Dans cette base propre, la matrice de F est donnée par $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 12.30

Dans la base $(\vec{e_1}; \vec{e_2})$, l'application f est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a. On a $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.3 - 2.2 = -4.$

Ainsi $A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

De plus $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0+2.2 & 0.2+2.3 \\ 2.0+3.2 & 2.2+3.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$ et

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.0+6.2 & 4.2+6.3 \\ 6.0+13.2 & 6.2+13.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 26 \\ 26 & 51 \end{pmatrix}$.

b. Les valeurs propres de f sont données par les solutions de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I) = 0$.

On a: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$;

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda) - 2.2 = -3\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4)$;

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 4$.

Les vecteurs propres de f par rapport à la valeur propre λ sont les $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tels que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

Avec $\lambda_1 = -1$, $A\vec{v} = \lambda_1\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2v_2 \\ 2v_1+3v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2v_2 = -v_1 \\ 2v_1 + 3v_2 = -v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 + 2v_2 = 0 \\ 2v_1 + 4v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -2v_2$

$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -2v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avec $\lambda_2 = 4$, $A\vec{v} = \lambda_2\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2v_2 \\ 2v_1+3v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4v_1 \\ 4v_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2v_2 = 4v_1 \\ 2v_1 + 3v_2 = 4v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4v_1 + 2v_2 = 0 \\ 2v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2v_1 = v_2 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 2v_1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le vecteur propre de f pour la valeur propre $\lambda_1 = -1$ est $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et celui pour la valeur propre $\lambda_2 = 4$ est $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de $f \circ f$ sont données par les solutions de l'équation caractéristique $\det(A^2 - \lambda I) = 0$.

On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 12 & 26 \\ 26 & 51 \end{pmatrix}$ (voir a.);

$A^2 - \lambda I = \begin{pmatrix} 12 & 26 \\ 26 & 51 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-\lambda & 26 \\ 26 & 51-\lambda \end{pmatrix}$;

$\det(A^2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 12-\lambda & 26 \\ 26 & 51-\lambda \end{vmatrix} = (12-\lambda)(51-\lambda) - 26^2 = 612 - 12\lambda - 51\lambda + \lambda^2 - 676 =$

$= \lambda^2 - 63\lambda - 64 = (\lambda+1)(\lambda-64)$;

$\det(A^2-\lambda I)=0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-64)=0 \Rightarrow \lambda_1=-1$ et $\lambda_2=64$.

Les vecteurs propres de $f*f$ par rapport à la valeur propre λ sont les $\vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tels que $A^2\vec{v}=\lambda\vec{v}$.

Avec $\lambda_1=-1$, $A^2\vec{v}=\lambda_1\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 26 \\ 26 & 51 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 12v_1+26v_2=-v_1 \\ 26v_1+51v_2=-v_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 13v_1+26v_2=0 \\ 26v_1+52v_2=0 \end{cases} \Rightarrow v_1+2v_2=0 \Rightarrow v_1=-2v_2 \Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix} -2v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avec $\lambda_2=64$, $A^2\vec{v}=\lambda_2\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 26 \\ 26 & 51 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=64\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 12v_1+26v_2=64v_1 \\ 26v_1+51v_2=64v_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -52v_1+26v_2=0 \\ 26v_1-13v_2=0 \end{cases} \Rightarrow 2v_1-v_2=0 \Rightarrow v_2=2v_1 \Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ 2v_1 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le vecteur propre de $f*f$ pour la valeur propre $\lambda_1=-1$ est $\vec{v_1}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et celui pour la valeur propre $\lambda_2=64$ est $\vec{v_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On remarque que les vecteurs propres de f et de $f*f$ sont identiques.

c. Le vecteur propre de f pour la valeur propre $\lambda_1=-1$ dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ est $\vec{p_1}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et celui pour la valeur propre $\lambda_2=4$ dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ est $\vec{p_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. La base $(\vec{p_1};\vec{p_2})$ avec $\vec{p_1}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{p_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ est donc une base propre (base de vecteurs propres) et, dans la base $(\vec{p_1};\vec{p_2})$, la matrice de f est $B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

d. On a $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\det(B)=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=-1\cdot 4-0\cdot 0=-4$ et, ainsi, $B^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

De plus $B^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$,

$B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix} (-1)^2 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)^3 & 0 \\ 0 & 4^3 \end{pmatrix}$ et, par conséquent,

$B^n=\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$.

e. Dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$, on a $\vec{p_1}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{p_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\vec{p_1}=-2\vec{e_1}+\vec{e_2}$ et $\vec{p_2}=\vec{e_1}+2\vec{e_2}$.

On a donc $\vec{p_1}+2\vec{p_2}=5\vec{e_2}$, d'où $\vec{e_2}=\frac{1}{5}\vec{p_1}+\frac{2}{5}\vec{p_2}$.

En outre $2\vec{p_1}-\vec{p_2}=-5\vec{e_1}$, d'où $\vec{e_1}=-\frac{2}{5}\vec{p_1}+\frac{1}{5}\vec{p_2}$.

La matrice de passage qui envoie $(\vec{p_1};\vec{p_2})$ sur $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ est donc $P=\begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$.

f. On a $\det(P)=\begin{vmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{vmatrix}=\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=-\frac{4}{25}-\frac{1}{25}=-\frac{5}{25}=-\frac{1}{5}$

Ainsi $P^{-1} = \frac{1}{-1/5}\begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

g. On a $A = PBP^{-1}$, où

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice qui envoie $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ sur $(\vec{p_1};\vec{p_2})$,

$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ est la matrice de f dans la base $(\vec{p_1};\vec{p_2})$,

$P = \begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$ est la matrice qui envoie $(\vec{p_1};\vec{p_2})$ sur $(\vec{e_1};\vec{e_2})$,

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice de f dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$.

En effet, $PB = \begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 \\ -1/5 & 8/5 \end{pmatrix}$ et $PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 \\ -1/5 & 8/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}+\frac{4}{5} & \frac{2}{5}+\frac{8}{5} \\ \frac{2}{5}+\frac{8}{5} & -\frac{1}{5}+\frac{16}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A$.

On alors $A^n = (PBP^{-1})^n = PBP^{-1} \cdot PBP^{-1} \cdot \ldots \cdot PBP^{-1}$ (n fois) $= P \cdot B \cdot B \cdot \ldots \cdot BP^{-1}$,
puisque $PP^{-1} = I$, matrice identité.
Ainsi $A^n = PB^nP^{-1}$.

Comme $B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$, on a $PB^n = \begin{pmatrix} -2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{5} & 4^n\cdot\frac{1}{5} \\ (-1)^n\cdot\frac{1}{5} & 4^n\cdot\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

et $A^n = PB^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{5} & 4^n\cdot\frac{1}{5} \\ (-1)^n\cdot\frac{1}{5} & 4^n\cdot\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n\cdot\frac{4}{5}+4^n\cdot\frac{1}{5} & (-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{5}+4^n\cdot\frac{2}{5} \\ (-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{5}+4^n\cdot\frac{2}{5} & (-1)^n\cdot\frac{1}{5}+4^n\cdot\frac{4}{5} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n\cdot 4+4^n}{5} & \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2+2\cdot 4^n}{5} \\ \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2+2\cdot 4^n}{5} & \frac{(-1)^n+4^{n+1}}{5} \end{pmatrix}$.

h. D'après a., on a $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, $A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 12 & 26 \\ 26 & 51 \end{pmatrix}$.

D'après g., on a $A^n = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n\cdot 4+4^n}{5} & \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2+2\cdot 4^n}{5} \\ \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2+2\cdot 4^n}{5} & \frac{(-1)^n+4^{n+1}}{5} \end{pmatrix}$.

Pour $n=-1$, on a $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{-1}\cdot 4+4^{-1}}{5} & \frac{(-1)^0\cdot 2+2\cdot 4^{-1}}{5} \\ \frac{(-1)^0\cdot 2+2\cdot 4^{-1}}{5} & \frac{(-1)^{-1}+4^0}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4+\frac{1}{4}}{5} & \frac{2+\frac{1}{2}}{5} \\ \frac{2+\frac{1}{2}}{5} & \frac{-1+1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour $n=1$, on a $A^1 = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^1\cdot 4+4^1}{5} & \frac{(-1)^2\cdot 2+2\cdot 4^1}{5} \\ \frac{(-1)^2\cdot 2+2\cdot 4^1}{5} & \frac{(-1)^1+4^2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4+4}{5} & \frac{2+8}{5} \\ \frac{2+8}{5} & \frac{-1+16}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour $n=2$, on a $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^2\cdot 4+4^2}{5} & \frac{(-1)^3\cdot 2+2\cdot 4^2}{5} \\ \frac{(-1)^3\cdot 2+2\cdot 4^2}{5} & \frac{(-1)^2+4^3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4+16}{5} & \frac{-2+32}{5} \\ \frac{-2+32}{5} & \frac{1+64}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$.

Pour $n=3$, on a $A^3 = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^3 \cdot 4 + 4^3}{5} & \frac{(-1)^4 \cdot 2 + 2 \cdot 4^3}{5} \\ \frac{(-1)^4 \cdot 2 + 2 \cdot 4^3}{5} & \frac{(-1)^3 + 4^4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-4+64}{5} & \frac{2+128}{5} \\ \frac{2+128}{5} & \frac{-1+256}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 26 \\ 26 & 51 \end{pmatrix}.$

Exercice 12.31.

a. On a : $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&2&4\\1&1&1\end{pmatrix}$; $\det(A)=1\cdot2\cdot1+(-1)\cdot4\cdot1+1\cdot1\cdot1-1\cdot2\cdot1-1\cdot4\cdot1-1\cdot1\cdot(-1)=$
$=\cancel{2}-4+1-\cancel{2}-4+1=-6$;

$A_{11}=\begin{vmatrix}2&4\\1&1\end{vmatrix}=2\cdot1-4\cdot1=2-4=-2$; $A_{21}=\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix}=-1\cdot1-1\cdot1=-1-1=-2$;

$A_{31}=\begin{vmatrix}-1&1\\2&4\end{vmatrix}=-1\cdot4-1\cdot2=-4-2=-6$; $A_{12}=\begin{vmatrix}1&4\\1&1\end{vmatrix}=1\cdot1-4\cdot1=1-4=-3$;

$A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=1\cdot1-1\cdot1=1-1=0$; $A_{32}=\begin{vmatrix}1&1\\1&4\end{vmatrix}=1\cdot4-1\cdot1=4-1=3$;

$A_{13}=\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}=1\cdot1-2\cdot1=1-2=-1$; $A_{23}=\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=1\cdot1-1\cdot(-1)=1+1=2$;

$A_{33}=\begin{vmatrix}1&-1\\1&2\end{vmatrix}=1\cdot2-1\cdot(-1)=2+1=3$.

Ainsi $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\,{}^t\!\begin{pmatrix}A_{11}&-A_{12}&A_{13}\\-A_{21}&A_{22}&-A_{23}\\A_{31}&-A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{-6}\,{}^t\!\begin{pmatrix}-2&-(-3)&-1\\-(-2)&0&-2\\-6&-3&3\end{pmatrix}=$

$$=-\frac{1}{6}\,{}^t\!\begin{pmatrix}-2&3&-1\\2&0&-2\\-6&-3&3\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2&2&-6\\3&0&-3\\-1&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&-1/3&1\\-1/2&0&1/2\\1/6&1/3&-1/2\end{pmatrix}.$$

b. $A=\begin{pmatrix}3&0&2m\\m&11&-m\\m-1&0&8\end{pmatrix}$ ne sera pas inversible si $\det(A)=0$.

On a $\det(A)=\begin{vmatrix}3&0&2m\\m&11&-m\\m-1&0&8\end{vmatrix}=$

$=3\cdot11\cdot8+0\cdot(-m)(m-1)+2m\cdot m\cdot0-(m-1)\cdot11\cdot2m-0\cdot(-m)\cdot3-8\cdot m\cdot0=$

$=264-22m(m-1)=264-22m^2+22m=-22m^2+22m+264$.

Ainsi $\det(A)=0 \Rightarrow -22m^2+22m+264=0 \Rightarrow m^2-1-12=0 \Rightarrow (m+3)(m-4)=0$
$\Rightarrow m=-3$ et $m=4$.

Par conséquent, si $m=-3$ ou $m=4$, A n'est pas inversible.

c. Si $m=-3$, on a $A=\begin{pmatrix}3&0&-6\\-3&11&3\\-4&0&8\end{pmatrix}$

Pour donner une interprétation géométrique de la transformation associée à A, on va l'écrire dans une base propre, c'est-à-dire une base de vecteur propre. Commençons par chercher les valeurs propres de A. Pour cela, il faut résoudre l'équation caractéristique $\det(A-\lambda I)=0$.

On a : $A-\lambda I=\begin{pmatrix}3&0&-6\\-3&11&3\\-4&0&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-\lambda&0&-6\\-3&11-\lambda&3\\-4&0&8-\lambda\end{pmatrix}$;

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda&0&-6\\-3&11-\lambda&3\\-4&0&8-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(11-\lambda)(8-\lambda)-(-4)(11-\lambda)(-6)=$$

$$=(11-\lambda)\big((3-\lambda)(8-\lambda)-24\big)=(11-\lambda)(24-11\lambda+\lambda^2-24)=$$

$$=(11-\lambda)(\lambda^2-11\lambda)=\lambda(11-\lambda)(\lambda-11)=-\lambda(\lambda-11)^2.$$

$$\det(A-\lambda I)=0\Rightarrow-\lambda(\lambda-11)^2=0\Rightarrow\lambda_1=0\text{ (simple) et }\lambda_2=11\text{ (double)}.$$

Cherchons maintenant les vecteurs propres associés à ces valeurs propres.

Pour $\lambda_1=0$, on a $A\vec{v}=\lambda_1\vec{v}\Rightarrow A\vec{v}=0\Rightarrow\begin{pmatrix}3&0&-6\\-3&11&3\\-4&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}3v_1-6v_3=0\\-3v_1+11v_2+3v_3=0\\-4v_1+8v_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_1=2v_3\\-3v_1+11v_2+3v_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_1=2v_3\\-6v_3+11v_2+3v_3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}v_1=2v_3\\11v_2-3v_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_1=2v_3\\v_2=\frac{3}{11}v_3\end{cases}\Rightarrow\vec{v}=\begin{pmatrix}2v_3\\\frac{3}{11}v_3\\v_3\end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour $\lambda_1=0$, un vecteur propre est, avec $v_3=11$, $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}22\\3\\11\end{pmatrix}$.

Pour $\lambda_2=11$, on a $A\vec{v}=\lambda_2\vec{v}\Rightarrow\begin{pmatrix}3&0&-6\\-3&11&3\\-4&0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11v_1\\11v_2\\11v_3\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}3v_1-6v_3=11v_1\\-3v_1+11v_2+3v_3=11v_2\\-4v_1+8v_3=11v_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6v_3=8v_1\\-3v_1+3v_3=0\\-4v_1=3v_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_3=-\frac{4}{3}v_1\\v_3=v_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}v_1=0\\v_3=0\end{cases}\Rightarrow\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\v_2\\0\end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour $\lambda_2=11$, un vecteur propre est, avec $v_2=1$, $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\vec{e_2}$.

