Exercice 1

$A(2;-1)$, $B(-1;3)$, $C(-2;-2)$.

La médiane passant par A, m_A, passe aussi par M_A, le milieu du segment BC.

On a $M_A = \left(\frac{-1+(-2)}{2} ; \frac{3+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

Un vecteur directeur de m_A est $\overrightarrow{M_A A} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM_A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2+\frac{3}{2} \\ -1-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Des équations paramétriques de m_A sont donc: $\begin{cases} x = 2+7\lambda \\ y = -1-3\lambda. \end{cases}$

La médiane passant par B, m_B, passe aussi par M_B, le milieu du segment AC.

On a $M_B = \left(\frac{2+(-2)}{2} ; \frac{-1+(-2)}{2}\right) = \left(0 ; -\frac{3}{2}\right)$.

Un vecteur directeur de m_B est $\overrightarrow{M_B B} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM_B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 3+\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Des équations paramétriques de m_B sont donc: $\begin{cases} x = -1-2\mu \\ y = 3+9\mu. \end{cases}$

La médiane passant par C, m_C, passe aussi par M_C, le milieu du segment AB.

On a $M_C = \left(\frac{2+(-1)}{2} ; \frac{-1+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} ; \frac{2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} ; 1\right)$.

Un vecteur directeur de m_C est $\overrightarrow{M_C C} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM_C} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -2-\frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ -3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Des équations paramétriques de m_C sont donc: $\begin{cases} x = -2-5\omega \\ y = -2-6\omega. \end{cases}$

On a: $m_A : \begin{cases} x = 2+7\lambda \\ y = -1-3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 6+21\lambda \\ 7y = -7-21\lambda \end{cases} \Rightarrow 3x+7y = -1.$

Ainsi <u>l'équation cartésienne de m_A est $3x+7y+1=0$.</u>

On a: $m_B : \begin{cases} x = -1-2\mu \\ y = 3+9\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x = -9-18\mu \\ 2y = 6+18\mu \end{cases} \Rightarrow 9x+2y = -3.$

Ainsi <u>l'équation cartésienne de m_B est $9x+2y+3=0$.</u>

On a: $m_C : \begin{cases} x = -2-5\omega \\ y = -2-6\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = -12-30\omega \\ -5y = 10+30\omega \end{cases} \Rightarrow 6x-5y = -2.$

Ainsi <u>l'équation cartésienne de m_C est $6x-5y+2=0$.</u>

Cherchons les coordonnées de K, intersection de m_A et m_B, et les coordonnées de L, intersection de m_A et m_C.

$$m_A : 3x+7y+1=0 \overset{\cdot 3}{\Longrightarrow} 9x+21y+3=0$$
$$m_B : 9x+2y+3=0 \overset{\cdot(-1)}{\Longrightarrow} \underline{-9x-2y-3=0} \; +$$
$$19y=0 \Rightarrow y=0 ;$$

