Exercice 9.1

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 8x^3 - 9x^2 + 11x - 5$

b. $f(x) = \sin(x) \cdot x^2$

c. $f(x) = \frac{1}{4x^3-2}$

d. $f(x) = \frac{5-7x}{9x+3}$

e. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 5}$

f. $f(x) = \tan(5\sqrt{x})$

Exercice 9.2

Déterminer les équations des tangentes aux courbes suivantes, au point indiqué.

a. $f(x) = x^3 - 2x + 7$, en $(-2; 3)$

b. $f(x) = \frac{4-x}{x^2}$, en $(3; 1/9)$

c. $f(x) = \cos(3x)$, en $(\frac{\pi}{6}; 0)$

Exercice 9.3

Soit la fonction définie par morceaux $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + k & , x \leq 3 \\ \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & , x > 3 \end{cases}$. Que doit valoir k pour que cette fonction soit continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9.4

Soit la fonction définie par morceaux $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + 8}{x^2 - 16} & , x < -4 \\ x^3 + ax^2 - 5x + b & , x \geq -4 \end{cases}$. Que doivent valoir a et b pour que la fonction soit dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9.5

Calculer le plus grand écart vertical entre les graphes des fonctions $f(x) = \dfrac{x^3}{8}$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

a. sur l'intervalle $[0; 4]$

b. sur l'intervalle $[0; 2]$.

Exercice 9.6

Déterminer la distance minimale entre l'origine et la courbe $f(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$.

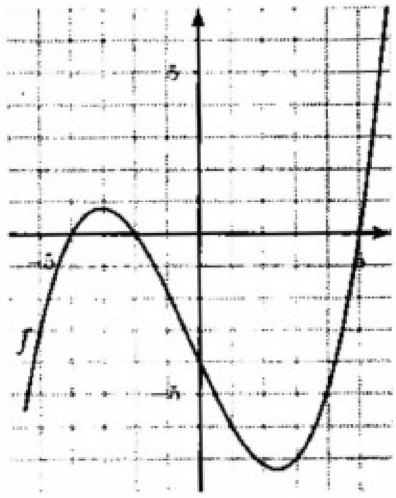
Exercice 9.7

a. Esquisser la courbe $y = f'(x)$ étant donnée la courbe $y = f(x)$

b. Déterminer l'équation de la courbe f.

c. Pour quelles valeurs de x la courbe est-elle convexe ?

d. Pour quelle valeur de x la pente de la tangente au graphe de f est-elle la plus négative ?



Exercice 9.8

Trouver la valeur de c du théorème de Rolle pour la fonction $f(x) = x^3 - 12x$ sur l'intervalle $[0; b]$.

Exercice 9.9

Le théorème de Rolle s'applique-t-il aux fonctions $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x - 2}$ et $g(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x + 2}$?

Exercice 9.10

Vérifier le théorème des accroissements finis pour $f(x) = 2x^2 - 7x - 10$, $a = 2$ et $b = 5$.

Exercice 9.11

Prouver que $f(x)$ est constant sur l'intervalle $]a, b[$ si $f'(x) = 0$ en tout point de $]a, b[$

Exercice 9.12

Soit $f(x) = x^3 - 6x$

a. Calculer Δy

b. Calculer dy

c. Calculer $\Delta y - dy$

d. Calculer les valeurs de Δy, dy et $\Delta y - dy$ pour $x = 1$ et $\Delta x = 0.01$

Exercice 9.13

Approximer $\sqrt[3]{124}$ et $\sin(60°1')$ à l'aide de différentielles

Exercice 9.14

Utiliser **la règle de l'Hospital** chaque fois que c'est possible

a. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x} =$

b. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{x^2} =$

c. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} =$

d. $\lim_{x \to 0} \frac{3x}{x^2 + 1} =$

e. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$

f. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} =$

g. $\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 2x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 2}{x^3 - 3x + 2} =$

h. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x + \sin x} =$

i. $\lim_{x \to e} \frac{\ln(x) - 1}{x - e} =$

j. $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} =$

k. $\lim_{x \xrightarrow{>} +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} =$

