ est $\vec{v_2} = -\frac{3}{4}\vec{e_1} - \frac{5}{4}\vec{e_2}$.

La matrice M associée à cette projection est $M = \begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 \\ 3/4 & -5/4 \end{pmatrix}$.

Avec $\vec{v} = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, on a $M\vec{v} = \begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 \\ 3/4 & -5/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}\cdot 2 + \frac{3}{4}\cdot 3 \\ \frac{3}{4}\cdot 2 + \frac{5}{4}\cdot 3 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 19/4 \\ 21/4 \end{pmatrix} = \frac{19}{4}\vec{e_1} + \frac{21}{4}\vec{e_2}$.

Exercice 12.15

a. On doit vérifier les différents points de la définition d'espace vectoriel :

1) Addition : à 2 éléments f et g de V, on associe un unique élément $f+g$ de V :
si $f(x) = e^{-x}(a_1\cos(2x) + b_1\sin(2x))$ et $g(x) = e^{-x}(a_2\cos(2x) + a_2\sin(2x))$, on a
$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = e^{-x}((a_1+a_2)\cos(2x) + (b_1+b_2)\sin(2x)) \in V$ et unique $\to$ OK.

2) Multiplication par des réels : à $f \in V$, on associe, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, un unique élément $\alpha f \in V$: si $f(x) = e^{-x}(a\cos(2x) + b\sin(2x))$, on a $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) =$
$= e^{-x}((\alpha a)\cos(2x) + (\alpha b)\sin(2x)) \in V$ et unique $\to$ OK.

3) Associativité de l'addition : $f+(g+h) = (f+g)+h \to$ OK.

4) Existence d'un élément neutre pour l'addition : c'est la fonction 0 qui appartient bien à E (on prend $a=b=0$) $\to$ OK.

5) Existence d'un élément symétrique $-f$ de f $(f+(-f)=0)$: il suffit de prendre $-a$ et $-b$ à la place de a et b respectivement et on a $f+(-f)=0 \to$ OK.

6) Commutativité de l'addition : $f+g = g+f \to$ OK.

7) $\alpha\cdot(\beta\cdot f) = (\alpha\cdot\beta)\cdot f$ est clair $\to$ OK

8) $1\cdot f = f \to$ OK

9) $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g \to$ OK

10) $(\alpha+\beta)\cdot f = \alpha f + \beta f \to$ OK.

Ainsi V est bien un espace vectoriel.

Pour vérifier qu'une opération est une opération interne de V, il suffit de montrer que l'image par l'opération de tout élément de V est un élément de V.
Soit $f \in V$. f s'écrit donc $f(x) = e^{-x}(a\cos(2x) + b\sin(2x))$, $a, b \in \mathbb{R}$.
On a $f = u\cdot v$ avec $u = e^{-x}$ et $v = a\cos(2x) + b\sin(2x)$. On a alors
$u' = -e^{-x}$ et $v' = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)$ et, ainsi,
$f'(x) = u'v + uv' = -e^{-x}(a\cos(2x) + b\sin(2x)) + e^{-x}(-2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)) =$
$= (-a\cos(2x) - b\sin(2x) - 2a\sin(2x) + 2b\cos(2x))e^{-x} =$
$= e^{-x}((-a+2b)\cos(2x) + (-2a-b)\sin(2x))$, ce qui est bien de la forme des éléments de V puisque $-a+2b \in \mathbb{R}$ et $-2a-b \in \mathbb{R}$.
Ainsi la dérivation est bien une opération interne pour V.

b. Pour montrer qu'une application D est linéaire, il suffit de vérifier si elle satisfait à :
① $D(0) = 0$;
② $D(f+g) = D(f) + D(g)$;
③ $D(\lambda f) = \lambda D(f)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

1. La dérivée de la fonction 0 est bien 0.
2. La dérivée d'une somme est bien la somme des dérivées.
3. La dérivée de $\lambda \cdot f$ est bien $\lambda \cdot$ la dérivée de f, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi la dérivation est bien une transformation linéaire.

On a la base $f_1(x) = e^{-x}\cos(2x)$ et $f_2(x) = e^{-x}\sin(2x)$.
En utilisant la formule de dérivation du produit, on trouve :
$f_1'(x) = -e^{-x}\cos(2x) - 2e^{-x}\sin(2x) = -1 \cdot f_1(x) - 2 \cdot f_2(x)$ et
$f_2'(x) = -e^{-x}\sin(2x) + 2e^{-x}\cos(2x) = 2 \cdot f_1(x) - 1 \cdot f_2(x)$.
Ainsi la matrice de la dérivation par rapport à la base $(f_1; f_2)$ de V est

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.16

Pour pouvoir effectuer le produit $E \cdot F$ de 2 matrices E et F, il faut que le nombre de colonnes de E soit égal au nombre de colonnes de F. Si ce n'est pas le cas, on ne peut pas effectuer le produit.

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 + 2.2 + 3.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix}$.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

b. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2.3 - 3.1 & 2.1 - 3.0 & 2.2 - 3.2 \\ -1.3 + 2.1 & -1.1 - 2.0 & -1.2 + 2.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$B \cdot A$ est impossible puisque B a 3 colonnes et A 2 lignes.

c. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0.1 - 1.0 + 5.3 & 0.4 - 1(-1) + 5.2 \\ 2.1 - 2.0 - 3.3 & 2.4 - 2.(-1) - 3.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.0 + 4.2 & 1.(-1) + 4.(-2) & 1.5 + 4.(-3) \\ 0.0 - 1.2 & 0.(-1) - 1.(-2) & 0.5 - 1.(-3) \\ 3.0 + 2.2 & 3.(-1) + 2.(-2) & 3.5 + 2.(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -9 & -7 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -7 & 9 \end{pmatrix}.$$

d. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -9 & 7 & 9 \\ 14 & -8 & -12 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -25 & 28 \\ 7 & -16 & -16 \\ 2 & -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.17

a. Si p est un polynôme de degré ≤ 2, sa dérivée p' est un polynôme de degré ≤ 1.
Ainsi F est l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 1.

b. Une base de E est $(x^2; x; 1)$ (tout polynôme de degré ≤ 2 peut s'écrire comme une combinaison linéaire de x^2, x et 1.
Une base de F est $(x; 1)$.

c. On a $(x^2)' = 2x$, $(x)' = 1$, $(1)' = 0$.
Ainsi $(x^2)' = 2 \cdot x + 0 \cdot 1$, $(x') = 0 \cdot x + 1 \cdot 1$, $(1)' = 0 \cdot x + 0 \cdot 1$.
Ainsi la matrice T est $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 12.18

a. On a $f(\vec{e_1})=\vec{e_2}$, $f(\vec{e_2})=\vec{e_1}$, $f(\vec{e_3})=\vec{e_3}$.

La matrice de la transformation est donc $M=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Avec $\vec{v}=2\vec{e_1}-3\vec{e_2}+5\vec{e_3}=\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$, on a $M\vec{v}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$.

b. On a $f(\vec{e_1})=-\vec{e_1}$, $f(\vec{e_2})=\vec{e_2}$, $f(\vec{e_3})=-\vec{e_3}$.

La matrice de la transformation est donc $M=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

Avec $\vec{v}=2\vec{e_1}-3\vec{e_2}+5\vec{e_3}=\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$, on a $M\vec{v}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-3\\-5\end{pmatrix}$.

c. Effectuer une rotation de $+120°$ autour de l'axe orienté de direction $\vec{a}=\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}$ signifie que $f(\vec{e_1})=\vec{e_2}$, $f(\vec{e_2})=\vec{e_3}$, $f(\vec{e_3})=\vec{e_1}$ (un tiers de tour à chaque fois).

