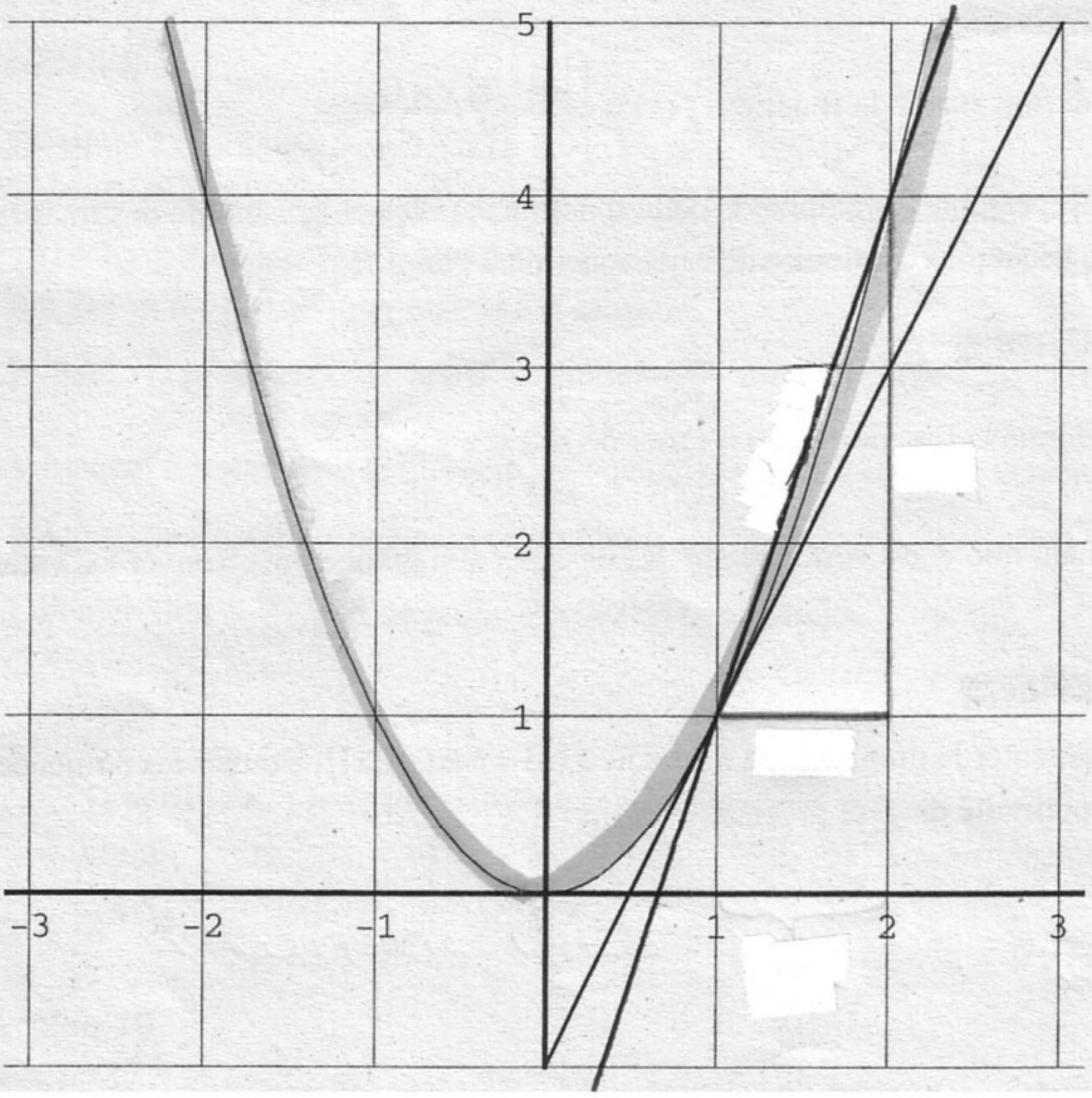
Lycée Denis-de-Rougemont

Mathématiques de niveau 1

Degré 11

ANALYSE

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}$$



Exercice 1

a) Représenter le graphe de la fonction $y = x + [x]$ et préciser l'ensemble des images.

Rappel : $[x]$ est appelé partie entière de x, c'est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.

b) En quelles valeurs de x la fonction y est-elle discontinue ?

Exercice 2

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

a) Représenter le graphe de cette fonction et préciser l'ensemble des images.

b) Discuter la continuité de cette fonction à l'origine.

Exercice 3

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0.5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

a) Représenter le graphe de cette fonction et préciser l'ensemble des images.

b) Discuter la continuité de cette fonction à l'origine.

Exercice 4

On donne la fonction $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 3 \\ ax + b & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \\ -x & \text{si } x > 5 \end{cases}$.

Sachant que f est continue sur $\mathbb{R}$, dessiner son graphe puis trouver les valeurs de a et b.

Exercice 5

Représenter le graphe de la fonction $f(x) = \cos(\pi \cdot [x])$, trouver les points de discontinuité de f et préciser $f(\mathbb{R})$.