Exercice 9.15

Dans les deux cas, trouver l'expression fonctionnelle de $f(x)$:

a. Déterminer l'expression fonctionnelle de f sachant que son graphe passe par le point $(-4;9)$ et que $f'(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x + 1$

b. Déterminer l'expression fonctionnelle de f sachant que $f'(x) = 15x^2 - 6x + 4$ et $f(1) = 0$

Exercice 9.16

Calculer $\int_a^b f(x)\,dx$ dans les cas suivants :

a. $f(x) = c$, avec $c > 0$ et $a < b$

b. $f(x) = x$, avec $0 < a < b$

c. $f(x) = mx + h$, avec $a < b$, et m, h tel que $f([a;b]) > 0$

d. $f(x) = x^2$, avec $a = 0 < b$

e. $f(x) = x^2$, avec $a < b$

Exercice 9.17

a. Représenter la surface I entre l'axe des x, le graphe de $f(x) = \frac{1}{x}$ et les verticales $x = 1$ et $x = 2$. (choisir 10 carrés comme unité)

b. Estimer la surface I en comptant les carrés, qu'on écrira $I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

c. Subdiviser l'intervalle $[1;2]$ en n parties égales ($n \in \mathbb{N}$), et justifier les inégalités :

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \leq I \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$$

d. Pour $n = 10$, estimer numériquement la valeur de I.

Exercice 9.18

Déterminer la valeur de l'intégrale I de la fonction $f(x) = x^3$ entre 0 et un nombre positif fixé b.

a. **Méthode de Riemann** : découpage en rectangles. En subdivisant l'intervalle $[0;b]$ en n parties égales ($n \in \mathbb{N}$) justifier les inégalités :

$$I_n^- = \frac{b^4}{n^4}\left(0^3 + 1^3 + \ldots + (n-1)^3\right) \leq I \leq \frac{b^4}{n^4}\left(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3\right) = I_n^+$$

b. Prouver par induction la formule de sommation

$$S_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

c. Considerer le cas limite quand $n \to \infty$ et calculer I.

d. Calculer la valeur moyenne $\bar{f}$ de $f(x) = x^3$ sur l'intervalle $[1:2]$

Exercice 9.19

Chercher une primitive des fonctions suivantes :

a. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

b. $f(x) = \frac{4}{x^2} - 1$

c. $f(x) = 3\sin(x)$

d. $f(x) = \sin(3x)$

e. $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$

f. $f(x) = (x+1)^3$

g. $f(x) = (2x-3)^5$

h. $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$

i. $f(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

j. $f(x) = \tan^2(x)$

k. $f(x) = 1 + \tan^2(2x)$

l. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

m. $f(x) = \frac{-4}{x^4} + \frac{5}{x^5}$

n. $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 1}{x^2}$

Exercice 9.20

Calculer les intégrales suivantes.

a. $\int_2^5 x^2\,dx$

b. $\int_1^2 \frac{4}{3}x^3\,dx$

c. $\int_0^2 \left(x^3 + 2x + 1\right)\,dx$

d. $\int_{-1}^2 \left(2x^3 - x^2 + 3x - 4\right)\,dx$

e. $\int_{-1}^2 \left(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2.7\right)\,dx$

f. $\int_1^4 \frac{1}{x^2}\,dx$

g. $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$

h. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx$

i. $\int_1^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\,dx$

j. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$

Exercice 9.21

Calculer les intégrales suivantes.

a. $\int_{-1}^1 e^{-x}\,dx$

b. $\int_{-3}^9 e^{x\ln(3)}\,dx$

c. $\int_{\ln(3)}^{\ln(9)} e^x\,dx$

d. $\int_0^1 a^x\,dx$

e. $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$

f. $\int_1^3 \frac{1}{x-5}\,dx$

g. $\int_0^8 \sqrt[3]{x}\,dx$

h. $\int_1^e \ln(x^2)\,dx$

Exercice 9.22

Déterminer la valeur moyenne $\bar{f}$ de la fonction f dans l'intervalle I, puis trouver un nombre c de l'intervalle tel que $f(c) = \bar{f}$.

a. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad I_1 = [1:9]$ $\quad I_2 = [4:9]$

b. $f(x) = \cos(x)$ $\quad I_1 = [0:\pi]$ $\quad I_2 = [\frac{\pi}{2}:\pi]$

c. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad I = [a:b]$ $\quad$ avec $b > a > 0$

Exercice 9.23

On considère la fonction $f(x) = e^{0.75x} - 3x + c$.

a. Déterminer la valeur de c de telle sorte que f passe par l'origine

b. Calculer les coordonnées du point à tangente horizontale

c. A l'aide du comportement asymptotique, tracer le graphe

d. Calculer $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

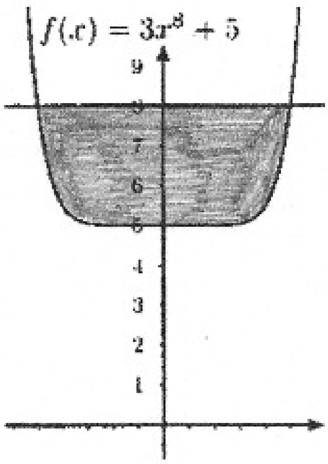
Exercice 9.24

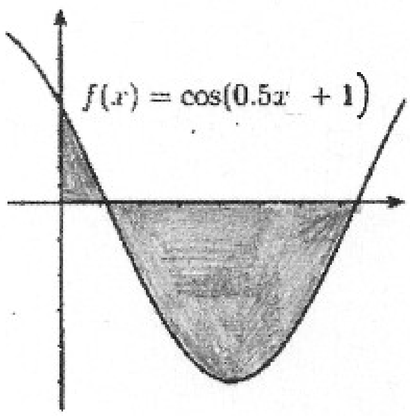
a. Calculer l'aire sous le graphe de $f(x) = x^4 + 5$ de $x = -1$ à $x = 1$.

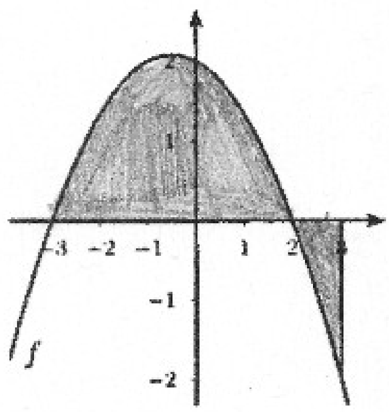
b. Déterminer la surface comprise entre l'axe des x, la courbe $f(x) = x^2 - 5$ et les verticales $x = -3$ et $x = 2$.

Exercice 9.25

Déterminer la mesure des surfaces grisées suivantes :







Exercice 9.26

On donne deux fonctions f et g. Tracer leur graphe relativement à un même repère. Hachurer la surface délimitée par les deux courbes et déterminer sa mesure.

a. $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ et $g(x) = 4 - x$

b. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{9}x^2$ et $g(x) = 3 - \dfrac{1}{9}x^2$

c. $f(x) = 9x^2 - 3x^3$ et $g(x) = -3x^2 + 12x$

d. $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{17 - x^2}{4}$

Exercice 9.27

Dessiner relativement à un repère unique les paraboles d'équations $f(x) = 16 - x^2$, $g(x) = (x - 4)^2$, et $h(x) = -x^2 + 3x + 7$.