La matrice de la transformation est donc $M=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Avec $\vec{v}=2\vec{e_1}-3\vec{e_2}+5\vec{e_3}=\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$, on a $M\vec{v}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}$.

d. $f(\vec{e_1})$ sera donné par le vecteur $\vec{OP}$ où P est l'intersection de Π et d, où Π est le plan perpendiculaire à $\vec{a}$ et passant par $(1;0;0)$ et d est la droite parallèle à $\vec{a}$ et passant par l'origine.

Comme $\Pi \perp \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, on a Π: $x+y+z+d=0$.

Avec le point $(1;0;0)$, on obtient $1+0+0+d=0 \Rightarrow d=-1$.

L'équation de Π est donc $x+y+z-1=0$.

Comme $d \parallel \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et d passe par l'origine, les équations de a sont $\begin{cases}x=\lambda\\y=\lambda\\z=\lambda\end{cases}$.

L'intersection de Π et a est donnée par $\lambda+\lambda+\lambda-1=0 \Rightarrow 3\lambda=1 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{3}$.

On a par conséquent $P\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ et $f(\vec{e_1})=\vec{OP}=\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\vec{e_1}+\frac{1}{3}\vec{e_2}+\frac{1}{3}\vec{e_3}$.

Similairement, on a $f(\vec{e_2})=\frac{1}{3}\vec{e_1}+\frac{1}{3}\vec{e_2}+\frac{1}{3}\vec{e_3}$ et $f(\vec{e_3})=\frac{1}{3}\vec{e_1}+\frac{1}{3}\vec{e_2}+\frac{1}{3}\vec{e_3}$.

La matrice de la transformation est donc $M=\begin{pmatrix}1/3&1/3&1/3\\1/3&1/3&1/3\\1/3&1/3&1/3\end{pmatrix}$.

Avec $\vec{v}=2\vec{e_1}-3\vec{e_2}+5\vec{e_3}=\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$, on a $M\vec{v}=\begin{pmatrix}1/3&1/3&1/3\\1/3&1/3&1/3\\1/3&1/3&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}(2-3+5)\\\frac{1}{3}(2-3+5)\\\frac{1}{3}(2-3+5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/3\\4/3\\4/3\end{pmatrix}$

e. On a $f(\vec{e_1})=\vec{0}$, $f(\vec{e_2})=\vec{e_2}$, $f(\vec{e_3})=\vec{e_3}$.

La matrice de la transformation est donc $M=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Avec $\vec{v} = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_2} + 5\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, on a $M\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

f. Commençons par vérifier que la projection de $O(0;0;0)$ est O.
La droite verticale d_0 passant par $O(0;0;0)$ a pour équations $d_0 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$.
L'intersection de d_0 et du plan $x+y-z=0$ est donnée par $0+0-\lambda=0 \Rightarrow \lambda = 0$.
L'image de $O(0;0;0)$ est donc bien $O(0;0;0)$.
L'extrémité de $\vec{e_1}$ est $P_1(1;0;0)$.
La droite verticale d_1 passant par P_1 a pour équations $d_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$.
L'intersection de d_1 et du plan $x+y-z=0$ est donnée par $1+0-\lambda=0 \Rightarrow \lambda = 1$.
L'image de $P_1(1;0;0)$ est donc $P_1'(1;0;1)$.
Ainsi l'image de $\vec{e_1}$ est $\vec{OP_1'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
L'extrémité de $\vec{e_2}$ est $P_2(0;1;0)$.
La droite verticale d_2 passant par P_2 a pour équations $d_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$.
L'intersection de d_2 et du plan $x+y-z=0$ est donné par $0+1-\lambda=0 \Rightarrow \lambda = 1$.
L'image de $P_2(0;1;0)$ est donc $P_2'(0;1;1)$.
Ainsi l'image de $\vec{e_2}$ est $\vec{OP_2'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
L'extrémité de $\vec{e_3}$ est $P_3(0;0;1)$.
La droite verticale d_3 passant par P_3 a pour équation $d_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$.
L'intersection de d_3 et du plan $x+y-z=0$ est donnée par $0+0-\lambda=0 \Rightarrow \lambda = 0$.
L'image de $P_3(0;0;1)$ est donc $P_3' = O(0;0;0)$.
Ainsi l'image de $\vec{e_3}$ est $\vec{OP_3'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La matrice de la transformation est par conséquent $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Avec $\vec{v} = 2\vec{e_1} - 3\vec{e_2} + 5\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, on a $M\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

g. La projection P' d'un point $P(x_0;y_0;z_0)$ sur le plan $x+y-z$ est l'intersection du plan et de la droite perpendiculaire au plan et passant par P.
Un vecteur perpendiculaire au plan est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ce vecteur est donc un vecteur directeur de la droite perpendiculaire passant par P. Les équations de cette droite sont donc : $\begin{cases} x = \lambda + x_0 \\ y = \lambda + y_0 \\ z = -\lambda + z_0 \end{cases}$.
P', l'intersection de cette droite avec le plan $x+y-z=0$, est donné par
$\lambda + x_0 + \lambda + y_0 - (-\lambda + z_0) = 0 \Rightarrow 3\lambda + x_0 + y_0 - z_0 = 0 \Rightarrow 3\lambda = -x_0 - y_0 + z_0$
$\Rightarrow \lambda = \frac{-x_0 - y_0 + z_0}{3}$.

Avec $\lambda = \frac{-x_0 - y_0 + z_0}{3}$, on a $x = \lambda + x_0 = \frac{-x_0 - y_0 + z_0}{3} + x_0 = \frac{2x_0 - y_0 + z_0}{3}$,
$y = \lambda + y_0 = \frac{-x_0 - y_0 + z_0}{3} + y_0 = \frac{-x_0 + 2y_0 + z_0}{3}$ et $z = -\lambda + z_0 =$
$= -\frac{-x_0 - y_0 + z_0}{3} + z_0 = \frac{x_0 + y_0 - z_0}{3} + z_0 = \frac{x_0 + y_0 + 2z_0}{3}$.

On a ainsi $P'\left(\frac{2x_0 - y_0 + z_0}{3} ; \frac{-x_0 + 2y_0 + z_0}{3} ; \frac{x_0 + y_0 + 2z_0}{3}\right)$.

Si $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, on a $P'(0;0;0)$.
Par conséquent, l'image de $\overrightarrow{OP}$ est $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} (2x_0 - y_0 + z_0)/3 \\ (-x_0 + 2y_0 + z_0)/3 \\ (x_0 + y_0 + 2z_0)/3 \end{pmatrix}$.

Avec $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{e_1}$, on a $x_0 = 1$, $y_0 = z_0 = 0$. Ainsi $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

L'image de $\overrightarrow{e_1}$ est donc $\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

Avec $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{e_2}$, on a $y_0 = 1$, $x_0 = z_0 = 0$. Ainsi $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

L'image de $\overrightarrow{e_2}$ est donc $\begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

Avec $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{e_3}$, on a $z_0 = 1$, $x_0 = y_0 = 0$. Ainsi $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

L'image de $\overrightarrow{e_3}$ est donc $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

La matrice de la transformation est par conséquent $M = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

Avec $\vec{v} = 2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, on a $M\vec{v} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} - \frac{6}{3} + \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} - \frac{3}{3} + \frac{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

h. D'après g., on sait que la projection orthogonale sur le plan $x + y - z = 0$ d'un point $P(x_0 ; y_0 ; z_0)$ est $P'\left(\frac{2x_0 - y_0 + z_0}{3} ; \frac{-x_0 + 2y_0 + z_0}{3} ; \frac{x_0 + y_0 + 2z_0}{3}\right)$.
Le symétrique P'' de P par rapport au plan $x + y - z = 0$ sera alors donné par
$\overrightarrow{OP''} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP''} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} + 2(\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OP'} - 2\overrightarrow{OP} =$
$= 2\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2x_0 - y_0 + z_0}{3} \\ \frac{-x_0 + 2y_0 + z_0}{3} \\ \frac{x_0 + y_0 + 2z_0}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4x_0 - 2y_0 + 2z_0}{3} - x_0 \\ \frac{-2x_0 + 4y_0 + 2z_0}{3} - y_0 \\ \frac{2x_0 + 2y_0 + 4z_0}{3} - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_0 - 2y_0 + 2z_0}{3} \\ \frac{-2x_0 + y_0 + 2z_0}{3} \\ \frac{2x_0 + 2y_0 + z_0}{3} \end{pmatrix}$.