Exercice 6

On donne la fonction $f: \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto y = \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} \end{array}$

a) Trouver son domaine de définition D, représenter le graphe de cette fonction et préciser l'ensemble des images.

b) Étudier le comportement de f au voisinage du point où elle n'est pas définie.

Exercice 7

Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes puis étudier leur comportement au voisinage des points où elles ne sont pas définies.

a) $y = \dfrac{x^2-5x+3}{2x-6}$ b) $y = \dfrac{4x-3}{x^2-4}$ c) $y = \dfrac{x^2-x-12}{x^2+2x-3}$

Exercice 8

a) Dessiner la parabole d'équation $y = f(x) = x^2$.

b) On considère sur la parabole le point fixe $P(1;1)$ et le point courant $Q(1+\Delta x; y)$. Calculer la pente de la sécante PQ pour $\Delta x = 1$, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1 et 0.01 . Dessiner une de ces sécantes.

Rappel : la pente est donnée par le quotient $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ où $\Delta y = f(1+\Delta x) - f(1)$.

c) Vers quel nombre tend le quotient $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ quand $\Delta x \to 0$? Prouver le résultat et interpréter géométriquement ce nombre.

d) Calculer $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ en un point $P(x;y)$ de la parabole.

Exercice 9

Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

a) $y = 2x+5$ b) $y = ax+b$ c) $y = c$ (constante)

d) $y = 3x^2-4x+7$ e) $y = ax^2+bx+c$ f) $y = x^3$

Exercice 10

On considère la fonction $y = |x|$. Calculer $\lim\limits_{\Delta x \xrightarrow{<} 0} \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ et $\lim\limits_{\Delta x \xrightarrow{>} 0} \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ en $x = 0$. Constatation ?

Exercice 11

On a vu que la fonction $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\le 0 \\ x & \text{si } x>0 \end{cases}$ était continue à l'origine. Est elle également dérivable ?

Exercice 12

On donne la fonction $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x-\frac{22}{3}$. Représenter le graphe de f après avoir trouvé ses points à tangente horizontale ainsi que ses points d'intersection avec les axes de référence.
Indication : $f(-2)=0$.

Exercice 13

Trouver une équation de la tangente à la parabole d'équation $y=-2x^2+4x+6$ en son point d'abscisse 2, puis dessiner la parabole et la tangente, après avoir trouvé le sommet de la parabole.

Exercice 14

Trouver la valeur des coefficients b et c de la fonction $f(x)=x^2+bx+c$ sachant que le graphe de f admet comme tangente en son point d'abscisse 4 la droite $t:5x-y-10=0$.

Exercice 15

Calculer la dérivée de la fonction $y=\frac{1}{x}$.

Exercice 16

Calculer la dérivée de la fonction $y=\sin(x)$.

Indication : Employer la formule $\sin(p)-\sin(q)=2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

Exercice 17

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $y=\cos(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ b) $y=\sin^2(x)$ c) $y=\cos\left(x^2\right)$

d) $y=\sin(ax+b)$ e) $y=\frac{1}{x^2+3x}$ f) $y=\frac{2}{\sin(x)}$

Exercice 18

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $y = x \cdot \cos(x)$

b) $y = x^2 \cdot \sin(x)$

c) $y = \dfrac{3x+2}{x-4}$

d) $y = \tan(x)$

e) $y = \dfrac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$

f) $y = \sqrt{1-\cos(x)}$

g) $y = \cos(2x) \cdot \sin(x)$

h) $y = x \cdot \tan(x)$

i) $y = \dfrac{\cos(3x)}{1-x^2}$

Exercice 19

a) Montrer que le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{x-3}{x+4}$ ne possède aucun point à tangente horizontale.

b) Établir l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse 3.

c) Représenter finalement le graphe de f et la tangente.

Exercice 20

On donne la parabole d'équation $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

a) Dessiner la parabole après avoir calculé les coordonnées de son sommet.

b) Déterminer les points de la parabole en lesquels la tangente passe par l'origine, puis donner l'équation de la tangente en chacun des points.

c) Dessiner finalement les tangentes trouvées.

Exercice 21

Représenter le graphe de la fonction $y = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 4$ après avoir trouvé les points à tangente horizontale, les intervalles de croissance et de décroissance, ainsi que les zéros de cette fonction.

Exercice 22

Étudier le comportement asymptotique des fonctions suivantes :

a) $y = \dfrac{2x^2+5x+4}{x^2-2x}$

b) $y = \dfrac{x^2-4x+2}{x-2}$

c) $y = \dfrac{5x-2}{x^2-3}$

Exercice 23

Étudier la fonction $y = \dfrac{-3x^2+12}{(x+1)^2}$.