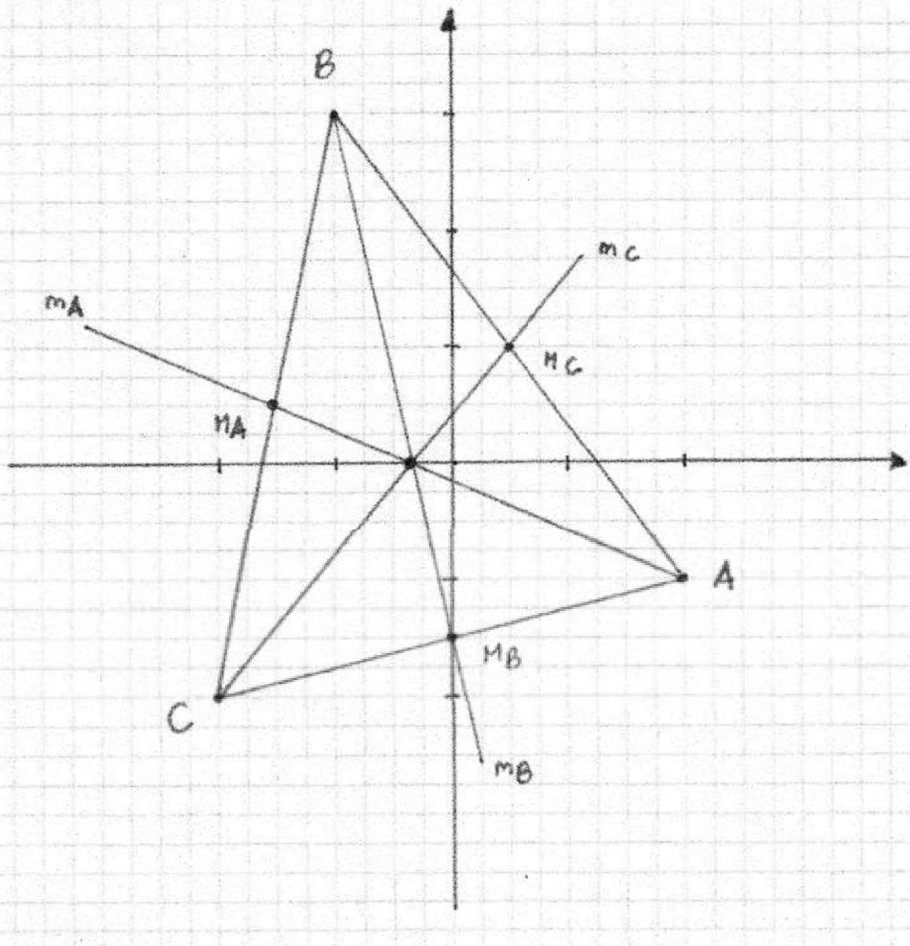
avec $y=0$, on a $3x+1=0$, i.e. $3x=-1$, i.e. $x=-\frac{1}{3}$;
ainsi $K\left(-\frac{1}{3} ; 0\right)$.

Cherchons les coordonnées de L :

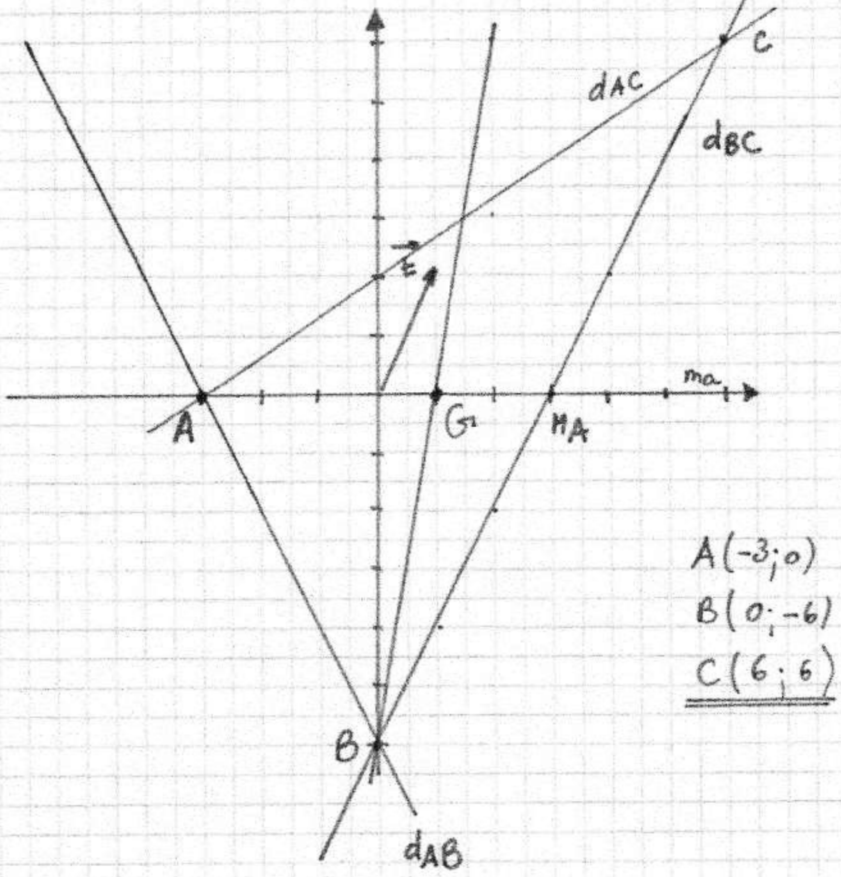
$$m_A : 3x+7y+1=0 \overset{\cdot 5}{\Longrightarrow} 15x+35y+5=0$$
$$m_C : 6x-5y+2=0 \overset{\cdot 7}{\Longrightarrow} \underline{42x-35y+14=0} \; +$$
$$57x+19=0 \Rightarrow 57x=-19 \Rightarrow x=-\frac{19}{57}=-\frac{1}{3} ;$$