On a donc 2 valeurs propres ($\lambda_1=0$ et $\lambda_2=11$) auxquelles sont associées 2 vecteurs propres ($\vec{v_1}=\begin{pmatrix}22\\3\\11\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ respectivement).

Comme $A\vec{v_1}=\lambda_1\vec{v_1}=0$, on en déduit qu'une partie de la transformation associée à A est la projection sur un plan passant par l'origine parallèlement au vecteur $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}22\\3\\11\end{pmatrix}$.

En outre, comme $A\vec{v_2}=\lambda_2\vec{v_2}\Rightarrow A\vec{e_2}=11\vec{e_2}$, une autre partie de la transformation associée à A est une homothétie de centre O et de facteur 11 dans la direction $\vec{e_2}$.

Cherchons l'équation du plan sur laquelle on se projette.

Avec $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$, on a $A\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -3 & 11 & 3 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3w_1 - 6w_3 \\ -3w_1 + 11w_2 + 3w_3 \\ -4w_1 + 8w_3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3w_1 - 6w_3 \\ -3w_1 + 3w_3 \\ -4w_1 + 8w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 11w_2 \\ 0 \end{pmatrix} = w_1\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + w_3\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 11w_2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{homothétie dans la direction } \vec{e_2}}$$

On se projette donc sur le plan déterminé par l'origine et les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Un vecteur normal à ce plan est donné par $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.8-(-4).3 \\ -4.(-6)-3.8 \\ 3.3-(-3).(-6) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -24+12 \\ 24-24 \\ 9-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

L'équation du plan est donc $4x + 3z + d = 0$.

Comme le plan passe par l'origine, on en déduit $d = 0$ et l'équation du plan est $4x + 3z = 0$.

Par conséquent, la transformation géométrique associée à A est la composition d'une projection parallèle au vecteur $\begin{pmatrix} 22 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$ sur le plan $4x+3z=0$ et d'une homothétie centrée à l'origine et de facteur 11 en direction de $\vec{e_2}$.

Si $m=4$, on a $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 4 & 11 & -4 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

On a: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 8 \\ 4 & 11-\lambda & -4 \\ 3 & 0 & 8-\lambda \end{pmatrix}$;

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 8 \\ 4 & 11-\lambda & -4 \\ 3 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(11-\lambda)(8-\lambda) - 3\cdot(11-\lambda)\cdot 8 =$$

$$= (11-\lambda)\big((3-\lambda)(8-\lambda) - 24\big) = (11-\lambda)(24 - 11\lambda + \lambda^2 - 24) =$$

$$= (11-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda) = \lambda(11-\lambda)(\lambda-11) = -\lambda(\lambda-11)^2;$$

$\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 11$ (double).

Pour $\lambda_1 = 0$, on a $A\vec{v} = \lambda_1\vec{v} \Rightarrow A\vec{v} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 4 & 11 & -4 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3v_1 + 8v_3 = 0 \\ 4v_1 + 11v_2 - 4v_3 = 0 \\ 3v_1 + 8v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8v_3 = -3v_1 \\ 8v_1 + 22v_2 - 8v_3 = 0 \\ 8v_3 = -3v_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = -\frac{3}{8}v_1 \\ 8v_1 + 22v_2 + 3v_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_3 = -\frac{3}{8}v_1 \\ 11v_1 + 22v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = -\frac{3}{8}v_1 \\ v_2 = -\frac{1}{2}v_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -\frac{1}{2}v_1 \\ -\frac{3}{8}v_1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour $\lambda_1 = 0$, un vecteur propre est, avec $v_1 = 8$, $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Pour $\lambda_2 = 11$, on a $A\vec{v} = \lambda_2 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 4 & 11 & -4 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11v_1 \\ 11v_2 \\ 11v_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3v_1 + 8v_3 = 11v_1 \\ 4v_1 + 11v_2 - 4v_3 = 11v_2 \\ 3v_1 + 8v_3 = 11v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8v_3 = 8v_1 \\ 4v_1 - 4v_3 = 0 \\ 3v_1 = 3v_3 \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_3 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour $\lambda_2 = 11$, les vecteurs propres sont de la forme $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$.

On peut prendre $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(v_1 = 1$ et $v_2 = 0)$ et $\vec{v_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(v_1 = 0$ et $v_2 = 0)$.

On a donc 3 valeurs propres $(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 11$ et $\lambda_3 = 11)$ auxquelles sont associées les vecteurs propres $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (= \vec{e_2})$.

Par conséquent, la matrice de la transformation dans la base $(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3})$

est $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

Comme $A'\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11w_2 \\ 11w_3 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3})$,

on en déduit que, toujours dans la base $(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3})$, la transformation correspond à la projection orthogonale dans le plan passant par l'origine et formé par les vecteurs $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ suivi d'une homothétie de facteur 11 dans ce plan.

Cherchons l'équation du plan dans la base canonique $(\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$.

On a $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\vec{v_2} \times \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 - 1.1 \\ 1.0 - 1.0 \\ 1.1 - 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'équation du plan est donc, dans $(\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$, $-x + z + d = 0$.

Comme le plan contient l'origine, on a $d = 0$ et l'équation du plan est $-x + z = 0$ ou $x - z = 0$.

Par conséquent, la transformation géométrique associée à A est la composition de la projection parallèle au vecteur $\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ sur le plan $x - z = 0$ et d'une homothétie centrée à l'origine et de facteur 11 dans le plan $x - z = 0$.

Exercice 12.32.

On a $F=\begin{pmatrix} -7/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & -13/5 \end{pmatrix}$.

a. On a $\det(F)=\begin{vmatrix} -7/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & -13/5 \end{vmatrix} = \left(-\frac{7}{5}\right)\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{13}{5}\right) - \frac{4}{5}\cdot(-1)\cdot\frac{4}{5} =$

$= -\frac{91}{25}+\frac{16}{25} = -\frac{75}{25} = -3 \ (\neq 0)$.

De plus: $F_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -13/5 \end{vmatrix} = \frac{13}{5}$, $F_{21}=\begin{vmatrix} 0 & 4/5 \\ 0 & -13/5 \end{vmatrix} = 0$, $F_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 4/5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{5}$,

$F_{12}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4/5 & -13/5 \end{vmatrix} = 0$, $F_{22}=\begin{vmatrix} -7/5 & 4/5 \\ 4/5 & -13/5 \end{vmatrix} = 3$, $F_{32}=\begin{vmatrix} -7/5 & 4/5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$,

$F_{13}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4/5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{5}$, $F_{23}=\begin{vmatrix} -7/5 & 0 \\ 4/5 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $F_{33}=\begin{vmatrix} -7/5 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{7}{5}$.

Ainsi $F^{-1}=\frac{1}{\det(F)}\,{}^t\begin{pmatrix} F_{11} & -F_{12} & F_{13} \\ -F_{21} & F_{22} & -F_{23} \\ F_{31} & -F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-3}\,{}^t\begin{pmatrix} 13/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4/5 & 0 & 7/5 \end{pmatrix} =$

$= {}^t\begin{pmatrix} -13/15 & 0 & -4/15 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4/15 & 0 & -7/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/15 & 0 & -4/15 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4/15 & 0 & -7/15 \end{pmatrix}$

On a donc $F^{-1}=\begin{pmatrix} -13/15 & 0 & -4/15 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4/15 & 0 & -7/15 \end{pmatrix}$.

De plus, la matrice de $f\circ f$ est $F^2=F\cdot F=$

$=\begin{pmatrix} -7/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & -13/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & -13/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/5 & 0 & -16/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -16/5 & 0 & 37/5 \end{pmatrix}$.

On a $\det(F^2)=\begin{vmatrix} 13/5 & 0 & -16/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -16/5 & 0 & 37/5 \end{vmatrix} = \frac{13}{5}\cdot 1\cdot\frac{37}{5} - \left(-\frac{16}{5}\right)\cdot 1\cdot\left(-\frac{16}{5}\right) =$

$= \frac{481}{25} - \frac{256}{25} = \frac{225}{25} = 9$

De plus: $F^2_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 37/5 \end{vmatrix} = \frac{37}{5}$, $F^2_{21}=\begin{vmatrix} 0 & -16/5 \\ 0 & 37/5 \end{vmatrix} = 0$, $F^2_{31}=\begin{vmatrix} 0 & -16/5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{16}{5}$,

$F^2_{12}=\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -16/5 & 37/5 \end{vmatrix} = 0$, $F^2_{22}=\begin{vmatrix} 13/5 & -16/5 \\ -16/5 & 37/5 \end{vmatrix} = 9$, $F^2_{32}=\begin{vmatrix} 13/5 & -16/5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$,

$F^2_{13}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -16/5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{16}{5}$, $F^2_{23}=\begin{vmatrix} 13/5 & 0 \\ -16/5 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $F^2_{33}=\begin{vmatrix} 13/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{13}{5}$.

Ainsi $(F^2)^{-1}=\frac{1}{\det(F^2)}\,{}^t\begin{pmatrix} F^2_{11} & -F^2_{12} & F^2_{13} \\ -F^2_{21} & F^2_{22} & -F^2_{23} \\ F^2_{31} & -F^2_{32} & F^2_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\,{}^t\begin{pmatrix} 37/5 & 0 & 16/5 \\ 0 & 9 & 0 \\ 16/5 & 0 & 13/5 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 37/5 & 0 & 16/5 \\ 0 & 9 & 0 \\ 16/5 & 0 & 13/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37/45 & 0 & 16/45 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16/45 & 0 & 13/45 \end{pmatrix}.$$

On a donc $(F^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 37/45 & 0 & 16/45 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16/45 & 0 & 13/45 \end{pmatrix}$.

On remarque que, ici, $(F^2)^{-1} = (F^{-1})^2$:

$$(F^{-1})^2 = \begin{pmatrix} -13/15 & 0 & -4/15 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4/15 & 0 & -7/15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -13/15 & 0 & -4/15 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4/15 & 0 & -7/15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37/45 & 0 & 16/45 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16/45 & 0 & 13/45 \end{pmatrix} = (F^2)^{-1}.$$

b. La relation $f(\vec{v}) = \vec{e_1} + 5\vec{e_2} - 22\vec{e_3}$ peut s'écrire $F\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -22 \end{pmatrix}$.

On a alors $\vec{v} = F^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -22 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -13/15 & 0 & -4/15 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4/15 & 0 & -7/15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{15} + \frac{88}{15} \\ -5 \\ -\frac{4}{15} + \frac{154}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Ainsi le vecteur $\vec{v}$ tel que $f(\vec{v}) = \vec{e_1} + 5\vec{e_2} - 22\vec{e_3}$ est $\vec{v} = 5\vec{e_1} - 5\vec{e_2} + 10\vec{e_3}$.

Exercice 12.33.

a. Soient A et B deux matrices inversibles avec AB inversible.
Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs tels que $\vec{w} = (AB)\vec{v}$.
On a $(AB)\vec{v} = A(B\vec{v})$.
Ainsi $\vec{w} = A(B\vec{v})$.
En multipliant les 2 membres à gauche par A^{-1}, on obtient $A^{-1}\vec{w} = A^{-1}(A(B\vec{v}))$.
On a $A^{-1}(A(B\vec{v})) = (A^{-1}A)(B\vec{v}) = IB\vec{v} = B\vec{v}$, puisque $A^{-1}A = I$, la matrice identité.
On obtient ainsi $A^{-1}\vec{w} = B\vec{v}$.
En multipliant les 2 membres à gauche par B^{-1}, on obtient $B^{-1}(A^{-1}\vec{w}) = B^{-1}(B\vec{v})$.
On a $B^{-1}(B\vec{v}) = (B^{-1}B)\vec{v} = I\vec{v} = \vec{v}$ et $B^{-1}(A^{-1}\vec{w}) = (B^{-1}A^{-1})\vec{w}$.
On obtient ainsi $(B^{-1}A^{-1})\vec{w} = \vec{v}$.
D'autre part, en multipliant à gauche chaque membre de $\vec{w} = (AB)\vec{v}$ par $(AB)^{-1}$, on obtient $(AB)^{-1}\vec{w} = (AB)^{-1}((AB)\vec{v})$.
Comme $(AB)^{-1}((AB)\vec{v}) = ((AB)^{-1}(AB))\vec{v} = I\vec{v} = \vec{v}$, on obtient
$(AB)^{-1}\vec{w} = \vec{v}$.
Par conséquent on a $\vec{v} = (AB)^{-1}\vec{w}$ et $\vec{v} = (B^{-1}A^{-1})\vec{w}$,
d'où on conclut qu'on a bien $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

b. Dimension 2 : soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$; on a $\det(A) = ad - bc$;

de plus ${}^tA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\det({}^tA) = ad - cb = ad - bc$;

on a donc bien $\det({}^tA) = \det(A)$.

Dimension 3 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$; on a $\det(A) =$

$= aei + cdh + bfg - ceg - bdi - afh$;

de plus ${}^tA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et $\det({}^tA) =$

$= aei + cdh + bfg - ceg - bdi - afh$;

on a donc bien $\det({}^tA) = \det(A)$.

c. Soit une matrice A ayant deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) auxquelles sont associées les vecteurs propres $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ respectivement.