Avec $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{e_1}$, on a $x_0 = 1$, $y_0 = z_0 = 0$. Ainsi $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

L'image de $\overrightarrow{e_1}$ est donc $\begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

Avec $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{e_2}$, on a $y_0 = 1$, $x_0 = z_0 = 0$. Ainsi $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

L'image de $\overrightarrow{e_2}$ est donc $\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

Avec $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{e_3}$, on a $z_0 = 1$, $x_0 = y_0 = 0$. Ainsi $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

L'image de $\overrightarrow{e_3}$ est donc $\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

La matrice de la transformation est par conséquent $M = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Avec $\vec{v} = 2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, on a $M\vec{v} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{6}{3} + \frac{10}{3} \\ -\frac{4}{3} - \frac{3}{3} + \frac{10}{3} \\ \frac{4}{3} - \frac{6}{3} + \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

i. Si on tourne autour de l'axe des abscisses, l'image de $\overrightarrow{e_1}$ est $\overrightarrow{e_1}$.
On sait que l'image de $\overrightarrow{e_3}$ est $\overrightarrow{e_2}$.
On en déduit alors que l'image de $\overrightarrow{e_2}$ est $-\overrightarrow{e_3}$.
Ainsi l'image de $\overrightarrow{e_1}$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, l'image de $\overrightarrow{e_2}$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et l'image de $\overrightarrow{e_3}$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La matrice de la transformation est par conséquent $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Avec $\vec{v} = 2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, on a $M\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 12.19

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$: l'image de $\vec{e_1}$ est $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\vec{e_1}$; l'image de $\vec{e_2}$ est $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=-\vec{e_2}$;
la transformation est donc une symétrie d'axe 1 (sur lequel est $\vec{e_1}$).

$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$: l'image de $\vec{e_1}$ est $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\vec{e_2}$; l'image de $\vec{e_2}$ est $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\vec{e_1}$;
la transformation est donc une symétrie d'axe $y=x$.

$C=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$: l'image de $\vec{e_1}$ est $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=-\vec{e_2}$; l'image de $\vec{e_2}$ est $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\vec{e_1}$;
la transformation est donc une rotation autour de l'origine et de $-90°$ (dans le sens des aiguilles d'une montre).

$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$: l'image de $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{e_1}$; l'image de $\vec{e_2}$ est $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; l'image de $\vec{e_3}$ est $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{e_3}$;
la transformation est donc la projection sur la paroi (plan Oxz).

$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$: l'image de $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{e_1}$; l'image de $\vec{e_2}$ est $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=-\vec{e_2}$; l'image de $\vec{e_3}$ est $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{e_3}$; la transformation est donc la symétrie par rapport au plan $y=0$.

$F=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$: l'image de $\vec{e_1}$ est $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\vec{e_2}$; l'image de $\vec{e_2}$ est $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{e_1}$; l'image de $\vec{e_3}$ est $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{e_3}$; la transformation est donc la symétrie par rapport au plan $y=x$.

$G=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$: l'image de $\vec{e_1}$ est $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{e_1}$; l'image de $\vec{e_2}$ est $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; l'image de $\vec{e_3}$ est $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=-\vec{e_3}$;
la transformation est donc la composition de la projection sur la paroi et de la symétrie par rapport au sol (plan Oxy).

$H=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$: l'image de $\vec{e_1}$ est $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\vec{e_2}$; l'image de $\vec{e_2}$ est $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}=-\vec{e_1}$; l'image de $\vec{e_3}$ est $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{e_3}$; la transformation est donc la rotation de $90°$ autour de l'axe Oz.

$I=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&2\\0&2&0\end{pmatrix}$: l'image de $\vec{e_1}$ est $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=2\vec{e_1}$; l'image de $\vec{e_2}$ est $\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}=2\vec{e_3}$; l'image de $\vec{e_3}$ est $\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=2\vec{e_2}$; la transformation est donc la composition de la symétrie par rapport au plan $z=y$ et de l'homothétie de centre O et de facteur 2.

Exercice 12.20

On a $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ z-2y \end{pmatrix}$.

L'image de $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

L'image de $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

L'image de $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

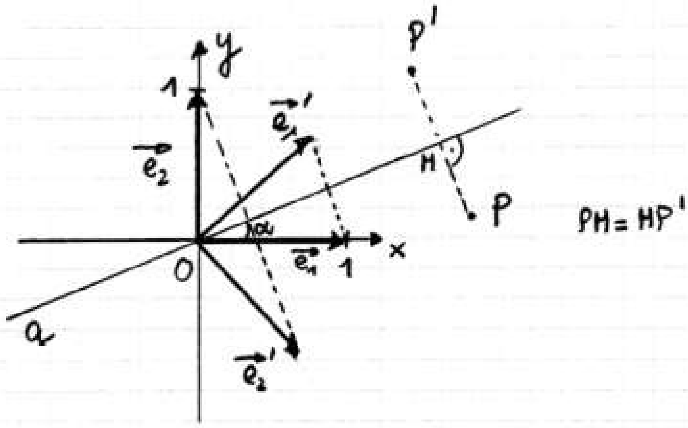
La matrice de f est ainsi $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Avec $\vec{v} = 3\vec{e_1} - 4\vec{e_2} - \vec{e_3}$, on a $f(\vec{v}) = M\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 - 2\cdot 4 \\ -2\cdot(-4) - 1\cdot 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 12.21

a. On a la situation suivante :



La droite a fait un angle α avec l'axe x. Sa pente est alors $\tan(\alpha)$.
L'équation de a est donc $y = \tan(\alpha) \cdot x$.
Soit $P(x_0 ; y_0)$ un point quelconque du plan. Cherchons les coordonnées de son image P' par la symétrie d'axe a.
La pente de la droite PP' est $-\frac{1}{\tan(\alpha)}$ (la droite PP' est perpendiculaire à a).
Son équation est donc $y = -\frac{1}{\tan(\alpha)} x + h$.

Avec le point $P(x_0 ; y_0)$, on a $y_0 = -\frac{1}{\tan(\alpha)} x_0 + h \Longrightarrow h = y_0 + \frac{1}{\tan(\alpha)} x_0$.

L'équation de la droite PP' est donc $y = -\frac{1}{\tan(\alpha)} x + \frac{1}{\tan(\alpha)} x_0 + y_0$.