avec $x=-\frac{1}{3}$, on a $3\left(-\frac{1}{3}\right)+7y+1=0$, i.e. $-1+7y+1=0$, i.e. $7y=0$, i.e. $y=0$;
ainsi $L\left(-\frac{1}{3} ; 0\right)$.

On a donc $K=L$, ce qui signifie que m_A, m_B et m_C ont un point commun : $\left(-\frac{1}{3} ; 0\right)$.



Exercice 2



A(-3;0)
B(0;-6)
C(6;6)

1. $d_{AB} : 2x+y+6=0$
3. L'ordonnée de A vaut O : $A(x;0)$ $\Big\} \Rightarrow 2x+6=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow \underline{\underline{A(-3;0)}}$

Si M_A est le milieu de BC, on sait que $\overrightarrow{GM_A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$ (le centre de gravité se trouve au $\frac{2}{3}$ du segment AM_A en partant de A).

On a : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{GM_A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{GM_A} = \overrightarrow{OM_A} - \overrightarrow{OG}$, on a $\overrightarrow{OM_A} - \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OM_A} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \overrightarrow{OG} =$

$= \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \Rightarrow M_A(3;0)$.

La droite d_{BC} passe par M_A et est parallèle à $\vec{t} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Des équations paramétriques de d_{BC} sont donc : $\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 2\lambda. \end{cases}$

B est l'intersection de d_{AB} et d_{BC}.

Par substitution des équations paramétriques de d_{BC} dans l'équation cartésienne de d_{AB}, on trouve : $2(3+\lambda) + 2\lambda + 6 = 0 \Rightarrow 6+2\lambda+2\lambda+6 = 0 \Rightarrow 4\lambda + 12 = 0$

$\Rightarrow 4\lambda = -12 \Rightarrow \lambda = -3$.

Avec $\lambda = -3$, on obtient : $x = 3+\lambda = 3-3 = 0$ et $y = 2\cdot\lambda = 2\cdot(-3) = -6$.

Ainsi $\underline{B(0;-6)}$.

Comme M_A est le milieu de BC, on a $\overrightarrow{BM_A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM_A}$.

On a : $\overrightarrow{BM_A} = \overrightarrow{OM_A} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\overrightarrow{BC} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$, on obtient : $\overrightarrow{OC} - \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\underline{C(6;6)}$.

Exercice 3

La norme d'un vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ est $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

a) On a : $\vec{a} = 2\vec{u_1} - 3\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$; ainsi $\|\vec{a}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \underline{\underline{\sqrt{13}}}$;

$\vec{b} = -2\vec{u_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; ainsi $\|\vec{b}\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$;

$\vec{c} = 3\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; ainsi $\|\vec{c}\| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}}$;

$\vec{d} = -8\vec{u_1} + 15\vec{u_2} = \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix}$; ainsi $\|\vec{d}\| = \sqrt{(-8)^2 + 15^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = \underline{\underline{17}}$.

b) On a : $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; ainsi $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3}}$;

$\vec{a} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; ainsi $\|\vec{a} + \vec{c}\| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$.

c)

$\cdot$	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
$\vec{a}$	13	-4	-9	-61
$\vec{b}$	-4	4	0	16
$\vec{c}$	-9	0	9	45
$\vec{d}$	-61	16	45	289

$\vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 4 + 9 = 13$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -4$;

$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -9$;

$\vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix} = -16 - 45 = -61$;

$\vec{b} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$;

$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$;

$\vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix} = 16$;

$\vec{c} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 9$;

$\vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix} = 45$;

$\vec{d} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix} = 64 + 225 = 289$.