On va montrer que $\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}=\vec{0} \Rightarrow \alpha=\beta=0$, ce qui démontrera que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont linéairement indépendants.
Comme λ_1 et λ_2 sont des valeurs propres de A et que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont leurs vecteurs propres associés respectifs, on a $A\vec{v_1}=\lambda_1\vec{v_1}$ et $A\vec{v_2}=\lambda_2\vec{v_2}$.
Multiplions à gauche par A les 2 membres de $\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}=\vec{0}$: on obtient
$A(\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2})=A.\vec{0} \Rightarrow A(\alpha\vec{v_1})+A(\beta\vec{v_2})=\vec{0} \Rightarrow \alpha A\vec{v_1}+\beta A\vec{v_2}=\vec{0}$
$\Rightarrow \alpha\lambda_1\vec{v_1}+\beta\lambda_2\vec{v_2}=\vec{0} \Rightarrow \alpha\lambda_1\vec{v_1}+\lambda_2\beta\vec{v_2}=\vec{0}$.
En outre, de $\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}=\vec{0}$, on tire $\beta\vec{v_2}=-\alpha\vec{v_1}$.
Par substitution dans $\alpha\lambda_1\vec{v_1}+\lambda_2\beta\vec{v_2}=\vec{0}$, on obtient
$\alpha\lambda_1\vec{v_1}+\lambda_2(-\alpha\vec{v_1})=\vec{0} \Rightarrow \alpha\lambda_1\vec{v_1}-\alpha\lambda_2\vec{v_1}=\vec{0} \Rightarrow \alpha(\lambda_1-\lambda_2)\vec{v_1}=\vec{0}$.
Comme $\lambda_1\neq\lambda_2$, on a $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$ et, donc $\alpha\vec{v_1}=\vec{0}$, d'où on déduit que $\alpha=0$.
Avec $\alpha=0$, on a $\beta\vec{v_2}=-\alpha\vec{v_1}=-0.\vec{v_1}=\vec{0}$, d'où $\beta=\vec{0}$.
Ainsi $\alpha\vec{v_1}+\beta\vec{v_2}=\vec{0} \Rightarrow \alpha=\beta=0$ et, donc, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont linéairement indépendants.

d. Soient A et B 2 matrices carrée $n\times n$. On sait que $\det(AB)=\det(A).\det(B)$.
Soit A une matrice carrée inversible. On sait que $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}$ ou $\det(A^{-1}).\det(A)=1$.
Soit F la matrice $n\times n$ d'une transformation dans la base canonique.
Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ses valeurs.
Dans la base propre, la matrice correspondante s'écrit $F'=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$.
On a clairement $\det(F')=\lambda_1.\cdots.\lambda_n=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$.
Soient P la matrice de changement de base permettant de passer de la base propre à la base canonique et P^{-1} son inverse, matrice de changement de base permettant de passer de la base canonique à la base propre.
On a alors $F'=P^{-1}.F.P$.
On a alors $\det(F')=\det(P^{-1}.F.P)=\det(P^{-1}).\det(F).\det(P)=$
$=\det(P^{-1}).\det(P).\det(F)=1.\det(F)=\det(F)$, en utilisant les propriétés citées ci-dessus.
Ainsi, on a obtenu $\det(F')=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$ et $\det(F')=\det(F)$, d'où on conclut que $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\det(F)$.
Par conséquent, le produit des valeurs propres d'une matrice est égal au déterminant de la matrice.

e. D'après d, le produit des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ d'une matrice F d'une transformation f est égal au déterminant de la matrice.
Si le déterminant de la matrice est nul, alors le produit des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ est nul : $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$.
Cela implique qu'il existe forcément une valeur propre $\lambda_i = 0$ $(1 \leq i \leq n)$.
Soit $\vec{v_i}$ le vecteur propre associé à $\lambda_i = 0$.
On a alors $f(\vec{v_i}) = F\vec{v_i} = \lambda_i \vec{v_i} = 0\vec{v_i} = \vec{0}$.
Par définition, le noyau d'une transformation f est l'ensemble des vecteurs dont l'image est le vecteur nul. On peut donc écrire
$Ker(f) = \{ \vec{v} \mid f(\vec{v}) = 0 \} = \{ \vec{v} \mid F\vec{v} = \vec{0} \}$.
Comme $\vec{v_i} \in Ker(f)$, on en déduit que $Ker(f)$ est non vide (non nul).
Ainsi, il existe des vecteurs non nuls qui sont envoyés sur le vecteur nul. Il y a donc forcément projection sur un sous-espace.

Exercice 12.34.

On a $F=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de F sont les λ solutions de $\det(F-\lambda I)=0$.

On a: $F-\lambda I=\begin{pmatrix}-2-\lambda & 6\\ 2 & -3-\lambda\end{pmatrix}$;

$$\det(F-\lambda I)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 6\\ 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=(-2-\lambda)(-3-\lambda)-2\cdot 6=$$

$$=(2+\lambda)(3+\lambda)-12=\lambda^2+5\lambda+6-12=\lambda^2+5\lambda-6=(\lambda+6)(\lambda-1);$$

$$\det(F-\lambda I)=0 \Rightarrow (\lambda+6)(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda_1=-6 \text{ et } \lambda_2=1.$$

Avec $\lambda_1=-6$, on a $F\vec{v}=\lambda_1\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix}-2 & 6\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=-6\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases}-2v_1+6v_2=-6v_1\\ 2v_1-3v_2=-6v_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4v_1+6v_2=0\\ 2v_1+3v_2=0\end{cases} \Rightarrow 2v_1+3v_2=0 \Rightarrow v_2=-\frac{2}{3}v_1$$

$$\Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ -2/3\,v_1\end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour la valeur propre $\lambda_1=-6$, on peut prendre le vecteur propre $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$ (on a pris $v_1=3$).

Avec $\lambda_2=1$, on a $F\vec{v}=\lambda_2\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix}-2 & 6\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases}-2v_1+6v_2=v_1\\ 2v_1-3v_2=v_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6v_2=3v_1\\ 2v_1=4v_2\end{cases} \Rightarrow v_1=2v_2 \Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix}2v_2\\ v_2\end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour la valeur propre $\lambda_2=1$, on peut prendre le vecteur propre $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ (on a pris $v_2=1$).

Par conséquent, F a les valeurs propres $\lambda_1=-6$ et $\lambda_2=1$ et les vecteurs propres $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}3\\ -2\end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ respectivement.

On a $F^2=F\cdot F=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+12 & -12-18\\ -4-6 & 12+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & -30\\ -10 & 21\end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de F^2 sont les λ solutions de $\det(F^2-\lambda I)=0$.

On a: $F^2-\lambda I=\begin{pmatrix}16-\lambda & -30\\ -10 & 21-\lambda\end{pmatrix}$;

$$\det(F^2-\lambda I)=\begin{vmatrix}16-\lambda & -30\\ -10 & 21-\lambda\end{vmatrix}=(16-\lambda)(21-\lambda)-(-10)\cdot(-30)=$$

$= 336 - 37\lambda + \lambda^2 - 300 = \lambda^2 - 37\lambda + 36 = (\lambda - 36)(\lambda - 1)$;

$\det(F^2 - \lambda I) = 0 \Rightarrow (\lambda-36)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 36$ et $\lambda_2 = 1$.

Avec $\lambda_1 = 36$, on a $F^2\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 16 & -30 \\ -10 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 36\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 16v_1 - 30v_2 = 36v_1 \\ -10v_1 + 21v_2 = 36v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -20v_1 - 30v_2 = 0 \\ -10v_1 - 15v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2v_1 = -3v_2 \Rightarrow v_2 = -\frac{2}{3}v_1$

$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -2/3\, v_1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, pour la valeur propre $\lambda_1 = 36$, on peut prendre le vecteur propre $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ (on a pris $v_1 = 3$).

Avec $\lambda_2 = 1$, on a $F^2\vec{v} = \lambda_2\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 16 & -30 \\ -10 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 16v_1 - 30v_2 = v_1 \\ -10v_1 + 21v_2 = v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15v_1 = 30v_2 \\ 10v_1 = 20v_2 \end{cases} \Rightarrow v_1 = 2v_2 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 2v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, pour la valeur propre $\lambda_2 = 1$, on peut prendre le vecteur propre $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (on a pris $v_2 = 1$).

Par conséquent, F^2 a les valeurs propres $\lambda_1 = 36$ et $\lambda_2 = 1$ et les vecteurs propres $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On remarque que les valeurs propres de F^2 sont les carrés des valeurs propres de F et que les vecteurs propres correspondants de F^2 sont les mêmes que ceux de F.

On a $\det(F) = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-3) - 2\cdot 6 = 6 - 12 = -6$.

Ainsi $F^{-1} = \frac{1}{\det(F)}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-6}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de F^{-1} sont les λ solutions de $\det(F^{-1} - \lambda I) = 0$.

On a : $F^{-1} - \lambda I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} - \lambda \end{pmatrix}$;

$\det(F^{-1} - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{1}{3} - \lambda\right) - 1\cdot\frac{1}{3} =$

$= \frac{1}{6} - \frac{5}{6}\lambda + \lambda^2 - \frac{1}{3} = \lambda^2 - \frac{5}{6}\lambda - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(6\lambda^2 - 5\lambda - 1) =$

$= \frac{1}{6}(6\lambda + 1)(\lambda - 1)$;

$$\det(F^{-1}-\lambda I)=0 \Rightarrow \frac{1}{6}(6\lambda+1)(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda_1=-\frac{1}{6} \text{ et } \lambda_2=1.$$

Avec $\lambda_1=-\frac{1}{6}$, on a $F^{-1}\vec{v}=\lambda_1\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}v_1+\frac{1}{3}v_2=-\frac{1}{6}v_1 \\ v_1+\frac{1}{3}v_2=-\frac{1}{6}v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3v_1+2v_2=-v_1 \\ 6v_1+2v_2=-v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4v_1+2v_2=0 \\ 6v_1+3v_2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_2=-2v_1 \Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ -2v_1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour la valeur propre $\lambda_1=-\frac{1}{6}$, on peut prendre le vecteur propre $\vec{v_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (on a pris $v_1=1$).

Avec $\lambda_2=1$, on a $F^{-1}\vec{v}=\lambda_2\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}v_1+\frac{1}{3}v_2=v_1 \\ v_1+\frac{1}{3}v_2=v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3v_1+2v_2=6v_1 \\ 3v_1+v_2=3v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2v_2=3v_1 \\ 3v_1=2v_2 \end{cases} \Rightarrow v_2=\frac{3}{2}v_1$$

$$\Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{3}{2}v_1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour la valeur propre $\lambda_2=1$, on peut prendre le vecteur propre $\vec{v_2}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (on a pris $v_1=2$).

Par conséquent, F^{-1} a les valeurs propres $\lambda_1=-\frac{1}{6}$ et $\lambda_2=1$ et les vecteurs propres $\vec{v_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ respectivement.

On remarque que les valeurs propres de F^{-1} sont les inverses des valeurs propres de F et que les vecteurs propres correspondants s'obtiennent de la manière suivante:

F: valeur propre $\lambda_1=-6$, vecteur propre $\vec{v_1}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
valeur propre $\lambda_2=1$, vecteur propre $\vec{v_2}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

F^{-1}: valeur propre $\lambda_1'=-\frac{1}{6}$, vecteur propre $\vec{v_1}'=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
valeur propre $\lambda_2'=1$, vecteur propre $\vec{v_2}'=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{v_1}'$ est perpendiculaire à $\vec{v_2}$ et $\vec{v_2}'$ est perpendiculaire à $\vec{v_1}$.

Exercice 12.35

On a $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Les valeurs propres de A sont les solutions de l'équation caractéristique $\det(A-\lambda I)=0$.

On a: $A-\lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 9-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$;

$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 9-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (2-\lambda)(9-\lambda)(4-\lambda) + 1\cdot(-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot(-1) - (-1)(9-\lambda)\cdot 1 - (2-\lambda)\cdot(-1)\cdot(-1)$
$- 1\cdot 1\cdot(4-\lambda) =$

$= (2-\lambda)(9-\lambda)(4-\lambda) + \cancel{1} - \cancel{1} + 9 - \cancel{\lambda} - 2 + \cancel{\lambda} - 4 + \lambda =$

$= (2-\lambda)(9-\lambda)(4-\lambda) + \lambda + 3 = (2-\lambda)(36 - 13\lambda + \lambda^2) + \lambda + 3 =$

$= 72 - 26\lambda + 2\lambda^2 - 36\lambda + 13\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda + 3 = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 61\lambda + 75$;

$\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 61\lambda + 75 = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 15\lambda^2 + 61\lambda - 75 = 0$;

Comme on sait qu'il y a des valeurs propres entières, on va chercher une solution λ parmi les diviseurs positifs et négatifs de 75: ± 1; ± 3; ± 5; ± 15; ± 25; ± 75;

$\lambda = 1$: $\lambda^3 - 15\lambda^2 + 61\lambda - 75 = 1 - 15 + 61 - 75 \neq 0$;

$\lambda = -1$: $\lambda^3 - 15\lambda^2 + 61\lambda - 75 = -1 - 15 - 61 - 75 \neq 0$;

$\lambda = 3$: $\lambda^3 - 15\lambda^2 + 61\lambda - 75 = 27 - 135 + 183 - 75 = 0$;

ainsi, $\lambda_1 = 3$ est une valeur propre de A;

pour trouver les autres, on commence par effectuer la division de $\lambda^3 - 15\lambda^2 + 61\lambda - 75$ par $\lambda - 3$:

$$
\begin{array}{r|l}
\lambda^3 - 15\lambda^2 + 61\lambda - 75 & \lambda - 3 \\
\hline
-(\lambda^3 - 3\lambda^2) \qquad\qquad & \lambda^2 - 12\lambda + 25 \\
\hline
-12\lambda^2 + 61\lambda - 75 & \\
-(-12\lambda^2 + 36\lambda) \qquad & \\
\hline
25\lambda + 75 & \\
-(25\lambda + 75) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

ainsi, les autres valeurs propres seront les solutions de $\lambda^2 - 12\lambda + 25 = 0$, ce qui est une équation du 2e degré de la forme $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, avec $a = 1$, $b = -12$ et $c = 25$; on a $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4\cdot 1\cdot 25 = 144 - 100 = 44$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{44} =$
$= 2\sqrt{11}$; les solutions de $\lambda^2 - 12\lambda + 25 = 0$ sont alors $\lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 + 2\sqrt{11}}{2} =$

$= 6+\sqrt{11}$ et $\lambda_3 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{12-2\sqrt{11}}{2} = 6-\sqrt{11}$.

Par conséquent, les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6+\sqrt{11}$ et $\lambda_3 = 6-\sqrt{11}$.

b. Comme les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6+\sqrt{11}$, $\lambda_3 = 6-\sqrt{11}$, la matrice A peut s'écrire $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6+\sqrt{11} & 0 \\ 0 & 0 & 6-\sqrt{11} \end{pmatrix}$ dans la base propre $(\vec{p_1}; \vec{p_2}; \vec{p_3})$, où $\vec{p_1}, \vec{p_2}$ et $\vec{p_3}$ sont les vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.