a. Calculer les coordonnées des cinq points communs à deux des paraboles

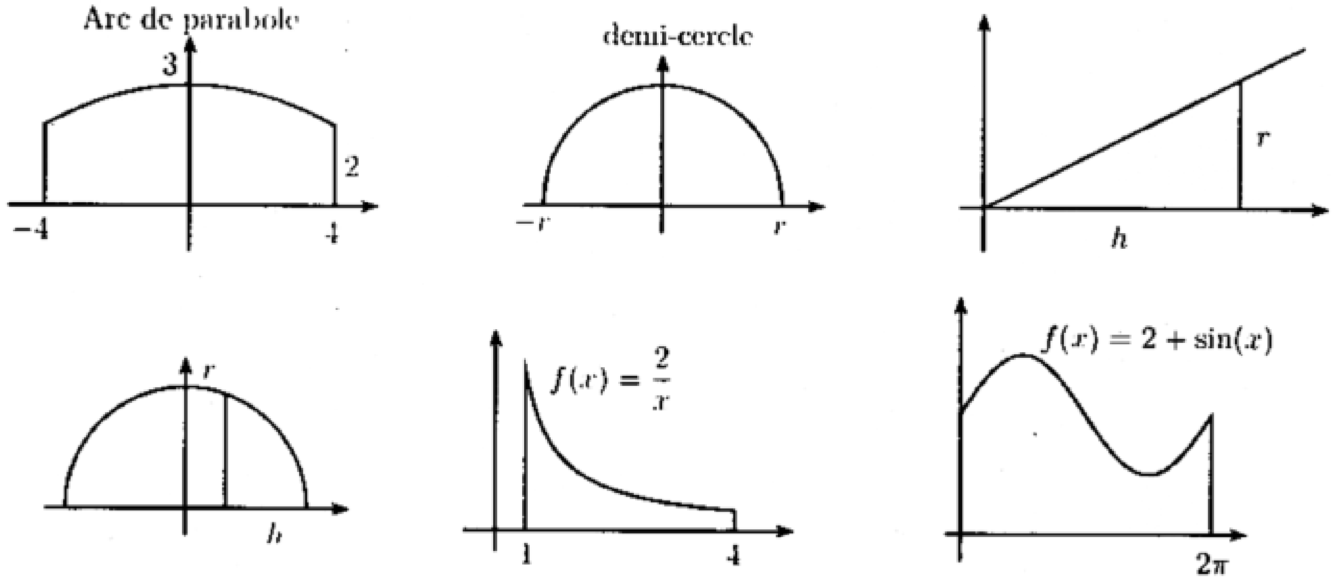
b. Calculer l'aire du « triangle » dont les côtés sont des arcs de paraboles et qui a un sommet sur l'axe des y.

Exercice 9.28

Dans le premier quadrant, on considère la surface délimitée par les axes de coordonnées, la droite $y = 8$ et le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2}$. A quelle hauteur faut-il tracer une horizontale pour partager cette surface en deux parties de même aire ?

Exercice 9.29

Calculer le volume des corps de révolution engendrés par la rotation autour de l'axe des x des surfaces hachurées suivantes. Les nommer en fonction de leur forme.



Exercice 9.30

Soient les fonctions : $f(x) = \dfrac{x^2}{a}$ et $g(x) = \dfrac{a}{x^2}$.

a. Déterminer le nombre positif a de sorte que les courbes f et g se coupent à angle droit.

b. On pose $a = 4$. Calculer l'aire de la surface S délimitée par les deux courbes, l'axe des x et la verticale $x = 4$.

c. Calculer le volume du corps de révolution engendré par rotation de la surface S autour de Ox.

Exercice 9.31 .

Quel est le volume engendré par la rotation autour de l'axe des y de la surface délimitée par la courbe $y = f(x)$, l'axe des y et les droites $y = c$ et $y = d$?

a. $f(x) = x^2 + 1$. $c = 1$ et $d = 4$

b. $f(x) = x^{2/3}$. $c = 1$ et $d = 5$

Exercice 9.32

a. Etudier sommairement les fonctions $f(x) = \dfrac{4}{x}$ et $g(x) = 5x - x^3$. Tracer leur graphe dans un repère unique et hachurer dans le premier quadrant la surface délimitée par les courbes.

b. Calculer le volume de l'anneau obtenu par rotation de la surface hachurée autour de l'axe des x.

Exercice 9.33

Calculer la longueur d'arc L du graphe de $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ sur l'intervalle $[0;5]$.