Cherchons les coordonnées du point H, intersection de a et de la droite PP'. On doit résoudre le système $\begin{cases} y = \tan(\alpha) \cdot x \\ y = -\frac{1}{\tan(\alpha)} \cdot x + \frac{1}{\tan(\alpha)} x_0 + y_0 \end{cases}$

On obtient l'équation

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha) \cdot x &= -\frac{1}{\tan(\alpha)} \cdot x + \frac{1}{\tan(\alpha)} x_0 + y_0 && \Big|\ \cdot \tan(\alpha) \\
\tan^2(\alpha) \cdot x &= -x + x_0 + \tan(\alpha) y_0 && \Big|\ +x \\
\tan^2(\alpha) \cdot x + x &= x_0 + \tan(\alpha) y_0 && \Big|\ \text{factorisation} \\
(\tan^2(\alpha) + 1) x &= x_0 + \tan(\alpha) y_0 && \Big|\ : (\tan^2(\alpha)+1) \\
x &= \frac{x_0 + \tan(\alpha) y_0}{\tan^2(\alpha) + 1}
\end{aligned}$$

Avec $x = \frac{x_0 + \tan(\alpha) y_0}{\tan^2(\alpha)+1}$, on obtient $y = \tan(\alpha) \cdot x = \frac{\tan(\alpha)(x_0 + \tan(\alpha) y_0)}{\tan^2(\alpha)+1}$.
Ainsi les coordonnées de H sont $\left(\frac{x_0 + \tan(\alpha) y_0}{\tan^2(\alpha)+1} ; \frac{\tan(\alpha)(x_0 + \tan(\alpha) y_0)}{\tan^2(\alpha)+1} \right)$.

On a maintenant $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{OP} + 2(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP}) =$

$$= \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OH} - 2\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} =$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_0 + \tan(\alpha) y_0}{\tan^2(\alpha)+1} \\ \frac{\tan(\alpha)(x_0 + \tan(\alpha) y_0)}{\tan^2(\alpha)+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x_0 + 2\tan(\alpha) y_0}{\tan^2(\alpha)+1} - x_0 \\ \frac{2\tan(\alpha)(x_0 + \tan(\alpha) y_0)}{\tan^2(\alpha)+1} - y_0 \end{pmatrix}.$$

On peut chercher maintenant les images de $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$.

On a $\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On prend donc $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.

Ainsi $\overrightarrow{e_1}' = \overrightarrow{OP}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{\tan^2(\alpha)+1} - 1 \\ \frac{2\tan(\alpha)}{\tan^2(\alpha)+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2-\tan^2(\alpha)-1}{\tan^2(\alpha)+1} \\ \frac{2\tan(\alpha)}{\tan^2(\alpha)+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} \\ \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} \end{pmatrix}$.

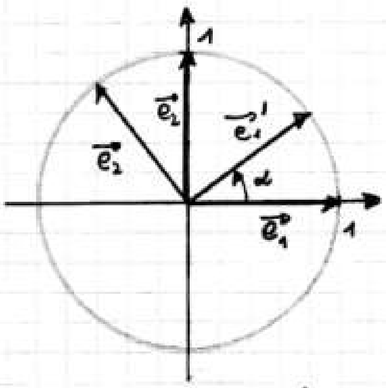
On a $\overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On prend ici $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

Ainsi $\overrightarrow{e_2}' = \overrightarrow{OP}' = \begin{pmatrix} \frac{2\tan(\alpha)}{\tan^2(\alpha)+1} \\ \frac{2\tan^2(\alpha)}{\tan^2(\alpha)+1} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\tan(\alpha)}{\tan^2(\alpha)+1} \\ \frac{2\tan^2(\alpha)-\tan^2(\alpha)-1}{\tan^2(\alpha)+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} \\ \frac{-1+\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} \end{pmatrix}$.

Par conséquent, la matrice de la transformation est

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} & \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} \\ \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} & \frac{-1+\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} \end{pmatrix}$$

b. On a la situation suivante :



D'après la trigonométrie, l'image de $\overrightarrow{e_1}$ est $\overrightarrow{e_1}' = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ et l'image de $\overrightarrow{e_2}' = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

Par conséquent, la matrice de la transformation est $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

c. On pronostique que $S_\alpha \cdot S_\alpha = I$ (transformation identité) et $R_\alpha \cdot R_\alpha = R_{2\alpha}$.

On a $S_\alpha \cdot S_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} & \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} \\ \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} & \frac{-1+\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} & \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} \\ \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} & \frac{-1+\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}\right)^2 + \left(\frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}\right)^2 & \frac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} \cdot \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} + \frac{2\tan(\alpha)(-1+\tan^2(\alpha))}{1+\tan^2(\alpha)} \\ \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} \cdot \frac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} + \frac{-1+\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} \cdot \frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} & \left(\frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}\right)^2 + \left(\frac{-1+\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)}\right)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1-2\tan^2(\alpha)+\tan^4(\alpha)+4\tan^2(\alpha)}{(1+\tan^2(\alpha))^2} & \frac{2\tan(\alpha)(1-\tan^2(\alpha))-2\tan(\alpha)(1-\tan^2(\alpha))}{(1+\tan^2(\alpha))^2} \\ \frac{2\tan(\alpha)(1-\tan^2(\alpha))-2\tan(\alpha)(1-\tan^2(\alpha))}{(1+\tan^2(\alpha))^2} & \frac{4\tan^2(\alpha)+1-2\tan^2(\alpha)+\tan^4(\alpha)}{(1+\tan^2(\alpha))^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+2\tan^2(\alpha)+\tan^4(\alpha)}{(1+\tan^2(\alpha))^2} & 0 \\ 0 & \frac{1+2\tan^2(\alpha)+\tan^4(\alpha)}{(1+\tan^2(\alpha))^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(1+\tan^2(\alpha))^2}{(1+\tan^2(\alpha))^2} & 0 \\ 0 & \frac{(1+\tan^2(\alpha))^2}{(1+\tan^2(\alpha))^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

De plus $R_\alpha \cdot R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\cos(\alpha) & -\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) & -2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) & \cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha) \end{pmatrix}.$$

D'après la trigonométrie, on a $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$ et $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ (Formulaires et Tables p. 29).

Ainsi $R_\alpha \cdot R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & \cos(2\alpha) \end{pmatrix} = R_{2\alpha}.$

d. On a $R_{2(\alpha-\beta)} = \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha-\beta) & -\sin 2(\alpha-\beta) \\ \sin 2(\alpha-\beta) & \cos 2(\alpha-\beta) \end{pmatrix}.$

Avec $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$, $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$, $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$ et $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$ (F+T p. 28 et 29), on a :

$$\cos 2(\alpha-\beta) = \cos^2(\alpha-\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) =$$
$$= (\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin\beta)^2 - (\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta))^2 =$$
$$= \cos^2(\alpha)\cos^2(\beta) + 2\cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\alpha)\sin(\beta) + \sin^2(\alpha)\sin^2(\beta)$$
$$- \sin^2(\alpha)\cos^2(\beta) + 2\cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\alpha)\sin(\beta) - \cos^2(\alpha)\sin^2(\beta) =$$
$$= \cos^2(\alpha)\cos^2(\beta) + \sin^2(\alpha)\sin^2(\beta) - \sin^2(\alpha)\cos^2(\beta) - \cos^2(\alpha)\sin^2(\beta) +$$
$$+ 4\cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\alpha)\sin(\beta) =$$
$$= \cos^2(\alpha)(\cos^2(\beta)-\sin^2(\beta)) - \sin^2(\alpha)(\cos^2(\beta)-\sin^2(\beta))$$
$$+ 4\cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\alpha)\sin(\beta) =$$
$$= (\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha))(\cos^2(\beta)-\sin^2(\beta)) + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cdot 2\sin(\beta)\cos(\beta) =$$
$$= \cos(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin(2\alpha)\cdot\sin(2\beta);$$

$$\sin 2(\alpha-\beta) = 2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta) = 2(\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta))(\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)) =$$
$$= 2(\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos^2(\beta) + \sin^2(\alpha)\sin(\beta)\cos(\beta) - \cos^2(\alpha)\sin(\beta)\cos(\beta)$$
$$- \sin(\alpha)\cos(\alpha)\sin^2(\beta)) =$$
$$= 2(\sin(\beta)\cos(\beta)(\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha)) + \sin(\alpha)\cos(\alpha)(\cos^2(\beta)-\sin^2(\beta))) =$$
$$= -2\sin(\beta)\cos(\beta)(\cos^2(\alpha)-\sin^2(\alpha)) + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)(\cos^2(\beta)-\sin^2(\beta)) =$$
$$= -\sin(2\beta)\cos(2\alpha) + \sin(2\alpha)\cos(2\beta)$$