Pour terminer la diagonalisation de A, il reste donc à trouver les vecteurs propres $\vec{p_1}, \vec{p_2}$ et $\vec{p_3}$:

$\lambda_1 = 3$: on a $A\vec{p} = \lambda_1 \vec{p} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3p_1 \\ 3p_2 \\ 3p_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2p_1+p_2+p_3 = 3p_1 \\ p_1+9p_2-p_3 = 3p_2 \\ -p_1-p_2+4p_3 = 3p_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -p_1+p_2+p_3 = 0 & ① \\ p_1+6p_2-p_3 = 0 & ② \\ -p_1-p_2+p_3 = 0 & ③ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ①+② : 7p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = 0 \\ ②+③ : 5p_2 = 0 \Rightarrow p_2 = 0 \\ ① : -p_1+p_2+p_3 = 0 \\ ② : p_1+6p_2-p_3 = 0 \\ ③ : -p_1-p_2+p_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ① : -p_1+p_3 = 0 \\ ② : p_1+p_3 = 0 \\ ③ : -p_1+p_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ①+② : 2p_3 = 0 \Rightarrow p_3 = 0 \\ \left.\begin{array}{l} ① : -p_1+p_3 = 0 \\ ② : p_1+p_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

ainsi le vecteur propre associé à $\lambda_1 = 3$ est $\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\lambda_2 = 6+\sqrt{11}$: on a $A\vec{p} = \lambda_2 \vec{p} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6+\sqrt{11})p_1 \\ (6+\sqrt{11})p_2 \\ (6+\sqrt{11})p_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2p_1+p_2+p_3 = (6+\sqrt{11})p_1 \\ p_1+9p_2-p_3 = (6+\sqrt{11})p_2 \\ -p_1-p_2+4p_3 = (6+\sqrt{11})p_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-4-\sqrt{11})p_1+p_2+p_3 = 0 & ① \\ p_1+(3-\sqrt{11})p_2-p_3 = 0 & ② \\ -p_1-p_2+(-2-\sqrt{11})p_3 = 0 & ③ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ①+(4+\sqrt{11})② : p_2+(4+\sqrt{11})(3-\sqrt{11})p_2+p_3-(4+\sqrt{11})p_3 = 0 \\ ②+③ : (2-\sqrt{11})p_2+(-3-\sqrt{11})p_3 = 0 \\ ② : p_1+(3-\sqrt{11})p_2-p_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2-\sqrt{11})p_2+(-3-\sqrt{11})p_3 = 0 \\ (2-\sqrt{11})p_2+(-3-\sqrt{11})p_3 = 0 \\ p_1+(3-\sqrt{11})p_2-p_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_3 = \dfrac{2-\sqrt{11}}{3+\sqrt{11}}\,p_2 \\ p_1 = (\sqrt{11}-3)p_2+p_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_3 = \dfrac{5\sqrt{11}-17}{2}\,p_2 \\ p_1 = (\sqrt{11}-3)p_2+\dfrac{5\sqrt{11}-17}{2}p_2 = \dfrac{2\sqrt{11}-6+5\sqrt{11}-17}{2}p_2 = \dfrac{7\sqrt{11}-23}{2}\,p_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} \dfrac{7\sqrt{11}-23}{2}p_2 \\ p_2 \\ \dfrac{5\sqrt{11}-17}{2}p_2 \end{pmatrix};$$

en prenant $p_2=2$, on en déduit que le vecteur propre associé à $\lambda_2 = 6+\sqrt{11}$ est $\vec{p_2} = \begin{pmatrix} 7\sqrt{11}-23 \\ 2 \\ 5\sqrt{11}-17 \end{pmatrix}$;

$\lambda_3 = 6-\sqrt{11}$: on a $A\vec{p} = \lambda_3 \vec{p} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6-\sqrt{11})p_1 \\ (6-\sqrt{11})p_2 \\ (6-\sqrt{11})p_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2p_1+p_2+p_3 = (6-\sqrt{11})p_1 \\ p_1+9p_2-p_3 = (6-\sqrt{11})p_2 \\ -p_1-p_2+4p_3 = (6-\sqrt{11})p_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-4+\sqrt{11})p_1+p_2+p_3 = 0 & ① \\ p_1+(3+\sqrt{11})p_2-p_3=0 & ② \\ -p_1-p_2+(-2+\sqrt{11})p_3 = 0 & ③ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ①+(4-\sqrt{11})② : \; p_2+(4-\sqrt{11})(3+\sqrt{11})p_2+p_3-(4-\sqrt{11})p_3=0 \\ ②+③ : \; (2+\sqrt{11})p_2+(-3+\sqrt{11})p_3=0 \\ ② : \; p_1+(3+\sqrt{11})p_2-p_3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2+\sqrt{11})p_2+(-3+\sqrt{11})p_3=0 \\ (2+\sqrt{11})p_2+(-3+\sqrt{11})p_3=0 \\ p_1+(3+\sqrt{11})p_2-p_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_3 = \dfrac{2+\sqrt{11}}{-3+\sqrt{11}}\, p_2 \\ p_1 = (-3-\sqrt{11})p_2+p_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_3 = \dfrac{5\sqrt{11}+17}{2}\, p_2 \\ p_1 = (-3-\sqrt{11})p_2 + \dfrac{5\sqrt{11}+17}{2}p_2 = \dfrac{-6-2\sqrt{11}+5\sqrt{11}+17}{2}p_2 = \dfrac{3\sqrt{11}+11}{2}p_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} \dfrac{3\sqrt{11}+11}{2}p_2 \\ p_2 \\ \dfrac{5\sqrt{11}+17}{2}p_2 \end{pmatrix};$$

en prenant $p_2=2$, on en déduit que le vecteur associé à $\lambda_3 = 6-\sqrt{11}$ est $\vec{p_3} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{11}+11 \\ 2 \\ 5\sqrt{11}+17 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, dans la base $(\vec{p_1}; \vec{p_2}; \vec{p_3})$, où $\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p_2} = \begin{pmatrix} 7\sqrt{11}-23 \\ 2 \\ 5\sqrt{11}-17 \end{pmatrix}$ et $\vec{p_3} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{11}+11 \\ 2 \\ 5\sqrt{11}+17 \end{pmatrix}$, la matrice A est diagonalisée et vaut $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6+\sqrt{11} & 0 \\ 0 & 0 & 6-\sqrt{11} \end{pmatrix}$.

C. Soit A la matrice de f dans la base $(\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ et A' sa matrice dans la base propre $(\vec{p_1}; \vec{p_2}; \vec{p_2})$.

Soit P la matrice de passage de la base $(\vec{p_1}; \vec{p_2}; \vec{p_2})$ à la base $(\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$, et P^{-1} son inverse.

On a alors $A' = P^{-1}.A.P$.

La matrice associée à g dans la base $(\vec{e_1}; \vec{e_2}; \vec{e_3})$ est $B = A^2 - 12A + 25I$.

En notant B' la matrice de g dans la base $(\vec{p_1}; \vec{p_2}; \vec{p_3})$, on a :

$B' = P^{-1}.B.P = P^{-1}(A^2-12A+25I)P = P^{-1}.A^2.P - P^{-1}.12A.P + P^{-1}.25I.P =$

$$= P^{-1}\cdot A\cdot A\cdot P - 12\cdot P^{-1}\cdot A\cdot P + 25\cdot P^{-1}\cdot I\cdot P =$$
$$= P^{-1}\cdot A\cdot I\cdot A\cdot P - 12A' + 25\cdot P^{-1}\cdot P =$$
$$= P^{-1}\cdot A\cdot P\cdot P^{-1}\cdot A\cdot P - 12A' + 25I = A'\cdot A' - 12A' + 25I =$$
$$= A'^2 - 12A' + 25I.$$

Avec $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6+\sqrt{11} & 0 \\ 0 & 0 & 6-\sqrt{11} \end{pmatrix}$, on a $A'^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6+\sqrt{11} & 0 \\ 0 & 0 & 6-\sqrt{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6+\sqrt{11} & 0 \\ 0 & 0 & 6-\sqrt{11} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & (6+\sqrt{11})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (6-\sqrt{11})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 47+12\sqrt{11} & 0 \\ 0 & 0 & 47-12\sqrt{11} \end{pmatrix},$$

$12A' = \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 72+12\sqrt{11} & 0 \\ 0 & 0 & 72-12\sqrt{11} \end{pmatrix}$ et $25I = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$.

Ainsi $B' = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 47+12\sqrt{11} & 0 \\ 0 & 0 & 47-12\sqrt{11} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 72+12\sqrt{11} & 0 \\ 0 & 0 & 72-12\sqrt{11} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 9-36+25 & 0 & 0 \\ 0 & 47-72+25 & 0 \\ 0 & 0 & 47-72+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice B' est donc diagonale. Cela signifie que, dans la base où elle est exprimée, à savoir $(\vec{p_1}\,;\vec{p_2}\,;\vec{p_3})$, les éléments diagonaux sont ses valeurs propres.
Les valeurs propres de B' sont donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Exercice 12.36

Pour diagonaliser une matrice B de dimension $n \times n$, on commence par chercher ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, puis les vecteurs propres respectifs associés $\vec{p_1}, \dots, \vec{p_n}$. Dans la base $(\vec{p_1}; \dots; \vec{p_n})$, la matrice B sera alors diagonalisée et vaudra $B' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$: les valeurs propres de A sont les λ solutions de $\det(A - \lambda I) = 0$;

on a $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 3 \cdot 4 = 6 - 5\lambda + \lambda^2 - 12 =$

$= \lambda^2 - 5\lambda - 6 = (\lambda+1)(\lambda-6)$; ainsi $\det(A-\lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 6$;

avec $\lambda_1 = -1$, on a $A\vec{p} = \lambda_1 \vec{p} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1 \\ -p_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2p_1 + 4p_2 = -p_1 \\ 3p_1 + 3p_2 = -p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3p_1 + 4p_2 = 0 \\ 3p_1 + 4p_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow p_2 = -\frac{3}{4} p_1 \Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ -\frac{3}{4} p_1 \end{pmatrix}$;

avec $p_1 = 4$, le vecteur propre associé à $\lambda_1 = -1$ est $\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$;

avec $\lambda_2 = 6$, on a $A\vec{p} = \lambda_2 \vec{p} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6p_1 \\ 6p_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2p_1 + 4p_2 = 6p_1 \\ 3p_1 + 3p_2 = 6p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4p_2 = 4p_1 \\ 3p_1 = 3p_2 \end{cases} \Rightarrow p_1 = p_2 \Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$;

avec $p_1 = 1$, le vecteur propre associé à $\lambda_2 = 6$ est $\vec{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

par conséquent, dans la base $(\vec{p_1}; \vec{p_2})$ avec $\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matrice A s'écrit $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, matrice diagonalisée.

$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$: les valeurs propres de C sont les λ solutions de $\det(C - \lambda I) = 0$;

on a $\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (2-\lambda)(-4-\lambda)(5-\lambda) + 0 \cdot 12 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-4-\lambda) \cdot 4 - (2-\lambda)(-2) \cdot 12 - 3 \cdot 0 \cdot (5-\lambda) =$

$= (2-\lambda)(-4-\lambda)(5-\lambda) - 24 + 16 + 4\lambda + 48 - 24\lambda =$

$= (2-\lambda)(-4-\lambda)(5-\lambda) - 20\lambda + 40 = (2-\lambda)(-4-\lambda)(5-\lambda) + 20(2-\lambda) =$

$= (2-\lambda)\big((-4-\lambda)(5-\lambda) + 20\big) = (2-\lambda)(-20 + 4\lambda - 5\lambda + \lambda^2 + 20) =$

$= (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda) = \lambda(2-\lambda)(\lambda-1)$;

ainsi $\det(C-\lambda I)=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=1$ et $\lambda_3=2$;

avec $\lambda_1=0$, on a $A\vec{p}=\lambda_1\vec{p} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2p_1+4p_3=0 \Rightarrow p_1=-2p_3 \\ 3p_1-4p_2+12p_3=0 \\ p_1-2p_2+5p_3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_1=-2p_3 \\ -6p_3-4p_2+12p_3=0 \\ -2p_3-2p_2+5p_3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1=-2p_3 \\ -4p_2+6p_3=0 \\ -2p_2+3p_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1=-2p_3 \\ p_2=\frac{3}{2}p_3 \end{cases} \Rightarrow \vec{p}=\begin{pmatrix} -2p_3 \\ \frac{3}{2}p_3 \\ p_3 \end{pmatrix};$$

avec $p_3=2$, le vecteur propre associé à $\lambda_1=0$ est $\vec{p_1}=\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$;

avec $\lambda_2=1$, on a $A\vec{p}=\lambda_2\vec{p} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2p_1+4p_3=p_1 \\ 3p_1-4p_2+12p_3=p_2 \\ p_1-2p_2+5p_3=p_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_1=-4p_3 \\ 3p_1-5p_2+12p_3=0 \\ p_1-2p_2+4p_3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1=-4p_3 \\ -12p_3-5p_2+12p_3=0 \\ -4p_3-2p_2+4p_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1=-4p_3 \\ p_2=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{p}=\begin{pmatrix} -4p_3 \\ 0 \\ p_3 \end{pmatrix};$$

avec $p_3=1$, le vecteur propre associé à $\lambda_2=1$ est $\vec{p_2}=\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

avec $\lambda_3=2$, on a $A\vec{p}=\lambda_3\vec{p} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_1 \\ 2p_2 \\ 2p_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2p_1+4p_3=2p_1 \Rightarrow p_3=0 \\ 3p_1-4p_2+12p_3=2p_2 \\ p_1-2p_2+5p_3=2p_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_3=0 \\ 3p_1=6p_2 \\ p_1=2p_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_3=0 \\ p_1=2p_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{p}=\begin{pmatrix} 2p_2 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

avec $p_2=1$, le vecteur propre associé à $\lambda_3=1$ est $\vec{p_3}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

par conséquent, dans la base $(\vec{p_1};\vec{p_2};\vec{p_3})$ avec $\vec{p_1}=\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{p_2}=\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{p_3}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la matrice C s'écrit $C'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, matrice diagonalisée.

Exercice 12.37

L'image d'un point $P(x;y)$ par l'affinité est donnée par $\overrightarrow{OP'} = A\cdot\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO'}$, où $O=(0;0)$ et $O'=(-4;4)$ est l'image de O.

a. Les points fixes de l'affinité sont les $P(x;y)$ tel que $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}$, autrement dit $\overrightarrow{OP} = A\cdot\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OO'}$.

On a donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = x+2y-4 \\ y=-y+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y-4=0 \\ 2y=4 \end{cases} \Rightarrow y=2.$

Ainsi les points fixes de l'affinité sont les points $P(a;2)$, $a\in\mathbb{R}$

b. Cherchons une base propre $(\overrightarrow{p_1};\overrightarrow{p_2})$ de la matrice A.

Les valeurs propres de A sont les λ solutions de $\det(A-\lambda I)=0$.

On a $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-\lambda \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)$.

Ainsi $\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-1)=0 \Rightarrow \lambda_1=-1$ et $\lambda_2=1$.

Avec $\lambda_1=-1$, on a $A\vec{p}=\lambda_1\vec{p} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_1 \\ -p_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p_1+2p_2=-p_1 \\ -p_2=-p_2 \end{cases} \Rightarrow 2p_2=-2p_1$

$\Rightarrow p_2=-p_1 \Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ -p_1 \end{pmatrix}$.

En prenant $p_1=1$, le vecteur propre associé à $\lambda_1=-1$ est $\overrightarrow{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Avec $\lambda_2=1$, on a $A\vec{p}=\lambda_2\vec{p} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p_1+2p_2=p_1 \\ -p_2=p_2 \end{cases} \Rightarrow p_2=0$

$\Rightarrow \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En prenant $p_1=1$, le vecteur propre associé à $\lambda_2=1$ est $\overrightarrow{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On choisit Ω parmi les points fixes de l'affinité : par exemple $\Omega=(0;2)$.

Le repère que l'on peut choisir est donc $(\Omega;\overrightarrow{p_1};\overrightarrow{p_2})$, où $\Omega=(0;2)$, $\overrightarrow{p_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\overrightarrow{p_1};\overrightarrow{p_2})$ formant une base propre de A.

c. Dans la base propre $(\overrightarrow{p_1};\overrightarrow{p_2})$, A s'écrit $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

En outre, dans la base $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$, on a $\overrightarrow{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{p_2}=\overrightarrow{e_1} \Rightarrow \overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{p_2}$ et $\overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{e_1} = -\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}$.

Dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$, on a $\overrightarrow{OP'} = A\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO'}$.

Ainsi $\overrightarrow{\Omega P'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{O\Omega} = A\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{O\Omega}$.

Comme $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega P}$, on obtient $\overrightarrow{\Omega P'} = A(\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega P}) + \overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{O\Omega} =$

$= A\overrightarrow{O\Omega} + A\overrightarrow{\Omega P} + \overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{O\Omega} = A\overrightarrow{\Omega P} + A\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{O\Omega}$.

On a $A\overrightarrow{O\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $A\overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{O\Omega} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$, on obtient donc $\overrightarrow{\Omega P'} = A\overrightarrow{\Omega P}$.