Exercice 4

$\vec{a} = 3\vec{u_1} + 4\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Un vecteur $\vec{b}$ est orthogonal (= perpendiculaire) à $\vec{a}$ si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

En posant $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, on doit donc avoir $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0$, i.e. $3b_1 + 4b_2 = 0$.

On peut alors choisir $b_1 = 4$ et $b_2 = -3$.

Un vecteur orthogonal à $\vec{a}$ est donc $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) Un vecteur $\vec{c}$ unité orthogonal à $\vec{a}$ est un vecteur $\vec{c}$ tel que $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ et $\|\vec{c}\| = 1$.

D'après a), $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{a}$.

On a : $\|\vec{b}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$.

Posons $\vec{c} = \frac{1}{\|\vec{b}\|} \cdot \vec{b} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$.

On a : $\|\vec{c}\| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$.

Un vecteur unité orthogonal à $\vec{a}$ est donc $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$.

c) Un vecteur $\vec{d}$ de norme 7 orthogonal à $\vec{a}$ est un vecteur $\vec{d}$ tel que $\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$ et $\|\vec{d}\| = 7$.

D'après b), $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{a}$ et $\|\vec{c}\| = 1$.

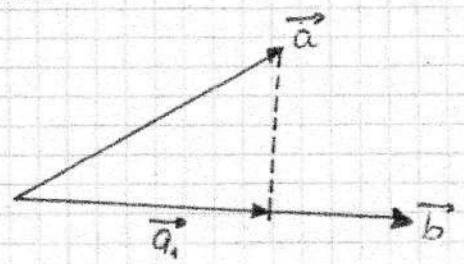
Posons $\vec{d} = 7 \cdot \vec{c} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28/5 \\ -21/5 \end{pmatrix}$.

On a : $\|\vec{d}\| = \sqrt{\left(\frac{28}{5}\right)^2 + \left(-\frac{21}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{784}{25} + \frac{441}{25}} = \sqrt{\frac{1225}{25}} = \sqrt{49} = 7$.

Un vecteur de norme 7 orthogonal à $\vec{a}$ est donc $\vec{d} = \begin{pmatrix} 28/5 \\ -21/5 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

a)



Par définition du produit scalaire, on a : $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = \|\vec{a_1}\|\cdot\|\vec{b}\|$.

On a donc $\|\vec{a_1}\| = \dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{b}\|}$.

Ici $\vec{a} = 5\vec{u_1} - 12\vec{u_2} = \begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}$ et $\vec{b} = 6\vec{u_1} + 8\vec{u_2} = \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$.

On a : $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = \left|\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}\right| = |30-96| = |-66| = 66$;