On obtient ainsi $R_{2(\alpha-\beta)} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin(2\alpha)\sin(2\beta) & \sin(2\beta)\cos(2\alpha) - \sin(2\alpha)\cos(2\beta) \\ -\sin(2\beta)\cos(2\alpha) + \sin(2\alpha)\cos(2\beta) & \cos(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin(2\alpha)\sin(2\beta) \end{pmatrix}$

D'autre part, comme $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ et, comme $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, on a

$$\frac{1-\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} = \frac{1 - \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}{1 + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}} = \frac{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}{1} = \cos(2\alpha) \text{ et}$$

$$\frac{2\tan(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} = \frac{2\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}{1+\frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}} = \frac{2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)} = \frac{2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{1} = \sin(2\alpha).$$

On peut donc écrire $S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$.

Ainsi $S_\alpha \cdot S_\beta = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \cos(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin(2\alpha)\sin(2\beta) & \sin(2\beta)\cos(2\alpha) - \sin(2\alpha)\cos(2\beta) \\ \sin(2\alpha)\cos(2\beta) - \cos(2\alpha)\sin(2\beta) & \sin(2\alpha)\sin(2\beta) + \cos(2\alpha)\cos(2\beta) \end{pmatrix}$$

et on a bien $S_\alpha \cdot S_\beta = R_{2(\alpha-\beta)}$.

Exercice 12.22

a. Soit $P(x_0;y_0;z_0)$ un point de l'espace. On va chercher des équations de la droite d passant par P et perpendiculaire au plan $x-y-z=0$. L'intersection M de d et du plan sera la projection orthogonale de P sur le plan.

Un vecteur normal au plan $x-y-z=0$ et, donc, un vecteur directeur de d est $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Des équations de d sont donc $\begin{cases} x = x_0+\lambda \\ y = y_0-\lambda \\ z = z_0-\lambda \end{cases}$.

M, l'intersection de d et du plan, est donné par $x_0+\lambda-(y_0-\lambda)-(z_0-\lambda)=0$

$\Rightarrow x_0-y_0-z_0+3\lambda=0 \Rightarrow 3\lambda=-x_0+y_0+z_0 \Rightarrow \lambda=\dfrac{-x_0+y_0+z_0}{3}$.

Les coordonnées de M sont donc : $x = x_0+\dfrac{-x_0+y_0+z_0}{3} = \dfrac{2x_0+y_0+z_0}{3}$;

$$y = y_0-\frac{-x_0+y_0+z_0}{3} = \frac{x_0+2y_0-z_0}{3};$$

$$z = z_0-\frac{-x_0+y_0+z_0}{3} = \frac{x_0-y_0+2z_0}{3}.$$

Ainsi $M\left(\dfrac{2x_0+y_0+z_0}{3};\dfrac{x_0+2y_0-z_0}{3};\dfrac{x_0-y_0+2z_0}{3}\right)$.

Avec $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\overrightarrow{OP}$, on a $x_0=1$, $y_0=z_0=0$. Ainsi $M=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

L'image de $\vec{e_1}$ est donc $\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$.

Avec $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\overrightarrow{OP}$, on a $y_0=1$, $x_0=z_0=0$. Ainsi $M=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

L'image de $\vec{e_2}$ est donc $\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}1/3\\2/3\\-1/3\end{pmatrix}$.

Avec $\vec{e_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\overrightarrow{OP}$, on a $z_0=1$, $x_0=y_0=0$. Ainsi $M=\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

L'image de $\vec{e_3}$ est donc $\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\2/3\end{pmatrix}$.

La matrice de la transformation est donc $P=\begin{pmatrix}2/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 2/3 & -1/3\\ 1/3 & -1/3 & 2/3\end{pmatrix}$.

b. On a clairement $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

De plus, $Q=I-P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 2/3 & -1/3\\ 1/3 & -1/3 & 2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & -1/3 & -1/3\\ -1/3 & 1/3 & 1/3\\ -1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$,

$$P^2=\begin{pmatrix}2/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 2/3 & -1/3\\ 1/3 & -1/3 & 2/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 2/3 & -1/3\\ 1/3 & -1/3 & 2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9} & \frac{2}{9}+\frac{2}{9}-\frac{1}{9} & \frac{2}{9}-\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\\ \frac{2}{9}+\frac{2}{9}-\frac{1}{9} & \frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9} & \frac{1}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}\\ \frac{2}{9}-\frac{1}{9}+\frac{2}{9} & \frac{1}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9} & \frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\end{pmatrix}=$$

$=\begin{pmatrix}2/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/3 & 2/3 & -1/3\\ 1/3 & -1/3 & 2/3\end{pmatrix}=P$, ce qui est logique puisque la projection d'un point du plan sur le plan est ce point lui-même.

Finalement $PQ=P(I-P)=P\cdot I-P^2=P-P=0$, matrice nulle.

c. On cherche les vecteurs 1-propres pour Q, autrement les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 de Q. Avec $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, cela signifie qu'on doit chercher les $\vec{v}$ tels que $Q\vec{v} = \vec{v}$ $(1 \cdot \vec{v})$.

On a $Q = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. Ainsi $Q\vec{v} = \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{v_1 - v_2 - v_3}{3} \\ \frac{-v_1 + v_2 + v_3}{3} \\ \frac{-v_1 + v_2 + v_3}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{v_1 - v_2 - v_3}{3} = v_1 \\ \frac{-v_1 + v_2 + v_3}{3} = v_2 \\ \frac{-v_1 + v_2 + v_3}{3} = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 - v_2 - v_3 = 3v_1 \\ -v_1 + v_2 + v_3 = 3v_2 \\ -v_1 + v_2 + v_3 = 3v_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ \left.\begin{matrix} v_1 + 2v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 + 2v_3 = 0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} 2v_1 + v_2 + v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + 2v_2 - v_3 = 0 \\ v_1 - v_2 + 2v_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_3 = v_1 + 2v_2 \\ v_1 - v_2 + 2(v_1 + 2v_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = v_1 + 2v_2 \\ v_1 - v_2 + 2v_1 + 4v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = v_1 + 2v_2 \\ 3v_1 + 3v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_3 = v_1 + 2v_2 \\ v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = v_1 + 2v_2 \\ v_2 = -v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = v_1 - 2v_1 \\ v_2 = -v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = -v_1 \\ v_2 = -v_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs 1-propres sous Q sont donc $\begin{pmatrix} a \\ -a \\ -a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

d. Le noyau de Q, noté $Ker(Q)$, est l'ensemble des vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ tels que $Q\vec{v}_1 = \vec{0}$.

$$Q\vec{v}_1 = \vec{0} \overset{c.}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} \frac{v_1 - v_2 - v_3}{3} \\ \frac{-v_1 + v_2 + v_3}{3} \\ \frac{-v_1 + v_2 + v_3}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 - v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ -v_1 + v_2 + v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 - v_2 - v_3 = 0$$

$\Rightarrow v_3 = v_1 - v_2$.

Ainsi $Ker(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

e. Le noyau de Q est l'ensemble des vecteurs dont l'image est $\vec{0}$.

Comme $Ker(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a-b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$, on peut dire que le noyau de Q est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(a = 1, b = 0)$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(a = 0, b = 1)$.