On déduit que, dans le repère $(\Omega;\vec{p_1};\vec{p_2})$, et donc dans la base propre, on a $\overrightarrow{\Omega P'} = A'\overrightarrow{\Omega P}$ où $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{\Omega P'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\overrightarrow{\Omega P}$.

d. D'après c., dans le repère $(\Omega;\vec{p_1};\vec{p_2})$, on a $\overrightarrow{\Omega P'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\overrightarrow{\Omega P}$.

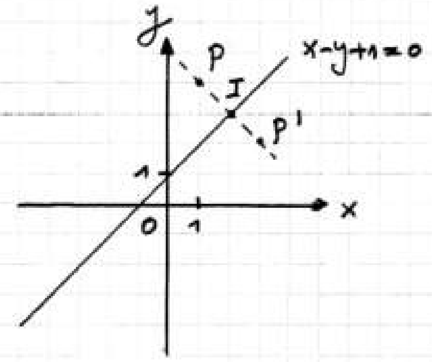
Si $\overrightarrow{\Omega P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a alors $\overrightarrow{\Omega P'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.

Ainsi l'image de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ (dans le repère $(\Omega;\vec{p_1};\vec{p_2})$).

Cela correspond donc à une symétrie axiale.

Exercice 12.38

a. On a la situation suivante :



Soit $P(x_0;y_0)$. On cherche l'expression de $\overrightarrow{OP'}$ en fonction de $\overrightarrow{OP}$.

On a $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PI}$.

Il faut trouver les coordonnées de I.

Un vecteur directeur de la droite $x-y+1=0$ est $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal est $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

La droite PI s'écrit donc : $\begin{cases} x = x_0+\lambda \\ y = y_0-\lambda \end{cases}$.

Par intersection avec la droite $x-y+1=0$, on obtient $x_0+\lambda-(y_0-\lambda)+1=0$

$\Rightarrow x_0+\lambda-y_0+\lambda+1=0 \Rightarrow 2\lambda = -x_0+y_0-1 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-x_0+y_0-1}{2}$.

Les coordonnées de I sont donc : $x = x_0+\lambda = x_0+\dfrac{-x_0+y_0-1}{2} = \dfrac{x_0+y_0-1}{2}$ et

$$y = y_0-\lambda = y_0 - \frac{-x_0+y_0-1}{2} = \frac{x_0+y_0+1}{2}.$$

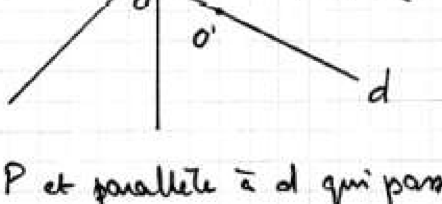
On a ainsi $\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{x_0+y_0-1}{2}-x_0 \\ \frac{x_0+y_0+1}{2}-y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x_0+y_0-1}{2} \\ \frac{x_0-y_0+1}{2} \end{pmatrix}$.

Par conséquent, $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PI} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-x_0+y_0-1\\x_0-y_0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_0-1\\x_0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_0\\x_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{OP'} = A\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO'}$, où $A = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ (image de l'origine).

b. On a la situation suivante:



P' se trouve sur la droite d' passant par P et parallèle à d qui passe par O et O'.

En outre, on doit avoir $\dfrac{JP'}{JP} = \dfrac{IO'}{IO}$.

La pente de la droite d est $-\frac{1}{2}$. Comme d passe par l'origine, on a d: $y=-\frac{1}{2}x$.

Les coordonnées de I seront données par la solution de $\begin{cases} y=x+1 \\ y=-\frac{1}{2}x \end{cases}$.

On a $x+1=-\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{3}{2}x=-1 \Rightarrow x=-\frac{2}{3} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3} \Rightarrow I\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

On a $IO=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ et

$$IO'=\sqrt{\left(2+\frac{2}{3}\right)^2+\left(-1-\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{80}{9}}=\frac{\sqrt{80}}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{3}.$$

Ainsi le rapport $\frac{IO'}{IO}$ vaut $\frac{4\sqrt{5}}{3}:\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}=4$.

La pente de la droite d', parallèle à d, est aussi $-\frac{1}{2}$.

Son équation s'écrit donc : d': $y=-\frac{1}{2}x+h$.

Cette droite passe par $P(x_0;y_0)$. On a donc $y_0=-\frac{1}{2}x_0+h \Rightarrow h=\frac{1}{2}x_0+y_0$.

Ainsi, on a : d': $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x_0+y_0$.

Les coordonnées de J seront données par la solution de $\begin{cases} y=x+1 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x_0+y_0 \end{cases}$.

On a $x+1=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x_0+y_0 \Rightarrow \frac{3}{2}x=\frac{1}{2}x_0+y_0-1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}x_0+\frac{2}{3}y_0-\frac{2}{3}$

$\Rightarrow y=x+1=\frac{1}{3}x_0+\frac{2}{3}y_0+\frac{1}{3} \Rightarrow J\left(\frac{1}{3}x_0+\frac{2}{3}y_0-\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}x_0+\frac{2}{3}y_0+\frac{1}{3}\right)$.

On a $\frac{JP'}{JP}=\frac{IO'}{IO}=4$ (voir ci-dessus). Cela signifie que $\overrightarrow{JP'}=4\overrightarrow{JP}$.

On a alors $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JP'}=\overrightarrow{OJ}+4\overrightarrow{JP}=\overrightarrow{OJ}+4\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OJ}\right)=$

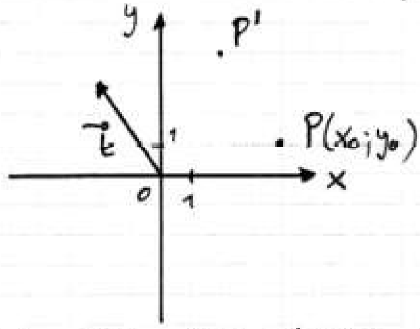
$=\overrightarrow{OJ}+4\overrightarrow{OP}-4\overrightarrow{OJ}=4\overrightarrow{OP}-3\overrightarrow{OJ}=$

$=4\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}\frac{1}{3}x_0+\frac{2}{3}y_0-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}x_0+\frac{2}{3}y_0+\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x_0-x_0-2y_0+2\\4y_0-x_0-2y_0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x_0-2y_0+2\\-x_0+2y_0-1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}3x_0-2y_0\\-x_0+2y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{OP'}=A\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OO'}$, où $A=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OO'}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ (image de l'origine).

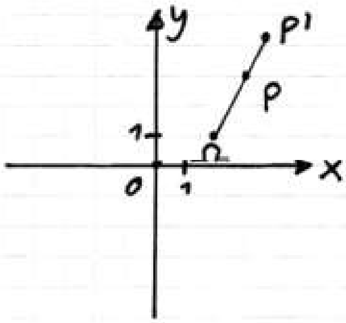
c. On a la situation suivante :



On a $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP'}=\overrightarrow{OP}+\vec{t}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{OP'}=A\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OO'}$, où $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OO'}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ (image de l'origine).

d. On a la situation suivante:



$\Omega(\alpha;\beta)$

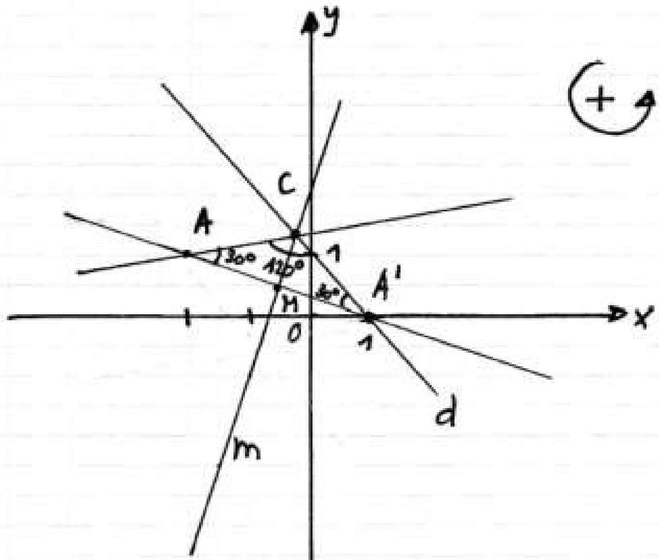
On a $\frac{\Omega P'}{\Omega P} = \lambda$, autrement dit $\overrightarrow{\Omega P'} = \lambda\overrightarrow{\Omega P}$.

On a $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega P'} = \overrightarrow{O\Omega} + \lambda\overrightarrow{\Omega P} = \overrightarrow{O\Omega} + \lambda(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{O\Omega}) =$
$= \overrightarrow{O\Omega} + \lambda\overrightarrow{OP} - \lambda\overrightarrow{O\Omega} = \lambda\overrightarrow{OP} + (1-\lambda)\overrightarrow{O\Omega}$.

Avec $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, on obtient $\overrightarrow{OP'} = \lambda\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ \lambda y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-\lambda)\alpha \\ (1-\lambda)\beta \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1-\lambda)\alpha \\ (1-\lambda)\beta \end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{OP'} = A\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO'}$, où $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)\alpha \\ (1-\lambda)\beta \end{pmatrix}$ (image de l'origine).

e. On a la situation suivante:



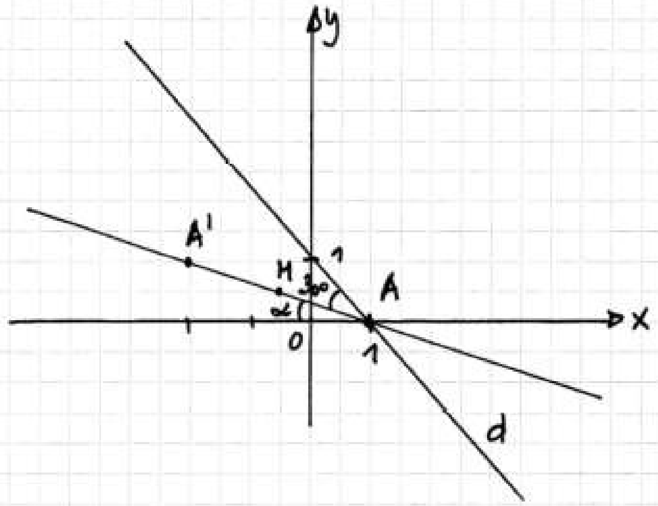
Les coordonnées de M, milieu de AA' sont $M = \left(\frac{-2+1}{2}\,;\,\frac{1+0}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

En outre $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à m, la médiatrice du segment AA'. L'équation de m est donc: $3x - y + k = 0$.

Avec $M\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right) \in m$, on obtient $3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + k = 0 \Rightarrow k = 2$.

On a ainsi m: $3x - y + 2 = 0 \Rightarrow y = 3x + 2$.

Cherchons maintenant l'équation de d. On a:



$\tan(\alpha) = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

La pente de d est alors $m = -\tan(\alpha + 30°) = -\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right)$.

Ainsi, l'équation de d est $y = -\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right)x + h$.

Avec $A = (1;0)$, on obtient $0 = -\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right)\cdot 1 + h \Rightarrow h = \tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right)$.

Ainsi, l'équation de d est $y = -\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right)x + \tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right)$.

Les coordonnées de C, centre de rotation, sont données par la solution de

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right)x + \tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x + 2 = -\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right)x + \tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right)$$

$$\Rightarrow \left(\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right) + 3\right)x = \tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right) - 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right) - 2}{\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right) + 3} \quad (\cong -0{,}21)$$

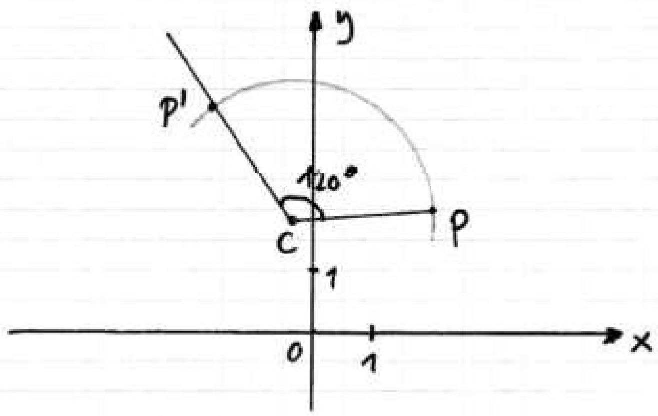
$$\Rightarrow y = 3x + 2 = \frac{3\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right) - 6}{\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right) + 3} + 2 = \frac{3\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right) - 6 + 2\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right) + 6}{\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right) + 3} =$$

$$= \frac{5\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right)}{\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right) + 3} (\cong 1{,}37).$$

Ainsi, les coordonnées du centre de rotation sont $\left(\frac{\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right) - 2}{\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right) + 3} ; \frac{5\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right)}{\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 30°\right) + 3}\right)$

$\cong (-0{,}21 ; 1{,}37)$.

On a maintenant la situation suivante:



On a $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP'}$.

D'après formulaires et tables p.26, on sait que la matrice de la rotation de centre O et d'angle β est $\begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$.

On va alors avoir $\overrightarrow{CP'} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \overrightarrow{CP}$, avec $\beta = 120°$

Ainsi $\overrightarrow{CP'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \overrightarrow{CP}$.

Comme $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}$, on obtient $\overrightarrow{CP'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \overrightarrow{OP} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \overrightarrow{OC}$.

Ainsi $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OC} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \overrightarrow{OC} =$

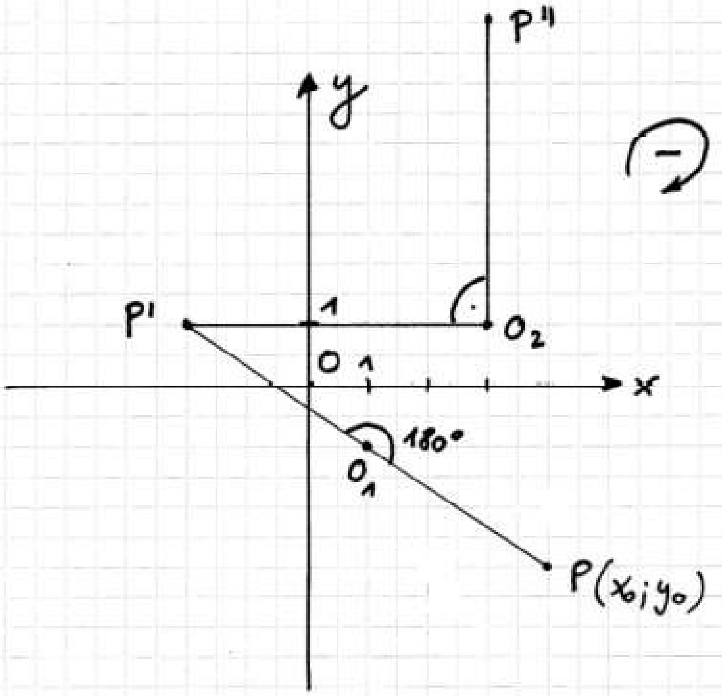
$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \overrightarrow{OP} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \overrightarrow{OC}$$

Comme $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \overrightarrow{OC} \cong \begin{pmatrix} 2{,}232 \\ 0{,}655 \end{pmatrix}$, on obtient

$\overrightarrow{OP'} = A\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO'}$, où $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} 2{,}232 \\ 0{,}655 \end{pmatrix}$ (image de l'origine).