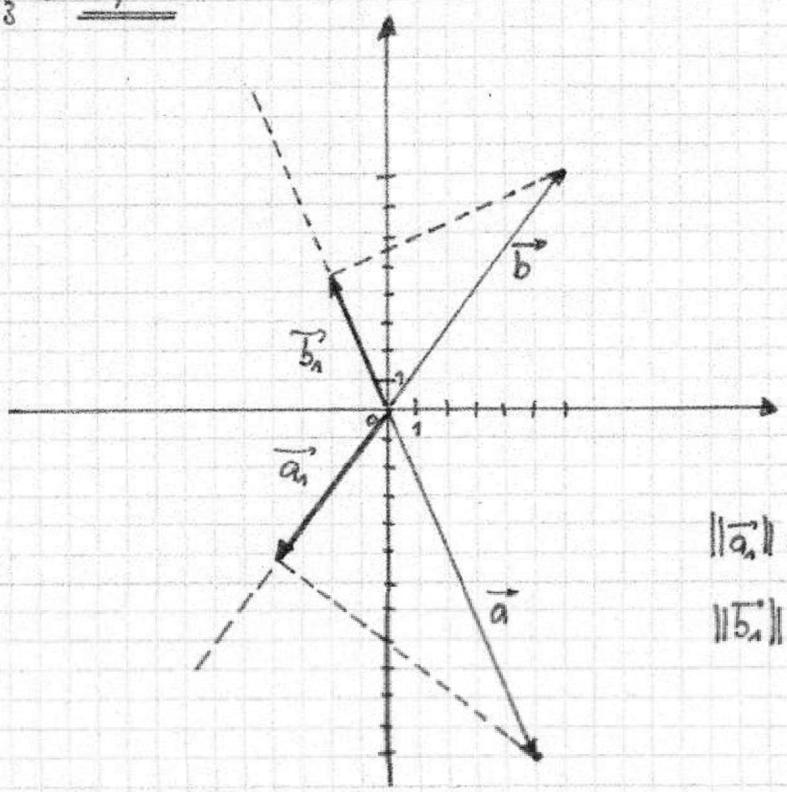
$\|\vec{b}\| = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$.

Ainsi $\|\vec{a_1}\| = \dfrac{66}{10} = \underline{\underline{6,6}}$.

Similairement, on va avoir $\|\vec{b_1}\| = \dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{a}\|}$.

Comme $\|\vec{a}\| = \sqrt{5^2+(-12)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$, on trouve :

$\|\vec{b_1}\| = \dfrac{66}{13} \cong \underline{\underline{5,08}}$.



$\|\vec{a_1}\| = 6,6$.

$\|\vec{b_1}\| \cong 5,1$.

b) Un vecteur unitaire parallèle à $\vec{b}$ est $\dfrac{1}{\|\vec{b}\|}\cdot\vec{b} = \dfrac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6/10\\8/10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}$.

Comme $\vec{a_1} \parallel \vec{b}$, $\vec{a_1}$ opposé à $\vec{b}$ et $\|\vec{a_1}\| = 6,6$, on a $\vec{a_1} = -6,6\cdot\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3,96\\-5,28\end{pmatrix}$.

Ainsi $\vec{a_1} = -3,96\,\vec{u_1} - 5,28\,\vec{u_2}$.

Exercice 6

a) Posons $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

De plus $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = (a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 = a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2$,
$\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2$ et $\|\vec{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2$.

Ainsi $\frac{1}{2}\left(\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2 - a_1^2 - a_2^2 - b_1^2 - b_2^2\right) =$
$= \frac{1}{2}(2a_1b_1 + 2a_2b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$.

On a donc bien $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2\right)$.

b) Posons $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

De plus $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \left\| \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2} = \sqrt{a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2}$

et $\|\vec{a}-\vec{b}\| = \left\| \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2} = \sqrt{a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2}$.

Ainsi $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0 \Rightarrow a_2b_2 = -a_1b_1$
$\Rightarrow \|\vec{a}+\vec{b}\| = \sqrt{a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_1b_1 + b_2^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2}$ et
$\|\vec{a}-\vec{b}\| = \sqrt{a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_1b_1 + b_2^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2}$
$\Rightarrow \|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}-\vec{b}\|$.

On a donc bien $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}-\vec{b}\|$.

c) Comme $\|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$, $\|\vec{b}\|^2 = \vec{b} \cdot \vec{b}$, $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{b}$
$\Rightarrow (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (-\vec{b}) + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} =$
$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = 0$.

Ainsi $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| \Rightarrow (\vec{a}+\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{b}) = 0$.

Exercice 7

On a $\vec{a} = 8\vec{u_1} + \vec{u_2}$

On cherche 2 vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tel que $\|\vec{v}\| = 1$ et $\vec{v} \cdot \vec{a} = 4$.