Ainsi $Ker(Q)$ correspond à un plan, d'où on peut penser que Q correspond à la projection orthogonale sur une droite.

Posons que Q correspond à la projection orthogonale sur la droite $p: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ (droite perpendiculaire au plan de la question a.).

Un vecteur directeur de p est $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soit Π le plan perpendiculaire à p passant par $P(x_0 ; y_0 ; z_0)$.

Comme le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à Π, son équation est

$\Pi : x - y - z + d = 0$.

Avec le point $P(x_0 ; y_0 ; z_0)$, on obtient $x_0 - y_0 - z_0 + d = 0 \Rightarrow d = -x_0 + y_0 + z_0$.

On a ainsi $\Pi : x - y - z - x_0 + y_0 + z_0 = 0$

La projection orthogonale de P sur p est alors le point M, intersection de p et Π.

On a $\lambda + \lambda + \lambda - x_0 + y_0 + z_0 = 0 \Rightarrow 3\lambda = x_0 - y_0 - z_0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{x_0 - y_0 - z_0}{3}$.

Avec $\lambda = \dfrac{x_0 - y_0 - z_0}{3}$, on a $x = \dfrac{x_0 - y_0 - z_0}{3}$, $y = \dfrac{-x_0 + y_0 + z_0}{3}$, $z = \dfrac{-x_0 + y_0 + z_0}{3}$.

On a ainsi $M = \left(\dfrac{x_0 - y_0 - z_0}{3} ; \dfrac{-x_0 + y_0 + z_0}{3} ; \dfrac{-x_0 + y_0 + z_0}{3} \right)$.

Pour $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $x_0 = 1$, $y_0 = z_0 = 0$ et, ainsi, $M = \left(\frac{1}{3} ; -\frac{1}{3} ; -\frac{1}{3} \right)$.

Pour $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $y_0 = 1$, $x_0 = z_0 = 0$ et, ainsi, $M = \left(-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3} \right)$.

Pour $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $z_0 = 1$, $x_0 = y_0 = 0$ et, ainsi, $M = \left(-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3} \right)$.

L'image de $\vec{e_1}$ est ainsi $\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$, l'image de $\vec{e_2}$ est $\begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et celle de $\vec{e_3}$ est $\begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

La matrice Q' associée à la projection orthogonale sur la droite $p : \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$

est ainsi $\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, ce qui correspond à $-Q$.

Pour passer de Q' à Q, il suffit maintenant de faire une symétrie de centre O.

Par conséquent, Q peut être interprétée comme la combinaison de la projection sur la droite p (droite perpendiculaire au plan $x - y - z = 0$ et passant par O) et de la symétrie de centre O.

Exercice 12.23

On a la matrice symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Or les valeurs propres de cette matrice sont données par les solutions de l'équation caractéristique $\det(A-\lambda I)=0$, où A est la matrice en question.

On a $A-\lambda I = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda)-b^2 = ac-a\lambda-c\lambda+\lambda^2-b^2 =$$
$$= \lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2.$$

Ainsi l'équation $\det(A-\lambda I)=0$ s'écrit $\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $A\lambda^2+B\lambda+C=0$ avec $A=1$, $B=-(a+c)$ et $C=ac-b^2$.

Elle aura au moins une solution si $\Delta = B^2-4AC \geqslant 0$.

On a $\Delta = B^2-4AC = (a+c)^2-4\cdot1\cdot(ac-b^2) = (a+c)^2-4(ac-b)^2 =$

$= a^2+2ac+c^2-4ac+4b^2 = a^2-2ac+c^2+4b^2 = (a-c)^2+4b^2 \geqslant 0$.

Ainsi l'équation caractéristique a au moins une solution, ce qui signifie que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ a au moins une valeur propre.

Exercice 12.24

a. On a la matrice $F = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Ses valeurs propres sont la ou les solutions de l'équation caractéristique $\det(F - \lambda I) = 0$.

On a $F - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix}$.

$$\det(F - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda) - 1\cdot(-4) = -6 - 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2 =$$
$$= (\lambda+2)(\lambda-1).$$

Ainsi l'équation $\det(F - \lambda I) = 0$ s'écrit $(\lambda+2)(\lambda-1) = 0$. Ses solutions sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$.

Les vecteurs propres de F associés à la valeur propre λ sont les $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tels que $F\vec{v} = \lambda \vec{v}$.

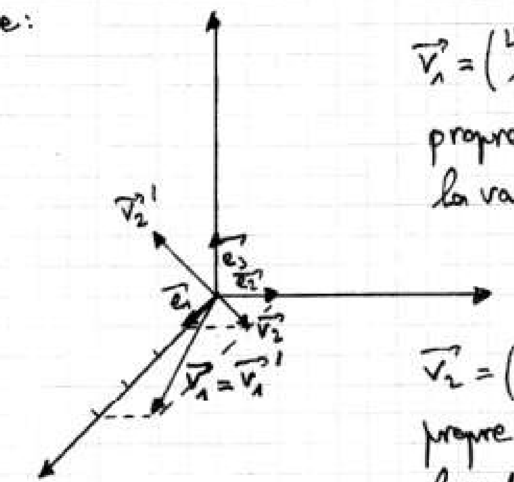
$\lambda_1 = 1$: $F\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2v_1 - 4v_2 \\ v_1 - 3v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 - 4v_2 = v_1 \\ v_1 - 3v_2 = v_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} v_1 - 4v_2 = 0 \\ v_1 - 4v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 - 4v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = 4v_2 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 4v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = -2$: $F\vec{v} = \lambda_2 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2v_1 - 4v_2 \\ v_1 - 3v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2v_1 \\ -2v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 - 4v_2 = -2v_1 \\ v_1 - 3v_2 = -2v_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4v_1 - 4v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow \vec{v}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b. On a la situation suivante :



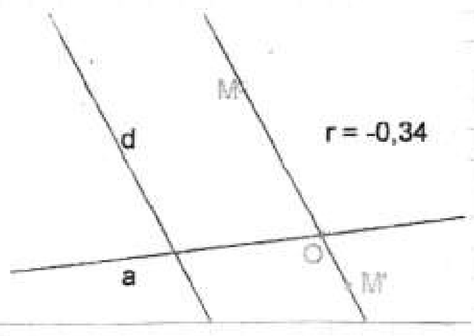
$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = 1$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre correspondant à la valeur propre $\lambda_2 = -2$

On en déduit que F est une affinité axiale d'axe parallèle à $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et passant par l'origine et de rapport -2.

Remarque : voici un exemple d'affinité axiale :

Soient deux droites a et d, un nombre r et un point M ; construire la parallèle d' par M à d, le point O intersection de d' et de a, puis le point M' homothétique de M dans l'homothétie de centre O et de rapport r.
L'application du plan dans lui-même qui associe M à M' est une affinité d'axe a, de direction d et de rapport r.



Exercice 11.25

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de type 2×2.

Son polynôme caractéristique est $p(\lambda) = \det(M - \lambda I)$.

On a $M - \lambda I = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{pmatrix}$.

Ainsi $p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc =$

$= ad - a\lambda - d\lambda + \lambda^2 - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc.$

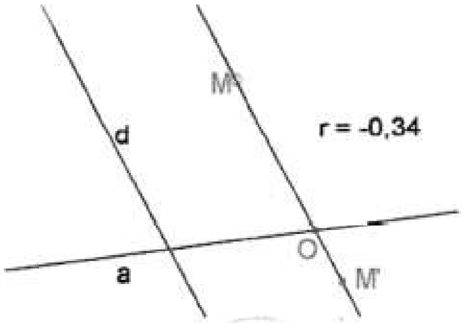
Or $a+d = tr(M)$ (la trace d'une matrice est la somme des éléments de sa diagonale principale) et $ad - bc = \det(M)$.