Exercice 11.39

a. On a la situation suivante :



On a : $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PO_1} = \overrightarrow{OP} + 2(\overrightarrow{OO_1} - \overrightarrow{OP}) =$

$= \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OO_1} - 2\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OO_1} =$

$= -\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$

De plus, si $\overrightarrow{O_2P'} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{O_2P''} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{O_2P'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OO_2} = -\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OO_1} - \overrightarrow{OO_2} = -\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -x_0 + 2 - 3 \\ -y_0 - 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_0 - 1 \\ -y_0 - 3 \end{pmatrix}.$

Ainsi $\overrightarrow{O_2P''} = \begin{pmatrix} -y_0 - 3 \\ x_0 + 1 \end{pmatrix}$.

On a alors $\overrightarrow{OP''} = \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2P''} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_0 - 3 \\ x_0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_0 \\ x_0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = A \cdot \overrightarrow{OP} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, où A est la matrice de la composition des 2 rotations et $(0;2)$ les coordonnées du centre de la rotation composition des 2 rotations initiales.

On obtient donc le centre $(0;2)$.

b. Si on effectue les rotations dans l'autre ordre, on a, pour un point $P(x_0;y_0)$:

$\overrightarrow{O_2P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO_2} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 - 3 \\ y_0 - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{O_2P'} = \begin{pmatrix} y_0 - 1 \\ -x_0 + 3 \end{pmatrix}$;

d'où $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2P'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_0 - 1 \\ -x_0 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 + 2 \\ -x_0 + 4 \end{pmatrix}$;

de plus, $\overrightarrow{OP''} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'P''} = \overrightarrow{OP'} + 2\overrightarrow{P'O_1} = \overrightarrow{OP'} + 2\left(\overrightarrow{OO_1} - \overrightarrow{OP'}\right) =$

$= \overrightarrow{OP'} + 2\overrightarrow{OO_1} - 2\overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP'} + 2\overrightarrow{OO_1} =$

$= \begin{pmatrix} y_0 + 2 \\ -x_0 + 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 + 4 \\ -x_0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ -x_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = A' \cdot \overrightarrow{OP} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, où A' est la matrice de la composition des 2 rotations (dans l'autre ordre que dans a.) et $(4;2)$ les coordonnées du centre de la rotation composition des 2 rotations.

Par conséquent, le centre obtenu n'est pas le même si on change l'ordre des rotations.

Exercice 12.40

Une affinité γ peut s'écrire sous la forme $\overrightarrow{OP'} = A \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO'}$, où $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.

a. Avec $P = A(1;2)$ et $P' = A'(-10;-1)$, on a : $\begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2c + e = -10 \\ b + 2d + f = -1. \end{cases}$$

Avec $P = B(3;0)$ et $P' = B'(12;13)$, on a : $\begin{pmatrix} 12 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + e = 12 \\ 3b + f = 13 \end{cases}$$

Avec $P = C(5;4)$ et $P' = C'(-2;3)$, on a : $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5a + 4c + e = -2 \\ 5b + 4d + f = 3. \end{cases}$$

Cela nous donne 2 ensembles de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} a + 2c + e = -10 & (1) \\ 3a + e = 12 & (2) \\ 5a + 4c + e = -2 & (3) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b + 2d + f = -1 & (4) \\ 3b + f = 13 & (5) \\ 5b + 4d + f = 3 & (6). \end{cases}$$

De (2), on tire $e = 12 - 3a$.

Dans (1) et (3), on obtient : $a + 2c + 12 - 3a = -10 \Rightarrow -2a + 2c = -22 \Rightarrow a - c = 11$ (1)'

et : $5a + 4c + 12 - 3a = -2 \Rightarrow 2a + 4c = -14 \Rightarrow a + 2c = -7$ (3)'.

En effectuant $2 \cdot$(1)' + (3)', on trouve : $3a = 15 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow c = a - 11 = -6$.

Avec $e = 12 - 3a$, on obtient $e = 12 - 15 = -3$.

Ainsi, on a $a = 5$, $c = -6$ et $e = -3$.

De (5), on tire $f = 13 - 3b$.

Dans (4) et (6), on obtient : $b + 2d + 13 - 3b = -1 \Rightarrow -2b + 2d = -14 \Rightarrow b - d = 7$ (4)'

et : $5b + 4d + 13 - 3b = 3 \Rightarrow 2b + 4d = -10 \Rightarrow b + 2d = -5$ (6)'.

En effectuant $2 \cdot$(4)' + (6)', on trouve : $3b = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow d = b - 7 = 3 - 7 = -4$.

Avec $f = 13 - 3b$, on obtient $f = 13 - 9 = 4$.

Ainsi, on a $b = 3$, $d = -4$ et $f = 4$.

On peut donc écrire $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, et

γ peut être exprimée par $\overrightarrow{OP'} = A \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO'}$ avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b. Les points fixes de γ sont les P qui ne bougent pas par la transformation.

On doit donc avoir $\vec{OP} = A \cdot \vec{OP} + \vec{OO'}$ où $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{OO'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

En posant $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, on obtient $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 5x_0 - 6y_0 - 3 \\ y_0 = 3x_0 - 4y_0 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_0 - 6y_0 = 3 & (1) \\ 3x_0 - 5y_0 = -4 & (2) \end{cases}.$$

En effectuant $5\cdot(1) - 6\cdot(2)$, on obtient : $2x_0 = 39 \Rightarrow x_0 = 19{,}5$.

Avec $x_0 = 19{,}5$ dans (1), on obtient $4\cdot 19{,}5 - 6y_0 = 3 \Rightarrow -6y_0 = -75 \Rightarrow y_0 = 12{,}5$.

Ainsi, l'unique point fixe de γ est $(19{,}5\,;\,12{,}5)$.

c. Comme, on a $\vec{OP'} = A\cdot\vec{OP} + \vec{OO'}$, avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{OO'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, et que ajouter $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ne change rien au direction invariante, et, comme les directions invariantes de A sont ses vecteurs propres, les directions invariantes de γ seront les vecteurs propres de A.

Commençons par chercher les valeurs propres de A, autrement dit les λ solutions de $\det(A - \lambda I) = 0$.

On a : $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{pmatrix}$; $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= (5-\lambda)(-4-\lambda) - 3\cdot(-6) = -20 - 5\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

Ainsi $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$.

Avec $\lambda_1 = -1$, on a $A\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5v_1 - 6v_2 = -v_1 \\ 3v_1 - 4v_2 = -v_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6v_1 = 6v_2 \\ 3v_1 = 3v_2 \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix} ; \text{ avec } v_1 = 1, \text{ on a } \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Avec $\lambda_2 = 2$, on a $A\vec{v} = \lambda_2\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5v_1 - 6v_2 = 2v_1 \\ 3v_1 - 4v_2 = 2v_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3v_1 = 6v_2 \\ 3v_1 = 6v_2 \end{cases} \Rightarrow v_1 = 2v_2 \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 2v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} ; \text{ avec } v_2 = 1, \text{ on a } \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi les vecteurs propres de A sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, les directions invariantes de γ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12.41

On a : $\begin{cases} x' = 0,8x - 0,6y + 1 \\ y' = 0,6x + 0,8y - 3. \end{cases}$

a. $y' = x'^2 \Rightarrow 0,6x + 0,8y - 3 = (0,8x - 0,6y + 1)^2$

$\Rightarrow 0,6x + 0,8y - 3 = 0,64x^2 + 0,36y^2 + 1 - 0,96xy + 1,6x - 1,2y$

$\Rightarrow 0,64x^2 + 0,36y^2 - 0,96xy + x - 2y + 4 = 0$

$\Rightarrow (0,8x - 0,6y)^2 + x - 2y + 4 = 0$

Ainsi, l'équation cartésienne de Γ est $(0,8x - 0,6y)^2 + x - 2y + 4 = 0$.

b. On a : $x' = 0,8x - 0,6y + 1$ ①

$y' = 0,6x + 0,8y - 3$ ②.

En effectuant $0,8 \cdot ① + 0,6 \cdot ②$, on trouve : $0,8x' + 0,6y' = x - 1$, d'où

$x = 0,8x' + 0,6y' + 1$

En effectuant $0,6 \cdot ① - 0,8 \cdot ②$, on trouve: $0,6x' - 0,8y' = -y + 7$, d'où

$y = -0,6x' + 0,8y' + 7$.

L'affinité inverse peut donc s'écrire: $\begin{cases} x = 0,8x' + 0,6y' + 1 \\ y = -0,6x' + 0,8y' + 7. \end{cases}$

c. L'équation du cercle de rayon 1 centré en $(1;3)$ a pour équation

$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$.

Avec $x = 0,8x' + 0,6y' + 1$ et $y = -0,6x' + 0,8y' + 7$, cette équation devient $(0,8x' + 0,6y' + 1 - 1)^2 + (-0,6x' + 0,8y' + 7 - 3) = 1$

$\Rightarrow (0,8x' + 0,6y')^2 + (-0,6x' + 0,8y' + 4)^2 = 1$

$\Rightarrow 0,64x'^2 + \cancel{0,96x'y'} + 0,36y'^2 + 0,36x'^2 + 0,64y'^2 + 16 - \cancel{0,96x'y'} - 4,8x' + 6,4y' = 1$

$\Rightarrow x'^2 + y'^2 - 4,8x' + 6,4y' + 15 = 0.$

$\Rightarrow x'^2 - 4,8x' + 5,76 + y'^2 + 3,2y' + 10,24 + 15 - 5,76 - 10,24 = 0$

$\Rightarrow (x' - 2,4)^2 + (y' + 3,2)^2 = 1$

Ainsi la courbe Γ' est le cercle de rayon 1 centré en $(2,4; -3,2)$.

d. Avec $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, l'affinité φ peut s'écrire

$\overrightarrow{OP'} = A \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OO'}$, où $A = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OO'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

D'après Formulaires et Tables p. 26, une matrice de rotation est de la forme

$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.

Avec $A = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, on en déduit que

$\cos(\alpha) = 0,8$ et $\sin(\alpha) = 0,6$, d'où $\alpha = \cos^{-1}(0,8) = \sin^{-1}(0,6) \cong 36,87°$.

Ainsi, comme $O'(1;-3)$ est l'image de O par l'affinité ($\vec{OO'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$),

on en déduit que γ est une rotation de centre $(1;-3)$ et de $36,87°$.

Exercice 12.42

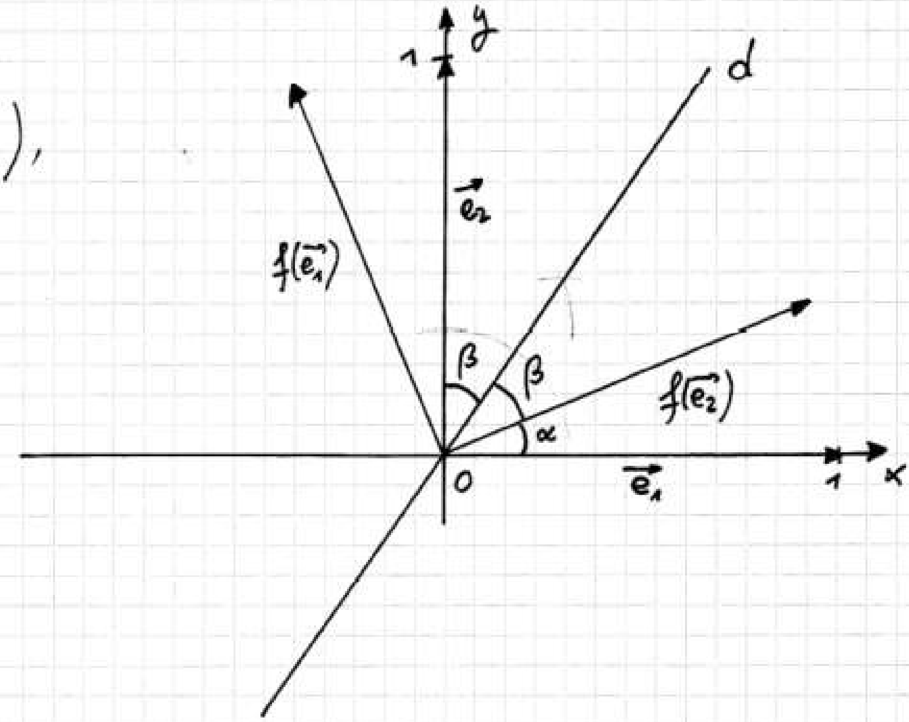
a. On a la situation suivante :

Comme $F = \begin{pmatrix} -5/13 & 12/13 \\ 12/13 & 5/13 \end{pmatrix}$,

on a $f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} -5/13 \\ 12/13 \end{pmatrix}$ et

$f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} 12/13 \\ 5/13 \end{pmatrix}$ dans la

base $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$



On constate que f est une symétrie axiale d'axe d, dont il faut trouver l'équation.

On a $\tan(\alpha) = \dfrac{5/13}{12/13} = \dfrac{5}{12} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{5}{12}\right)$.

En outre $\beta = \dfrac{90-\alpha}{2}$.

L'angle de d avec l'axe Ox est $\alpha+\beta = \alpha + \dfrac{90-\alpha}{2} = \dfrac{\alpha+90}{2}$.

Ainsi la pente de d est $\tan(\alpha+\beta) = \tan\left(\dfrac{\alpha+90}{2}\right) = \tan\left(\dfrac{\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)+90}{2}\right) = \dfrac{3}{2}$.

On a ainsi d: $y = \dfrac{3}{2}x$.

Par conséquent, f est la symétrie axiale d'axe d: $y = \dfrac{3}{2}x$.

b. La matrice de la transformation correspondant à une symétrie d'axe $y=x$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $G = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de la transformation g.

On doit avoir $G.F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5/13 & 12/13 \\ 12/13 & 5/13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{5}{13}a + \frac{12}{13}c = 0 \\ \frac{12}{13}a + \frac{5}{13}c = 1 \\ -\frac{5}{13}b + \frac{12}{13}c = 1 \\ \frac{12}{13}b + \frac{5}{13}d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5a+12c = 0 \Rightarrow a = \frac{12}{5}c \\ 12a+5c = 13 \Rightarrow 12\cdot\frac{12}{5}c + 5c = 13 \Rightarrow c = \frac{5}{13} \Rightarrow a = \frac{12}{13} \\ -5b+12c = 13 \Rightarrow -5b + 12\cdot\left(-\frac{12}{5}b\right) = 13 \Rightarrow b = -\frac{5}{13} \Rightarrow d = \frac{12}{13}. \\ 12b+5d = 0 \Rightarrow d = -\frac{12}{5}b \end{cases}$$

Ainsi, la matrice de la transformation g est $G = \begin{pmatrix} 12/13 & 5/13 \\ -5/13 & 12/13 \end{pmatrix}$.

c. La matrice d'une rotation de centre O et d'angle α est donnée par

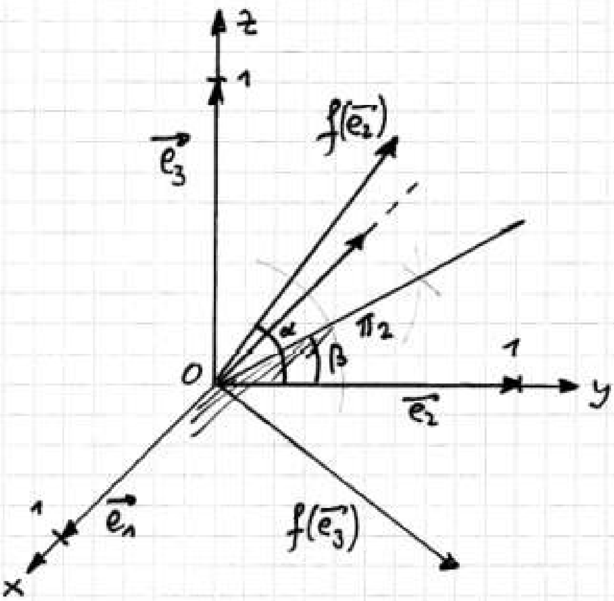
$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

En prenant α tel que $\cos(\alpha) = \frac{12}{13}$ et $\sin(\alpha) = -\frac{5}{13}$, autrement dit $\alpha = -22{,}62^\circ$,

on conclut que la transformation g est une rotation de centre O et d'angle $-22{,}62^\circ$.