Exercice 9.34

Déterminer les primitives des fonctions suivantes en intégrant par parties.

a. $f(x) = x \cdot a^x$

b. $f(x) = \ln(x)$

c. $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

d. $f(x) = (x^2 - x + 1)\, e^x$

e. $f(x) = x^2 \sin(x)$

f. $f(x) = x(1 - x)^4$

g. $f(x) = x \ln(x)$

h. $f(x) = xe^x \cos(x)$

i. $f(x) = x\sqrt{x+1}$

Exercice 9.35

Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2(x)\, dx$

Exercice 9.36

Etudier les fonctions f et g et les représenter sur un même système d'axes. Hachurer la surface délimitée par les deux courbes et calculer son aire.

a. $f(x) = x^2e^{-x}$ et $g(x) = e^{-x}$

b. $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \ln^2(x)$

c. $f(x) = x^2 + 2x - 3$ et $g(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x$

Exercice 9.37

Par la méthode du changement de variable, trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \cos(ax + b)$

b. $f(x) = (2x + 5)^4$

c. $f(x) = (ax + b)^n$

d. $f(x) = x(1 - x^2)^4$

e. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

f. $f(x) = x\cos(\pi x^2)$

g. $f(x) = x^3\sqrt{1 + x^4}$

h. $f(x) = x^2e^{-x^3}$

i. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

j. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

k. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 4}$

l. $f(x) = (x^2 - x)^4(2x - 1)$

m. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{3x^2 - 2}}$

n. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{3x - 2}}$

o. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 9x^2}}$

Exercice 9.38

a. Trouver une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

a) $f_1(x) = (2x^2 - 3x + 1)e^x$

b) $f_2(x) = (x^2 - 4x - 3)e^{-x}$

c) $f_3(x) = (-5x^2 - 2x + 7)e^{2x}$

d) $f_4(x) = (3\sin(x) - 7\cos(x))e^{3x}$

b. On considère la fonction $f_5(x) = \frac{-x^2+4}{(x+1)^2}$. Trouver les valeurs de A, B et $C \in \mathbb{R}$ afin que

$$f_5(x) = \frac{-x^2 + 4}{(x + 1)^2} = A + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

puis trouver une primitive de $f_5(x)$.

Exercice 9.39

Primitive d'une fonction rationnelle : A l'aide de votre formulaire, déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4x - 5}$

b. $f(x) = \dfrac{6}{9x^2 - 4}$

c. $f(x) = \dfrac{1}{4x^2 - 3x}$

d. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 12x + 36}$

e. $f(x) = \dfrac{2}{16x^2 - 8x + 1}$

f. $f(x) = \dfrac{x+1}{(3x+2)^2}$

g. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 6}$

h. $f(x) = \dfrac{x^4 + x - 3}{x^2}$

i. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 2}$

j. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$

k. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$

l. $f(x) = \dfrac{2x^4 - 4}{1 + 2x^2}$

m. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4x + 5}$

n. $f(x) = \dfrac{1}{x(x-1)(x-2)}$

o. $f(x) = \dfrac{x}{x^4 + 9}$

Exercice 9.40

On appelle I_n la valeur de l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,dx$.

a. Calculer I_0 et I_1

b. Montrer que $(2n+3) \cdot I_n = 2n \cdot I_{n-1}$

c. Calculer I_2 et I_3

d. Exprimer I_n en fonction de n

Exercice 9.41

Déterminer l'aire de la surface délimitée par le graphe de f, l'axe des x et la verticale passant par le maximum de $f(x)$ avec :

a. $f(x) = xe^{-x}$

b. $f(x) = \dfrac{24x}{(x^2+3)^2}$

Exercice 9.42

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère f_n la fonction donnée par $f_n(x) = x^n \cdot e^{-x^2}$, F_n la primitive de f_n, soit $F_n(x) = \int_0^x t^n \cdot e^{-t^2} dt$ et I_n la limite de $F_n(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

a. Calculer $F_1(x)$ et I_1.

b. En déterminant F_n, par parties,démontrer la formule :

$$(n+1) \cdot F_n(x) = f_{n+1}(x) + 2 \cdot F_{n+2}(x)$$

c. Par passage à la limite, déduire de l'égalité précédente la formule $I_{n+2} = \dfrac{1}{2}(n+1)\, I_n$

d. Sachant que $I_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer I_2, I_4, I_6, ...