L'étude d'une fonction $y = f(x)$ comporte les points suivants :

1. Trouver le domaine de définition de f et dire si la fonction est paire, impaire ou encore périodique. Le cas échéant, prouver la propriété découverte.
2. Calculer les points d'intersection du graphe de f avec les axes de référence.
3. Faire le tableau des signes de f.
4. Étudier le comportement de f au voisinage des points où elle n'est pas définie.
5. Étudier le comportement asymptotique de f, sans oublier de chercher les points d'intersection du graphe de f avec ses éventuelles asymptotes.
6. Calculer la dérivée et chercher les points à tangente horizontale du graphe de f.
7. Faire le tableau des variations, qui n'est rien d'autre que le tableau des signes de f' duquel on déduit les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction.
8. Représenter le graphe de f après avoir calculé les coordonnées de quelques points autres que ceux déjà trouvés.

Exercice 24

Étudier la fonction $y = \dfrac{x^2-16}{2x+10}$.

Exercice 25

Étudier la fonction $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-4}$.

Exercice 26

Étudier la fonction $y = \dfrac{4x+12}{(x+2)^2}$.

Exercice 27

Étudier la fonction $y = \dfrac{8x-6}{x^2+1}$.

Exercice 28

Étudier la fonction $y = \dfrac{x^2+4}{2x}$.

Exercice 29

Étudier la fonction $y = \dfrac{x^3}{2x^2-8}$.

Exercice 30

Étudier la fonction $y = 3\sin(x) - 4\cos(x)$.

Exercice 31

Étudier la fonction $y = -3 + \sqrt{-x^2+8x+9}$.

Problèmes d'optimisation

Exercice 32

Parmi tous les rectangles de périmètre fixé L, quel est celui qui a l'aire maximale ?

Exercice 33

La somme de deux nombres réels positifs a et b vaut 20. Trouver la valeur de a et b dans les deux cas suivants :

a) $a^2 + b^2$ est minimal (et vaut ?) b) $a^2 \cdot b^3$ est maximal (et vaut ?)

Exercice 34

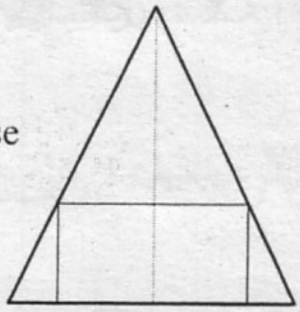
On dispose d'une corde de longueur égale à 1 mètre qu'on coupe en deux parties. Avec une partie on forme un carré et avec l'autre partie on forme un triangle équilatéral. Où faut-il couper la corde pour que l'aire totale des deux polygones ainsi formés soit maximale ? minimale ?

Exercice 35

On considère la parabole de sommet $S(0;4)$ et passant par $I(3;0)$ ainsi qu'un rectangle dont un des côtés est sur l'axe des abscisses et deux des sommets sur la parabole, au dessus de l'axe des abscisses. Trouver les dimensions du rectangle qui a l'aire maximale et calculer cette aire.

Exercice 36

Dans un triangle isocèle de base 6 et de hauteur 7, inscrire :



a) Un rectangle d'aire maximale.
b) Un rectangle engendrant dans sa rotation autour de la base un cylindre de volume maximal.
c) Un rectangle engendrant dans sa rotation autour de la hauteur un cylindre de volume maximal.

Remarque : Un des côtés du rectangle devra se situer sur la base.

Exercice 37

On considère une boîte sans couvercle de base carrée dont la contenance doit être de 108 cm^3. Trouver la valeur du côté de la base, ainsi que la hauteur de la boîte, de manière que la surface totale des 5 faces soit minimale.

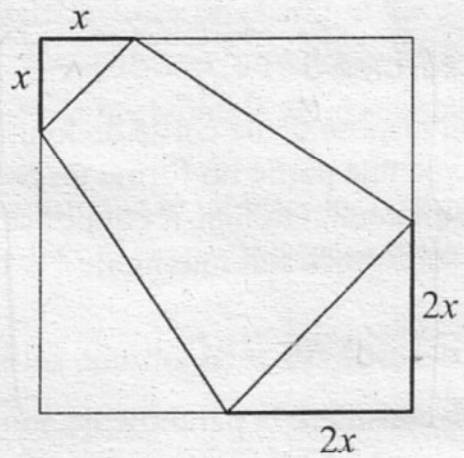
Exercice 38

Trouver les dimensions de la boîte de conserve dont le volume est égal à un litre et dont l'aire totale est minimale. On considérera que l'épaisseur de la boîte est nulle.

Exercice 39

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse vaut 10 centimètres et un des angles non droit est appelé x. Donner l'aire du triangle en fonction de x, puis déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire est maximale. Calculer finalement cette aire maximale.

Exercice 40



Trouver l'aire maximale du trapèze inscrit dans le carré ci-contre dont le côté mesure en réalité 12 centimètres.

Exercice 41

On donne la fonction $f(x) = \sin(2x)$ avec $x \in [0;\pi]$. Trouver les points du graphe de f en lesquels la pente de la tangente au graphe est maximale, ainsi que les points où la pente est minimale. Calculer la valeur de ces pentes puis esquisser le graphe de la fonction.