Exercice 12.43

a. On a la situation suivante:
Soit f la transformation associée à la matrice A. Dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$, on a $f(\vec{e_1})=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $f(\vec{e_2})=\begin{pmatrix}0\\3/5\\4/5\end{pmatrix}$ et $f(\vec{e_3})=\begin{pmatrix}0\\4/5\\-3/5\end{pmatrix}$.



On voit que A est la composition d'une symétrie de plan $\Pi_1: x=0$ et d'une deuxième symétrie de plan Π_2.
Le plan Π_2 contient l'axe Ox.
On a $\tan(\alpha)=\frac{4/5}{3/5}=\frac{4}{3} \Rightarrow \alpha=\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$.

Ainsi $\beta=\frac{1}{2}\alpha=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$.
Ainsi le plan Π_2 est incliné d'un angle β par rapport au sol.
On en conclut que l'équation de Π_2 est: $z=\tan(\beta)y=\tan\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right)y=$
$=\frac{1}{2}$.

Ainsi A est la composition d'une symétrie de plan $\Pi_1: x=0$ et d'une symétrie de plan $\Pi_2: z=\frac{1}{2}y$.

b. La matrice de la symétrie de plan $\Pi_1: x=0$ est donné par $C=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

On doit avoir $B\cdot C=A$.

En posant $B=\begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{pmatrix}$, on doit avoir $\begin{pmatrix}a&d&g\\b&e&h\\c&f&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3/5&4/5\\0&4/5&-3/5\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-a&d&g\\-b&e&h\\-c&f&i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&3/5&4/5\\0&4/5&-3/5\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=0,\ e=\frac{3}{5},\ f=\frac{4}{5},\ g=0,\ h=\frac{4}{5},\ i=-\frac{3}{5}$.

On a ainsi $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\0&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$, ce qui est bien la symétrie de plan $\Pi_2: z=\frac{1}{2}y$ (voir ci-dessus).

Exercice 12.44

On a la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

a. On a $B = \begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 & 8/9 \\ 8/9 & 4/9 & 1/9 \\ -4/9 & 7/9 & 4/9 \end{pmatrix}$. Si B est la matrice d'une transformation g,

on a $g(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 8/9 \\ -4/9 \end{pmatrix}$, $g(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} -4/9 \\ 4/9 \\ 7/9 \end{pmatrix}$ et $g(\vec{e_3}) = \begin{pmatrix} 8/9 \\ 1/9 \\ 4/9 \end{pmatrix}$.

Pour montrer que la matrice B est orthogonale, il suffit de montrer que

1) $g(\vec{e_1})\cdot g(\vec{e_1}) = g(\vec{e_2})\cdot g(\vec{e_2}) = g(\vec{e_3})\cdot g(\vec{e_3}) = \vec{e_1}\cdot\vec{e_1} = \vec{e_2}\cdot\vec{e_2} = \vec{e_3}\cdot\vec{e_3} = 1$ et

2) $g(\vec{e_1})\cdot g(\vec{e_2}) = g(\vec{e_1})\cdot g(\vec{e_3}) = g(\vec{e_2})\cdot g(\vec{e_3}) = \vec{e_1}\cdot\vec{e_2} = \vec{e_1}\cdot\vec{e_3} = \vec{e_2}\cdot\vec{e_3} = 0$.

1) On a $g(\vec{e_1})\cdot g(\vec{e_1}) = \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right) = 1$,

$g(\vec{e_2})\cdot g(\vec{e_2}) = \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{7}{9}\right)^2 = 1$,

$g(\vec{e_3})\cdot g(\vec{e_3}) = \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 = 1$,

$g(\vec{e_1})\cdot g(\vec{e_2}) = -\frac{4}{81} + \frac{32}{81} - \frac{28}{81} = 0$,

$g(\vec{e_1})\cdot g(\vec{e_3}) = \frac{8}{81} + \frac{8}{81} - \frac{16}{81} = 0$ et

$g(\vec{e_2})\cdot g(\vec{e_3}) = -\frac{32}{81} + \frac{4}{81} + \frac{28}{81} = 0$.

Ainsi la matrice B est bien orthogonale.

L'inverse d'une matrice orthogonale étant sa transposée, on a :

$$B^{-1} = {}^tB = {}^t\begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 & 8/9 \\ 8/9 & 4/9 & 1/9 \\ -4/9 & 7/9 & 4/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 & 8/9 & -4/9 \\ -4/9 & 4/9 & 7/9 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Finalement, comme $A = 9B$, on a $A^{-1} = (9B)^{-1} = 9^{-1}\cdot B^{-1} =$

$$= \frac{1}{9}\cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/81 & 8/81 & -4/81 \\ -4/81 & 4/81 & 7/81 \\ 8/81 & 1/81 & 4/81 \end{pmatrix}.$$

b. On sait que les valeurs propres d'une matrice orthogonales sont $\lambda_1 = 1$ ou $\lambda_2 = -1$.

$\lambda_1 = 1$: on a $B\vec{v} = \lambda_1\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 & 8/9 \\ 8/9 & 4/9 & 1/9 \\ -4/9 & 7/9 & 4/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{9}v_1 - \frac{4}{9}v_2 + \frac{8}{9}v_3 = v_1 \\ \frac{8}{9}v_1 + \frac{4}{9}v_2 + \frac{1}{9}v_3 = v_2 \\ -\frac{4}{9}v_1 + \frac{7}{9}v_2 + \frac{4}{9}v_3 = v_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 - 4v_2 + 8v_3 = 9v_1 \\ 8v_1 + 4v_2 + v_3 = 9v_2 \\ -4v_1 + 7v_2 + 4v_3 = 9v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8v_1 - 4v_2 + 8v_3 = 0 & (1) \\ 8v_1 - 5v_2 + v_3 = 0 & (2) \\ -4v_1 + 7v_2 - 5v_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ①+② \Rightarrow -9v_2+9v_3=0 \Rightarrow v_2=v_3 \\ ②+2③ \Rightarrow 9v_2-9v_3=0 \Rightarrow v_2=v_3 \\ ② \Rightarrow 8v_1 = 5v_2-v_3 = 5v_2-v_2 = 4v_2 \Rightarrow v_2 = 2v_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 2v_1 \\ 2v_1 \end{pmatrix};$$

ainsi, en prenant $v_1=1$, le vecteur propre associé à $\lambda_1=1$ est $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2=-1$: on a $B\vec{v}=\lambda_2\vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 & 8/9 \\ 8/9 & 4/9 & 1/9 \\ -4/9 & 7/9 & 4/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{9}v_1-\frac{4}{9}v_2+\frac{8}{9}v_3=-v_1 \\ \frac{8}{9}v_1+\frac{4}{9}v_2+\frac{1}{9}v_3=-v_2 \\ -\frac{4}{9}v_1+\frac{7}{9}v_2+\frac{4}{9}v_3=-v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1-4v_2+8v_3=-9v_1 \\ 8v_1+4v_2+v_3=-9v_2 \\ -4v_1+7v_2+4v_3=-9v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10v_1-4v_2+8v_3=0 & ① \\ 8v_1+13v_2+v_3=0 & ② \\ -4v_1+7v_2+13v_3=0 & ③ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\cdot①-5\cdot② \Rightarrow -81v_2+27v_3=0 \Rightarrow v_3=3v_2 \\ ②+2\cdot③ \Rightarrow 27v_2+27v_3=0 \Rightarrow v_3=-v_2 \\ ② \Rightarrow 8v_1=-13v_2+v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1=0 \\ v_2=0 \\ v_3=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

ainsi, le vecteur propre associé à $\lambda_2=-1$ est $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Par conséquent, les valeurs propres de B sont $\lambda_1=1$ et $\lambda_2=-1$ et les vecteurs propres associés respectivement $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si λ est une valeur propre de B et $\vec{v}$ son vecteur associé, on a $B\vec{v}=\lambda\vec{v}$.
Comme $B=\frac{1}{9}A$, on obtient $\frac{1}{9}A\vec{v}=\lambda\vec{v} \Rightarrow A\vec{v}=9\lambda\vec{v}$.
Ainsi 9λ est alors une valeur propre de A avec $\vec{v}$ son vecteur associé.

Par conséquent, les valeurs propres de A sont $\lambda_1=9$ et $\lambda_2=-9$ et les vecteurs propres associés respectivement $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c. B a la valeur propre $\lambda_1=1$ et le vecteur propre associé $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le vecteur propre unité associé à λ_1 et $\vec{v_1}$ est alors $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

On va exprimer B dans la base $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$ où $\vec{u_2}$ et $\vec{u_3}$ sont des vecteurs unités perpendiculaires entre eux et avec $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

On choisit $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ $(\|\vec{u_2}\|=1$ et $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0)$ et $\vec{u_3}=\vec{u_1}\times\vec{u_2}=$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\cdot 0-\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{5}}) \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{3}\cdot 0 \\ \frac{1}{3}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{5}})-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3\sqrt{5} \\ 4/3\sqrt{5} \\ -5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

(on a bien $\|\vec{u_3}\|=1$ et $\vec{u_3}\perp\vec{u_1}$ et $\vec{u_3}\perp\vec{u_2}$).

La matrice de passage P de la base $(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3})$ à la base standard est donnée par:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} \\ 2/3 & -1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 0 & -5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Comme, par définition, P est une matrice orthogonale, son inverse est sa transposée :

on a $P^{-1} = {}^tP = {}^t\begin{pmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} \\ 2/3 & -1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 0 & -5/3\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 2/3\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & -5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Dans la base $(\vec{u_1} ; \vec{u_2} ; \vec{u_3})$, la matrice B s'écrit : $B' = P^{-1}BP$.

On a $BP = \begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 & 8/9 \\ 8/9 & 4/9 & 1/9 \\ -4/9 & 7/9 & 4/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} \\ 2/3 & -1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 0 & -5/3\sqrt{5} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/3 & 4/3\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 2/3 & -5/3\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi $B' = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 2/3\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & -5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/3 & 4/3\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 2/3 & -5/3\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u_1} ; \vec{u_2} ; \vec{u_3})$

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ avec $\alpha = 90°$.

Ainsi B' représente une rotation de centre O et de 90° dans le plan perpendiculaire à $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} /\!/ \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dans la base standard, le plan s'écrit $x + 2y + 2z = 0$.

Par conséquent, B est la matrice d'une rotation de centre O et de 90° dans le plan $x + 2y + 2z = 0$.

Comme $A = 9B = 9IB = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 & 8/9 \\ 8/9 & 4/9 & 1/9 \\ -4/9 & 7/9 & 4/9 \end{pmatrix}$, on en déduit

que A est la composition d'une rotation de centre O et de 90° dans le plan $x + 2y + 2z = 0$, suivie d'une homothétie de centre O et de facteur 9.

Exercice 12.45

On a $f(\vec{u_1}) = \vec{u_2} + \vec{u_3}$, $f(\vec{u_2}) = \vec{u_1} + \vec{u_3}$ et $f(\vec{u_3}) = \vec{u_1} + \vec{u_2}$.

La matrice associée à f est donc $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Commençons par chercher les valeurs propres de F, autrement dit les λ solutions de $\det(F - \lambda I) = 0$.

On a $\det(F-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda + 2.$

Ainsi $\det(F - \lambda I) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$.

$\lambda_1 = 2$ est une solution de cette équation $(-8+6+2=0)$.

Divisons $-\lambda^3 + 3\lambda + 2$ par $\lambda - 2$:

$$\begin{array}{r|l} -\lambda^3 + 3\lambda + 2 & \lambda - 2 \\ \hline -(-\lambda^3 + 2\lambda^2) & -\lambda^2 - 2\lambda - 1 \\ -2\lambda^2 + 3\lambda + 2 & \\ -(-2\lambda^2 + 4\lambda) & \\ -\lambda + 2 & \\ -(-\lambda + 2) & \\ 0 & \end{array}$$

Ainsi, on a $-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 - 2\lambda - 1) = -(\lambda-2)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$.

Les solutions de $-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$ sont donc $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$ (racine double).

Avec $\lambda_1 = 2$, on a $F\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_1 \\ 2v_2 \\ 2v_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 + v_3 = 2v_1 \\ v_1 + v_3 = 2v_2 \\ v_1 + v_2 = 2v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2v_1 + v_2 + v_3 = 0 & (1) \\ v_1 - 2v_2 + v_3 = 0 & (2) \\ v_1 + v_2 - 2v_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) - (2) \Rightarrow -3v_1 + 3v_2 = 0 \\ 2(1) + (3) \Rightarrow -3v_1 + 3v_2 = 0 \\ (1) \Rightarrow v_3 = 2v_1 - v_2 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow v_1 = v_2 \\ \\ \Rightarrow v_3 = 2v_1 - v_1 = v_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = v_1 \\ v_2 = v_1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 \\ v_1 \end{pmatrix};$$

avec $v_1 = 1$, le vecteur propre associé à $\lambda_1 = 2$ est $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avec $\lambda_2 = -1$, on a $F\vec{v} = \lambda_2 \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_2 + v_3 = -v_1 \\ v_1 + v_3 = -v_2 \\ v_1 + v_2 = -v_3 \end{cases} \Rightarrow v_1 + v_2 + v_3 = 0\ ;$$ comme on veut une base orthonormée,

il faut choisir de 2 manières v_1, v_2 et v_3 telles que $\vec{v_2} \perp \vec{v_1}$ et $\vec{v_3} \perp \vec{v_1}$, $\vec{v_3} \perp \vec{v_2}$.

On peut choisir $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (on a bien $1+(-1)+0=0$) et

$$\vec{v_3} = \vec{v_1} \times \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 1\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 - 1\cdot 0 \\ 1\cdot(-1) - 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (\text{on a bien } 1+1+(-2)=0).$$

Comme $\vec{v_3} = \vec{v_1} \times \vec{v_2}$, cela nous assure que la base $(\vec{v_1}; \vec{v_2}; \vec{v_3})$ est directe.

Reste à la rendre orthonormée.

On a $\|\vec{v_1}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v_2}\| = \sqrt{2}$ et $\|\vec{v_3}\| = \sqrt{6}$.