$\|\vec{v}\| = 1 \Rightarrow v_1^2 + v_2^2 = 1^2 = 1$.

$\vec{v} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 8v_1 + v_2 = 4$.

On a donc 2 équations: $\begin{cases} v_1^2 + v_2^2 = 1 & ① \\ 8v_1 + v_2 = 4 & ② \end{cases}$

② $\Rightarrow v_2 = 4 - 8v_1$

Dans ①: $v_1^2 + (4-8v_1)^2 = 1 \Rightarrow v_1^2 + 16 - 64v_1 + 64v_1^2 = 1 \Rightarrow 65v_1^2 - 64v_1 + 15 = 0$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{64 \pm \sqrt{64^2 - 4 \cdot 65 \cdot 15}}{2 \cdot 65} = \frac{64 \pm 14}{130} = \begin{cases} \frac{78}{130} = \frac{3}{5} \\ \frac{50}{130} = \frac{5}{13}. \end{cases}$$

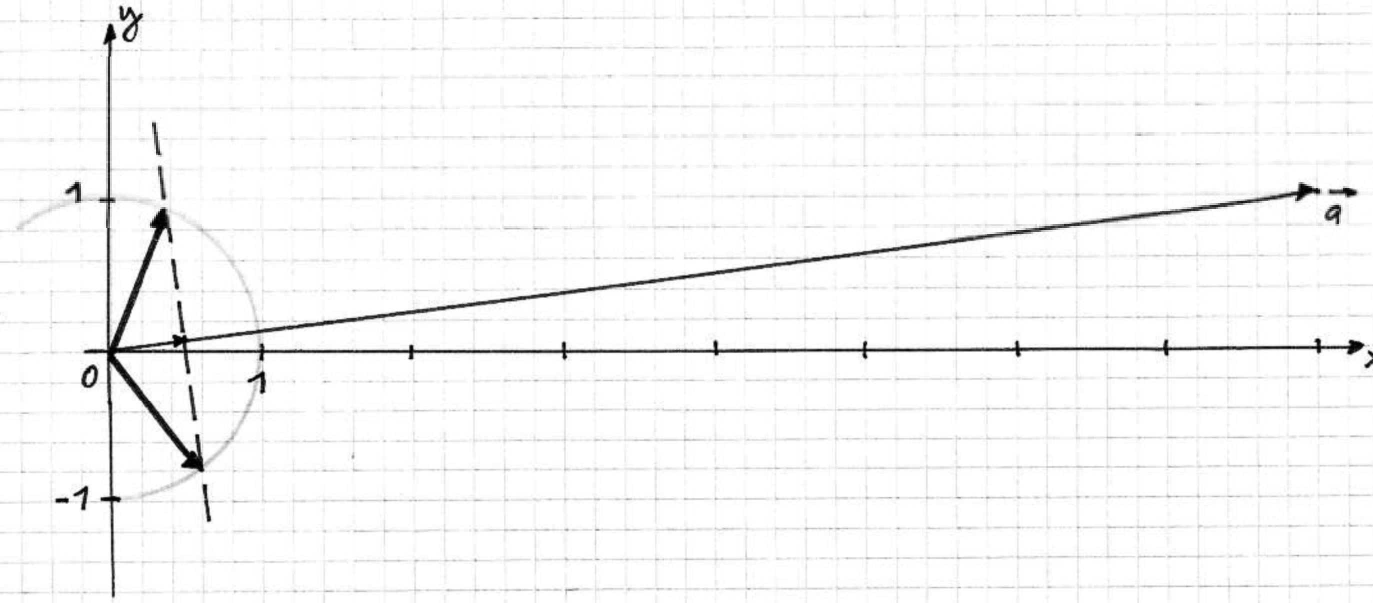
Avec $v_1 = \frac{3}{5}$, on a $v_2 = 4 - 8v_1 = 4 - 8 \cdot \frac{3}{5} = -\frac{4}{5}$.