On a donc bien $p(\lambda) = \lambda^2 - tr(M).\lambda + \det(M)$.

Exercice 12.26

Voici quelques informations sur les affinités axiales.

Soient deux droites a et d, un nombre r et un point M ; construire la parallèle d' par M à d, le point O intersection de d' et de a, puis le point M' homothétique de M dans l'homothétie de centre O et de rapport r.
L'application du plan dans lui-même qui associe M à M' est une affinité d'axe a, de direction d et de rapport r.



L'image d'un cercle est alors une ellipse.

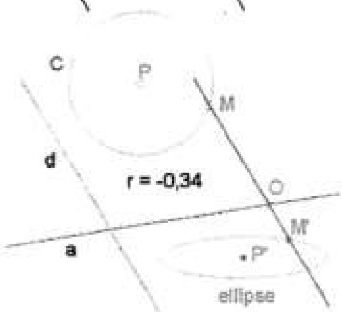
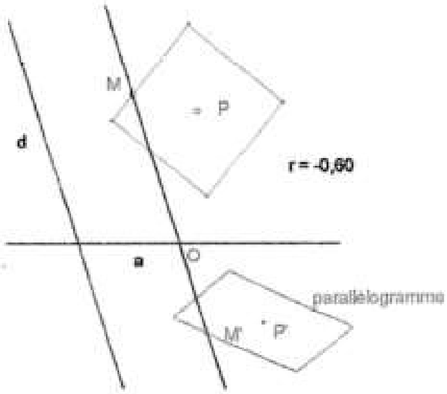
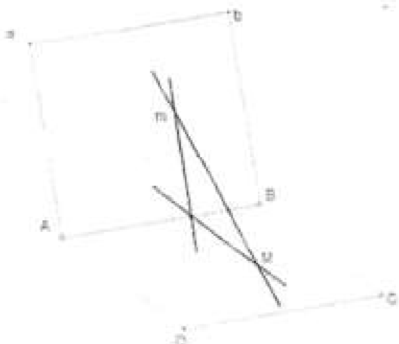


Image d'un carré :

On peut démontrer que l'image d'un carré par une affinité est un parallélogramme.



Réciproquement, on peut considérer tout parallélogramme comme l'image d'un carré par une affinité (et pas d'une seule !).
Sur cette figure on a construit le parallélogramme ABCD, puis sur le côté [A,B] le carré ABba.
aD et bC sont parallèles. Soit M quelconque dans le parallélogramme, il est facile d'avoir son image réciproque m par l'affinité qui envoie a sur D, b sur C.
Ce sont ces propriétés qui sont utilisées en perspective cavalière.



On peut par exemple choisir l'affinité axiale d'axe Oy avec une homothétie de facteur -3 (et de centre) selon l'axe Oy.
L'image de $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $\vec{e_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e_1}$ et l'image de $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $\vec{e_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} =$
$= -3\vec{e_2}$.
La matrice de la transformation est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 12.27

Pour qu'une matrice soit inversible, il faut que son déterminant soit non nul.

$A=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$: $\det(A)=\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}=2\cdot4-3\cdot1=8-3=5$;

on a alors $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\-1&2\end{pmatrix}$ (si $A=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$).

$B=\begin{pmatrix}4&-1\\0&1\end{pmatrix}$: $\det(B)=\begin{vmatrix}4&-1\\0&1\end{vmatrix}=4\cdot1-0\cdot(-1)=4$;

on a alors $B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&0\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4&0\\1/4&1\end{pmatrix}$.

$C=\begin{pmatrix}4&12\\3&9\end{pmatrix}$: $\det(C)=\begin{vmatrix}4&12\\3&9\end{vmatrix}=4\cdot9-3\cdot12=36-36=0 \Rightarrow C^{-1}$ n'existe pas.

$D=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$: $\det(D)=\begin{vmatrix}a&-b\\b&a\end{vmatrix}=a^2-b\cdot(-b)=a^2+b^2>0$ si a et b ne sont pas nuls simultanément ; si $a=b=0$, D^{-1} n'existe pas ; si a et b pas nuls simultanément, $D^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}D$.

$E=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$: $\det(E)=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$; si $ad-bc=0$, E^{-1} n'existe pas ; si $ad-bc\neq0$, $E^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$.

$F=\begin{pmatrix}-3&1&6\\2&-6&-10\\0&2&4\end{pmatrix}$: $\det(F)=\begin{vmatrix}-3&1&6\\2&-6&-10\\0&2&4\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-6)\cdot4+1\cdot(-10)\cdot0+6\cdot2\cdot2$
$-0\cdot(-6)\cdot6-2\cdot(-10)\cdot3-4\cdot2\cdot1=$

$=72+0+24-0+60-8=148$;

on a $F_{11}=\begin{vmatrix}-6&-10\\2&4\end{vmatrix}=-6\cdot4-2\cdot(-10)=-24+20=-4$;

$F_{21}=\begin{vmatrix}1&6\\2&4\end{vmatrix}=1\cdot4-2\cdot6=4-12=-8$;

$F_{31}=\begin{vmatrix}1&6\\-6&-10\end{vmatrix}=1\cdot(-10)+6\cdot6=-10+36=26$;

$F_{12}=\begin{vmatrix}2&-10\\0&4\end{vmatrix}=2\cdot4-0\cdot(-10)=8$;

$F_{22}=\begin{vmatrix}-3&6\\0&4\end{vmatrix}=-3\cdot4-6\cdot0=-12$;

$F_{32}=\begin{vmatrix}-3&6\\2&-10\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-10)-2\cdot6=30-12=18$;

$F_{13}=\begin{vmatrix}2&-6\\0&2\end{vmatrix}=2\cdot2-0\cdot(-6)=4$;

$F_{23}=\begin{vmatrix}-3&1\\0&2\end{vmatrix}=-3\cdot2-0\cdot1=-6$;

$F_{33}=\begin{vmatrix}-3&1\\2&-6\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-6)-2\cdot1=18-2=16$;

Ainsi $F^{-1}=\frac{1}{\det(F)}\,{}^t\!\begin{pmatrix}-4&-8&4\\-(-8)&-12&-4\\26&-18&-6\end{pmatrix}=\frac{1}{148}\begin{pmatrix}-4&8&26\\-8&-12&-18\\4&-4&-6\end{pmatrix}$.

Exercice 12.28

On a $f : V_2 \to V_2$ donnée par $F = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ dans la base standard $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$.

a. Les valeurs propres de f sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(F - \lambda I) = 0$.

On a $F - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -3 \\ 2 & 10-\lambda \end{pmatrix}$;

$$\det(F - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ 2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(10-\lambda) - 2\cdot(-3) = 30 - 3\lambda - 10\lambda + \lambda^2 + 6 =$$
$$= \lambda^2 - 13\lambda + 36 = (\lambda - 4)(\lambda - 9) ;$$

$$\det(F - \lambda I) = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda - 9) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4 \text{ et } \lambda_2 = 9.$$

Les valeurs propres de f sont donc $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 9$.

Les vecteurs propres de f associés à λ sont les $\vec{v}$ tels que $F\vec{v} = \lambda \vec{v}$.