On peut donc prendre la base $(\vec{p_1}; \vec{p_2}; \vec{p_3})$, où $\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\vec{p_2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{p_3} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$. Cette base est bien orthonormée directe et elle est bien formée de vecteurs propres de f.

b. La transformation $\vec{u_i}$ en $\vec{p_i}$ $(i = 1,2,3)$ a pour matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Par définition, c'est une matrice orthogonale ($(\vec{p_1}; \vec{p_2}; \vec{p_3})$ forment une base orthonormée).

Ses valeurs propres ne peuvent donc prendre que les valeurs -1 et 1.

$\lambda = -1$: on a $P\vec{v} = \lambda\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}v_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}v_3 = -v_1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}v_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}v_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}v_3 = -v_2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}v_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}v_3 = -v_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}v_1 + \sqrt{3}v_2 + v_3 = -\sqrt{6}v_1 \\ \sqrt{2}v_1 - \sqrt{3}v_2 + v_3 = -\sqrt{6}v_2 \\ \sqrt{2}v_1 - 2v_3 = -\sqrt{6}v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}+\sqrt{6})v_1 + \sqrt{3}v_2 + v_3 = 0 \\ \sqrt{2}v_1 + (\sqrt{6}-\sqrt{3})v_2 + v_3 = 0 \\ \sqrt{2}v_1 = (2-\sqrt{6})v_3 \Rightarrow v_1 = \frac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}v_3 \\ \qquad = (\sqrt{2}-\sqrt{3})v_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{3})v_3 + \sqrt{3}v_2 + v_3 = 0 \\ \sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3})v_3 + (\sqrt{6}-\sqrt{3})v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 = (\sqrt{2}-\sqrt{3})v_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3-\sqrt{6}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2})v_3 + \sqrt{3}v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{-3+\sqrt{6}-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}v_3 \\ \qquad = (-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2+\sqrt{6})v_3 \\ (3-\sqrt{6})v_3 + (\sqrt{6}-\sqrt{3})v_2 = 0 \\ v_1 = (\sqrt{2}-\sqrt{3})v_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3-\sqrt{6})v_3 + (\sqrt{6}-\sqrt{3})(-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2+\sqrt{6})v_3 = 0 \Rightarrow \underbrace{(-4\sqrt{6}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}+12)}_{\neq 0}v_3 = 0 \\ v_1 = (\sqrt{2}-\sqrt{3})v_3 \\ v_2 = (-\sqrt{3}+\sqrt{2}+2-\sqrt{6})v_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow v_3 = 0$, puis $v_1 = v_2 = 0$.

Ainsi $\lambda = -1$ n'est pas valeur propre de P.

$\lambda=1$: on a $P\vec{v}=\lambda\vec{v} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}v_1+\frac{1}{\sqrt{2}}v_2+\frac{1}{\sqrt{6}}v_3=v_1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}v_1-\frac{1}{\sqrt{2}}v_2+\frac{1}{\sqrt{6}}v_3=v_2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}v_1-\frac{2}{\sqrt{6}}v_3=v_3 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}v_1+\sqrt{3}v_2+v_3=\sqrt{6}v_1 \\ \sqrt{2}v_1-\sqrt{3}v_2+v_3=\sqrt{6}v_2 \\ \sqrt{2}v_1-2v_3=\sqrt{6}v_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}-\sqrt{6})v_1+\sqrt{3}v_2+v_3=0 \\ \sqrt{2}v_1-(\sqrt{3}+\sqrt{6})v_2+v_3=0 \\ \sqrt{2}v_1=(2+\sqrt{6})v_3 \rightarrow v_1=\frac{2+\sqrt{6}}{\sqrt{2}}v_3 = \\ \qquad = (\sqrt{2}+\sqrt{3})v_3 \end{cases}$$

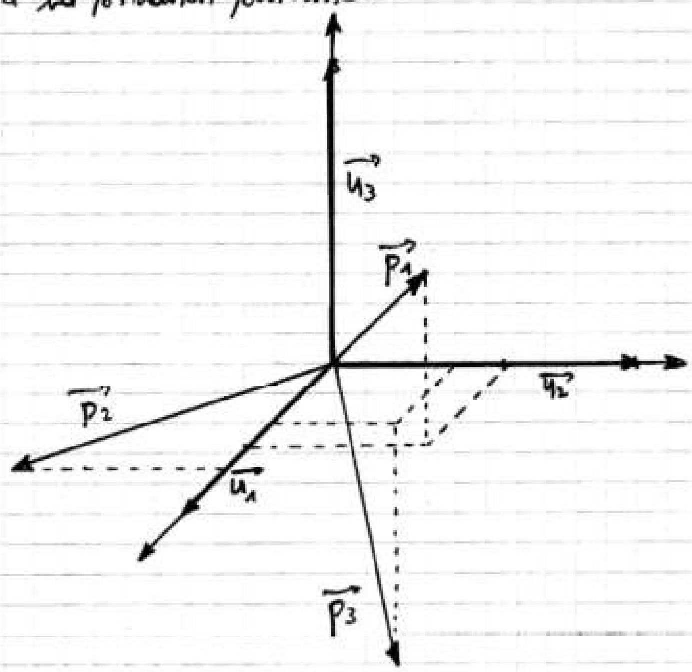
$$\Longrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3})v_3+\sqrt{3}v_2+v_3=0 \\ \sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})v_3-(\sqrt{3}+\sqrt{6})v_2+v_3=0 \\ v_1=(\sqrt{2}+\sqrt{3})v_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (3+\sqrt{6}-2\sqrt{3}-3\sqrt{2})v_3+\sqrt{3}v_2 \Rightarrow v_2=\frac{-3-\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}v_3 = \\ (3+\sqrt{6})v_3-(\sqrt{3}+\sqrt{6})v_2=0 \qquad = (-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2+\sqrt{6})v_3 \\ v_1=(\sqrt{2}+\sqrt{3})v_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (3+\sqrt{6})v_3-(\sqrt{3}+\sqrt{6})(-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2+\sqrt{6})v_3=0 \\ v_1=(\sqrt{2}+\sqrt{3})v_3 \\ v_2=(-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2+\sqrt{6})v_3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0=0 \\ v_1=(\sqrt{2}+\sqrt{3})v_3 \\ v_2=(-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2+\sqrt{6})v_3. \end{cases}$$

En choisissant $v_3=1$, le vecteur propre associé à $\lambda=1$ est $\vec{v}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2} \\ 1\end{pmatrix}$.

On en déduit que P est soit une rotation autour de $\vec{v}$, soit une symétrie planaire. Or, on a la situation suivante :



Ainsi P ne peut pas être une symétrie planaire.
Par conséquent, la transformation qui envoie $\vec{u_i}$ sur $\vec{p_i}$ $(i=1,2,3)$ est bien une rotation.
Sa matrice est $P=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$ et son axe est $\vec{v}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2} \\ 1\end{pmatrix}$.

Exercice 12.46

On a $i : \vec{v} \to \vec{v}$, $f : \vec{v} \to \vec{u} \times \vec{v}$, $g : \vec{v} \to (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u}$ et
$h = i - g : \vec{v} \to \vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u}$.

a. Pour montrer qu'une fonction k est linéaire, il suffit de montrer :

1) $k(\vec{0}) = \vec{0}$;
2) $k(\vec{v}+\vec{w}) = k(\vec{v}) + k(\vec{w})$;
3) $k(\lambda\vec{v}) = \lambda\cdot k(\vec{v})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$i : \vec{v} \to \vec{v}$:
1) $i(\vec{0}) = \vec{0}$;
2) $i(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{v}+\vec{w} = i(\vec{v}) + i(\vec{w})$;
3) $i(\lambda\vec{v}) = \lambda\cdot\vec{v} = \lambda\cdot i(\vec{v})$

$\to$ i est linéaire.

$f : \vec{v} \to \vec{u}\times\vec{v}$:
1) $f(\vec{0}) = \vec{u}\times\vec{0} = \vec{0}$;
2) $f(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w} =$
$= f(\vec{v}) + f(\vec{w})$;
3) $f(\lambda\vec{v}) = \vec{u}\times(\lambda\vec{v}) = \lambda\cdot\vec{u}\times\vec{v} = \lambda f(\vec{v})$

$\to$ f est linéaire.

$g : \vec{v} \to (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u}$:
1) $g(\vec{0}) = (\vec{u}\cdot\vec{0})\vec{u} = 0\cdot\vec{u} = \vec{0}$;
2) $g(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}))\vec{u} =$
$= (\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w})\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{u} =$
$= g(\vec{v}) + g(\vec{w})$;
3) $g(\lambda\vec{v}) = (\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}))\vec{u} = (\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}))\vec{u} =$
$= \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u} = \lambda g(\vec{v})$

$\Rightarrow$ g est linéaire.

$h = i - g$: on utilise le fait que i et g sont linéaires :
1) $h(\vec{0}) = (i-g)(\vec{0}) = i(\vec{0}) - g(\vec{0}) = \vec{0} - \vec{0} = \vec{0}$;
2) $h(\vec{v}+\vec{w}) = (i-g)(\vec{v}+\vec{w}) = i(\vec{v}+\vec{w}) - g(\vec{v}+\vec{w}) =$
$= i(\vec{v}) - g(\vec{v}) + i(\vec{w}) - g(\vec{w}) = (i-g)(\vec{v}) + (i-g)(\vec{w}) =$
$= h(\vec{v}) + h(\vec{w})$;
3) $h(\lambda\vec{v}) = (i-g)(\lambda\vec{v}) = i(\lambda\vec{v}) - g(\lambda\vec{v}) = \lambda i(\vec{v}) - \lambda g(\vec{v}) =$
$= \lambda(i(\vec{v}) - g(\vec{v})) = \lambda(i-g)(\vec{v}) = \lambda h(\vec{v})$

$\Rightarrow$ h est linéaire.

b. On a $\vec{u} = a\vec{u_1} + b\vec{u_2} + c\vec{u_3} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Matrice F de f : on a $f(\vec{u_1}) = \vec{u} \times \vec{u_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\cdot 0 - c\cdot 0 \\ c\cdot 1 - a\cdot 0 \\ a\cdot 0 - b\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}$;

$f(\vec{u_2}) = \vec{u} \times \vec{u_2} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\cdot 0 - c\cdot 1 \\ c\cdot 0 - a\cdot 0 \\ a\cdot 1 - b\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$;

$f(\vec{u_3}) = \vec{u} \times \vec{u_3} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\cdot 1 - c\cdot 0 \\ c\cdot 0 - a\cdot 1 \\ a\cdot 0 - b\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$;

ainsi $F = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.

Matrice G de g : on a $g(\vec{u_1}) = (\vec{u} \cdot \vec{u_1})\vec{u} = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ ab \\ ac \end{pmatrix}$;

$g(\vec{u_2}) = (\vec{u} \cdot \vec{u_2})\vec{u} = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab \\ b^2 \\ bc \end{pmatrix}$;

$g(\vec{u_3}) = (\vec{u} \cdot \vec{u_3})\vec{u} = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ bc \\ c^2 \end{pmatrix}$;

ainsi $G = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.

Matrice H de $h = i - g$: on a $H = I - G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1-a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1-b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1-c^2 \end{pmatrix}$.

c. On a $F \cdot F = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -c^2-b^2 & ab & ac \\ ab & -c^2-a^2 & bc \\ ac & bc & -b^2-a^2 \end{pmatrix}$.

Comme $a^2+b^2+c^2=1$, on a $a^2-1=-b^2-c^2$, $b^2-1=-a^2-c^2$ et $c^2-1=-b^2-a^2$.

On a ainsi $F \cdot F = \begin{pmatrix} a^2-1 & ab & ac \\ ab & b^2-1 & bc \\ ac & bc & c^2-1 \end{pmatrix} = -H$.

On a donc bien $f \circ f = -h$.

d. On a $g(\vec{u}) = G\vec{u} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3+ab^2+ac^2 \\ a^2b+b^3+b^2c \\ a^2c+b^2c+c^3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} a(a^2+b^2+c^2) \\ b(a^2+b^2+c^2) \\ c(a^2+b^2+c^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{u}$ (puisque $a^2+b^2+c^2=1$).

Ainsi $g(\vec{u}) = \vec{u}$.

Soit $\vec{u}' = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$. $\vec{u}'$ est perpendiculaire à $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On a $g(\vec{u}') = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2b - a^2b \\ ab^2 - ab^2 \\ abc - abc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Soit $\vec{u}'' = \vec{u} \times \vec{u}'$. $\vec{u}''$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{u}'$.

On a $\vec{u}'' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \cdot 0 - c \cdot (-a) \\ c \cdot b - a \cdot 0 \\ -a^2 - b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ bc \\ -a^2 - b^2 \end{pmatrix}$ et

$$g(\vec{u}'') = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ac \\ bc \\ -a^2-b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3c + ab^2c - a^3c - ab^2c \\ a^2bc + b^3c - a^2bc - b^3c \\ a^2c^2 + b^2c^2 - a^2c^2 - b^2c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Comme tout vecteur orthogonal à $\vec{u}$ sera combinaison linéaire de $\vec{u}'$ et $\vec{u}''$, on en conclut que son image par g sera nulle.

De plus $h(\vec{u}) = (i - g)(\vec{u}) = i(\vec{u}) - g(\vec{u}) = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$.

Soit $\vec{v} = \alpha \vec{u}' + \beta \vec{u}''$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

On a $h(\vec{v}) = h(\alpha \vec{u}' + \beta \vec{u}'') = h(\alpha \vec{u}') + h(\beta \vec{u}'') = \alpha h(\vec{u}') + \beta h(\vec{u}'')$ puisque h est linéaire.

De plus $h(\vec{u}') = (i-g)(\vec{u}') = i(\vec{u}') - g(\vec{u}') = \vec{u}' - \vec{0} = \vec{u}'$ et
$h(\vec{u}'') = (i-g)(\vec{u}'') = i(\vec{u}'') - g(\vec{u}'') = \vec{u}'' - \vec{0} = \vec{u}''$.

Ainsi $h(\vec{v}) = \alpha \vec{u}' + \beta \vec{u}'' = \vec{v}$.

En résumé, on a : $g(\vec{u}) = \vec{u}$ et $g(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout $\vec{v} \perp \vec{u}$
et $h(\vec{u}) = \vec{0}$ et $h(\vec{v}) = \vec{v}$ pour tout $\vec{v} \perp \vec{u}$.

e. Comme $g(\vec{u}) = \vec{u}$ et $g(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout $\vec{v} \perp \vec{u}$, on en déduit que g est la projection sur l'axe $\vec{u}$.

Comme $h(\vec{u}) = \vec{0}$ et $h(\vec{v}) = \vec{v}$ pour tout $\vec{v} \perp \vec{u}$, on en déduit que h est la projection sur le plan perpendiculaire à $\vec{u}$ et passant par l'origine, à savoir le plan $ax + by + cz = 0$ avec $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Comme g est la projection sur l'axe $\vec{u}$, on a clairement $g * g = h$.
Comme h est la projection sur le plan $ax + by + cz = 0$, on a clairement $h * h = h$.

Si on projette successivement sur l'axe $\vec{u}$, puis sur le plan perpendiculaire à $\vec{u}$ et passant par l'origine, on obtient $\vec{0}$.
Ainsi $h * g = 0$.