Avec $v_1 = \frac{5}{13}$, on a $v_2 = 4 - 8v_1 = 4 - 8 \cdot \frac{5}{13} = \frac{12}{13}$

Ainsi, les vecteurs cherchés sont $\begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5/13 \\ 12/13 \end{pmatrix}$.

Par dessin:

On sait que $\vec{v} \cdot \vec{a} = 4$ et $|\vec{v} \cdot \vec{a}| = \|\vec{v'}\| \cdot \|\vec{a}\|$ (définition du produit scalaire)
où $\vec{v'}$ est la projection de $\vec{v}$ sur $\vec{a}$.
Comme $\|\vec{a}\| = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}$, on a $\|\vec{v'}\| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{a}|}{\|\vec{a}\|} = \frac{4}{\sqrt{65}} \cong 0,496$.
On a ainsi:



Exercice 8

On a $\vec{a} = 4\vec{u_1} + \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = -2\vec{u_1} + 3\vec{u_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u} = 0{,}6\vec{u_1} + 0{,}8\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$
et $\vec{v} = -0{,}8\vec{u_1} + 0{,}6\vec{u_2} = \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$.

a) $\|\vec{a}\| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$,
$\|\vec{b}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$,
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = -8 + 3 = -5$.

b) On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0{,}8 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = -0{,}48 + 0{,}48 = 0$,

$\|\vec{u}\| = \sqrt{0{,}6^2 + 0{,}8^2} = 1$ et $\|\vec{v}\|^2 = \sqrt{(-0{,}8)^2 + 0{,}6^2} = 1$.

Ainsi $\{\vec{u}; \vec{v}\}$ est bien une base orthonormée.

c) On a $\vec{u} = 0{,}6\vec{u_1} + 0{,}8\vec{u_2}$ et $\vec{v} = -0{,}8\vec{u_1} + 0{,}6\vec{u_2}$

$\Rightarrow$ $0{,}6\vec{u} - 0{,}8\vec{v} = 0{,}36\vec{u_1} + 0{,}48\vec{u_2} + 0{,}64\vec{u_1} - 0{,}48\vec{u_2} = \vec{u_1}$ et
$0{,}8\vec{u} + 0{,}6\vec{v} = 0{,}48\vec{u_1} + 0{,}64\vec{u_2} - 0{,}48\vec{u_1} + 0{,}36\vec{u_2} = \vec{u_2}$.

Ainsi, on a $\vec{u_1} = 0{,}6\vec{u} - 0{,}8\vec{v}$ et $\vec{u_2} = 0{,}8\vec{u} + 0{,}6\vec{v}$.

On a alors $\vec{a} = 4\vec{u_1} + \vec{u_2} = 2{,}4\vec{u} - 3{,}2\vec{v} + 0{,}8\vec{u} + 0{,}6\vec{v} = 3{,}2\vec{u} - 2{,}6\vec{v}$ et
$\vec{b} = -2\vec{u_1} + 3\vec{u_2} = -1{,}2\vec{u} + 1{,}6\vec{v} + 2{,}4\vec{u} + 1{,}8\vec{v} = 1{,}2\vec{u} + 3{,}4\vec{v}$.

Ainsi, dans la base $\{\vec{u}; \vec{v}\}$, on a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3{,}2 \\ -2{,}6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 3{,}4 \end{pmatrix}$.

On a alors $\|\vec{a}\| = \sqrt{3{,}2^2 + (-2{,}6)^2} = \sqrt{17}$,
$\|\vec{b}\| = \sqrt{1{,}2^2 + 3{,}4^2} = \sqrt{13}$ et
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3{,}2 \\ -2{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 3{,}4 \end{pmatrix} = 3{,}2 \cdot 1{,}2 - 2{,}6 \cdot 3{,}4 = -5$.

On obtient les mêmes résultats qu'en a). C'est dû au fait que les bases $\{\vec{u_1}; \vec{u_2}\}$ et $\{\vec{v_1}; \vec{v_2}\}$ sont toutes les 2 orthonormées.