Avec $\lambda_1 = 4$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, on a $F\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3v_1 - 3v_2 \\ 2v_1 + 10v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4v_1 \\ 4v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3v_1 - 3v_2 = 4v_1 \\ 2v_1 + 10v_2 = 4v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -v_1 - 3v_2 = 0 \\ 2v_1 + 6v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 + 3v_2 = 0$

$\Rightarrow v_1 = -3v_2 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -3v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avec $\lambda_2 = 9$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, on a $F\vec{v} = \lambda_2 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 9\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3v_1 - 3v_2 \\ 2v_1 + 10v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9v_1 \\ 9v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3v_1 - 3v_2 = 9v_1 \\ 2v_1 + 10v_2 = 9v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6v_1 - 3v_2 = 0 \\ 2v_1 + v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2v_1 + v_2 = 0$

$\Rightarrow v_2 = -2v_1 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -2v_1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Ainsi le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 4$ est $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 9$ est $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b. En choisissant la base $(\vec{p_1}; \vec{p_2})$, où $\vec{p_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres de f (voir a.), alors la matrice de f associée à cette base est $F' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

c. On a $\vec{a} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2}$ et $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{p_1} + \frac{1}{3}\vec{p_2}$.

En outre $\vec{p_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -3\vec{e_1} + \vec{e_2}$ et $\vec{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2}$.

On a alors $2\vec{p_1} + \vec{p_2} = -5\vec{e_1}$, d'où $\vec{e_1} = -\frac{2}{5}\vec{p_1} - \frac{1}{5}\vec{p_2}$, et $\vec{e_2} = \vec{p_1} + 3\vec{e_1} =$
$= \vec{p_1} + 3\left(-\frac{2}{5}\vec{p_1} - \frac{1}{5}\vec{p_2}\right) = \vec{p_1} - \frac{6}{5}\vec{p_1} - \frac{3}{5}\vec{p_2} = -\frac{1}{5}\vec{p_1} - \frac{3}{5}\vec{p_2}$

Ainsi $\vec{a} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} = 2\left(-\frac{2}{5}\vec{p_1} - \frac{1}{5}\vec{p_2}\right) + \left(-\frac{1}{5}\vec{p_1} - \frac{3}{5}\vec{p_2}\right) =$
$= -\frac{4}{5}\vec{p_1} - \frac{2}{5}\vec{p_2} - \frac{1}{5}\vec{p_1} - \frac{3}{5}\vec{p_2} = -\vec{p_1} - \vec{p_2}$ et

$\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{p_1} + \frac{1}{3}\vec{p_2} = \frac{1}{2}\left(-3\vec{e_1} + \vec{e_2}\right) + \frac{1}{3}\left(\vec{e_1} - 2\vec{e_2}\right) =$
$= -\frac{3}{2}\vec{e_1} + \frac{1}{2}\vec{e_2} + \frac{1}{3}\vec{e_1} - \frac{2}{3}\vec{e_2} = -\frac{7}{6}\vec{e_1} - \frac{1}{6}\vec{e_2}$.

Par conséquent, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{p_1}; \vec{p_2})$;

$\vec{b} = \begin{pmatrix} -7/6 \\ -1/6 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{p_1}; \vec{p_2})$.

d. Dans la base $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$, l'image de $\vec{a}$ est $F\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2-3.1 \\ 2.2+10.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} =$

$= 3\vec{e_1} + 14\vec{e_2}$ et l'image de $\vec{b}$ est $F\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7/6 \\ -1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.(-\frac{7}{6}) - 3.(-\frac{1}{6}) \\ 2.(-\frac{7}{6}) + 10.(-\frac{1}{6}) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} = -3\vec{e_1} - 4\vec{e_2}$.

e. Dans la base $(\vec{p_1}; \vec{p_2})$, l'image de $\vec{a}$ est $F'\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \end{pmatrix} = -4\vec{p_1} - 9\vec{p_2}$

et l'image de $\vec{b}$ est $F'\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\vec{p_1} - 3\vec{p_2}$.

Exercice 12.29

Les valeurs propres de f donnée dans la base standard de V_3 par $F=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$ sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(F-\lambda I)=0$.

On a $F-\lambda I=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda&2&3\\0&4-\lambda&5\\0&0&6-\lambda\end{pmatrix}$;

$$\det(F-\lambda I)=(1-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda)+2\cdot5\cdot0+3\cdot0\cdot0-0\cdot(4-\lambda)\cdot3-0\cdot5\cdot(1-\lambda)-(6-\lambda)\cdot0\cdot2=$$
$$=(1-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda);$$

$$\det(F-\lambda I)=0 \Longrightarrow (1-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda)=0 \Longrightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=6.$$

Ainsi les valeurs propres de f sont $\lambda_1=1$, $\lambda_2=4$ et $\lambda_3=6$.

Les vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ sont les $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ tels que $F\vec{v}=\lambda\vec{v}$.

Avec $\lambda_1=1$, on a $F\vec{v}=\lambda_1\vec{v} \Longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}v_1+2v_2+3v_3\\4v_2+5v_3\\6v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{cases}v_1+2v_2+3v_3=v_1\\4v_2+5v_3=v_2\\6v_3=v_3\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}2v_2+3v_3=0\\3v_2+5v_3=0\\5v_3=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}2v_2+3v_3=0\\3v_2+5v_3=0\\v_3=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}v_2=0\\v_3=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\0\\0\end{pmatrix} \,/\!/\, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Avec $\lambda_2=4$, on a $F\vec{v}=\lambda_2\vec{v} \Longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix}v_1+2v_2+3v_3\\4v_2+5v_3\\6v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4v_1\\4v_2\\4v_3\end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{cases}v_1+2v_2+3v_3=4v_1\\4v_2+5v_3=4v_2\\6v_3=4v_3\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}-3v_1+2v_2+3v_3=0\\5v_3=0\\2v_3=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}-3v_1+2v_2+3v_3=0\\v_3=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}-3v_1+2v_2=0\\v_3=0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}v_2=\frac{3}{2}v_1\\v_3=0\end{cases} \Longrightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\3/2\,v_1\\0\end{pmatrix} \,/\!/\, \begin{pmatrix}1\\3/2\\0\end{pmatrix}.$$

Avec $\lambda_3=6$, on a $F\vec{v}=\lambda_3\vec{v} \Longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases}v_1+2v_2+3v_3=6v_1\\4v_2+5v_3=6v_2\\6v_3=6v_3\end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases}-5v_1+2v_2+3v_3=0\\-2v_2+5v_3=0\\0=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}-5v_1+8v_3=0\\-2v_2+5v_3=0\\0=0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}v_1=\frac{8}{5}v_3\\v_2=\frac{5}{2}v_3\end{cases} \Longrightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix}8/5\,v_3\\5/2\,v_3\\v_3\end{pmatrix} \,/\!/\, \begin{pmatrix}8/5\\5/2\\1\end{pmatrix}.$$

Ainsi les vecteurs propres de f sont:

valeur propre $\lambda_1=1$, vecteur propre $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$;

valeur propre $\lambda_2=4$, vecteur propre $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\3/2\\0\end{pmatrix}$;

valeur propre $\lambda_3=6$, vecteur propre $\vec{v_3}=\begin{pmatrix}8/5\\5/2\\1\end{pmatrix}$.

Les espaces propres de f sont:

valeur propre $\lambda_1=1$, espace propre $V_{\lambda_1}=\left\{\vec{v} \mid \vec{v}=k\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{R}\right\}$;

valeur propre $\lambda_2=4$, espace propre $V_{\lambda_2}=\left\{\vec{v} \mid \vec{v}=k\begin{pmatrix}1\\3/2\\0\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{R}\right\}$;

valeur propre $\lambda_3=6$, espace propre $V_{\lambda_3}=\left\{\vec{v} \mid \vec{v}=k\begin{pmatrix}8/5\\5/2\\1\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{R}\right\}$.

Une base propre est $(\vec{v_1};\vec{v_2};\vec{v_3})$, où $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\3/2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v_3}=\begin{pmatrix}8/5\\5/2\\1\end{pmatrix}$.