Exercice 9.43

a. Déterminer la valeur des intégrales impropres $\displaystyle\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

b. Déterminer la valeur des intégrales impropres $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{6}{x^4}\,dx$ et $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{6}{x\sqrt{x}}\,dx$.

c. Trouver, en fonction de m et s, la valeur de $\int_1^s \frac{1}{x^m}\,dx$, avec $m \in \mathbb{Q}_+\backslash\{1\}$ et $s > 0$.

d. Déterminer pour quelles valeurs de m l'expression $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^m}\,dx$ est calculable.

Exercice 9.44

Soient les fonctions $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3x + 2}$, $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4x + 4}$ et $h(x) = \dfrac{x}{2x^2 + x + 1}$.

a. Déterminer pour chaque fonction le domaine dans lequel elle est continue.

b. Calculer, si elle existe, l'intégrale de f entre a et b avec :

a) $a = 1.5$ et $b = 2$ b) $a = -3$ et $b = 0$ c) $a = -1$ et $b = 1$

c. Calculer, si elle existe, l'intégrale de g entre a et b avec :

a) $a = 0$ et $b = 2$ b) $a = -2$ et $b = 0$ c) $a = -3$ et $b = 0$

d. Calculer, si elle existe, l'intégrale de h entre a et b avec :

a) $a = -0.25$ and $b = 0$ b) $a = 0$ and $b = +\infty$

Exercice 9.45

Calculer, si elles existent, les intégrales impropres suivantes :

a. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{2x^2 - x - 1}\,dx$

b. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{2x^2 - x - 1}\,dx$

c. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x + 3}{(x + 1)^3}\,dx$

d. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3x^2}{(1 + 2x^3)^2}\,dx$

e. $\displaystyle\int_{1.5}^{\infty} \frac{1}{2x^2 - 6x + 5}\,dx$

f. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

Exercice 9.46

Calculer les valeurs exactes ainsi que les estimations de Simpson de :

a. $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx$ b. $\displaystyle\int_a^b x^3\,dx$ c. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin(x)\,dx$ d. $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1 + x^2}\,dx$

Déterminer ensuite, en % de la valeur exacte, l'erreur relative de chaque estimation de Simpson.

Exercice 9.47

On considère la fonction $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Il s'agit de la distribution normale utilisée en statistiques et également appelée courbe de Gauss.

a. Etudier complètement f et tracer son graphe.

b. Calculer l'estimation de Simpson des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 f(x)\,dx,\ I_2 = \int_1^2 f(x)\,dx,\ I_3 = \int_2^3 f(x)\,dx,\ I_4 = \int_3^4 f(x)\,dx,\ I_5 = \int_4^5 f(x)\,dx$$

c. En déduire une estimation de $\int_{-5}^{5} f(x)\,dx$ et de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

Exercice 9.48

Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a. Déterminer a pour que la fonction soit continue.

b. Après avoir déterminer ses zéros et avoir tracé les hyperboles $y = \frac{1}{x}$ et $y = \frac{-1}{x}$, dessiner le graphe de f. La fonction est-elle continue partout ? Choisir 2 carrés pour l'unité sur Ox et 10 sur Oy.

c. A l'aide de la formule de Simpson. déterminer $\int_a^b f(x)\,dx$. dans les cas suivants :

a) $a = 0$. $b = \pi$ b) $a = \pi$. $b = 2\pi$ c) $a = n\pi$, $b = (n+1)\pi, n \in \mathbb{N}$

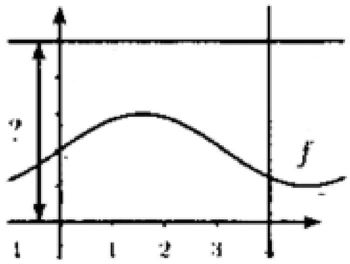
d. L'intégrale $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ existe-t-elle ?

Exercice 9.49

a. Etudier la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ en soignant l'étude au voisinage de 0.

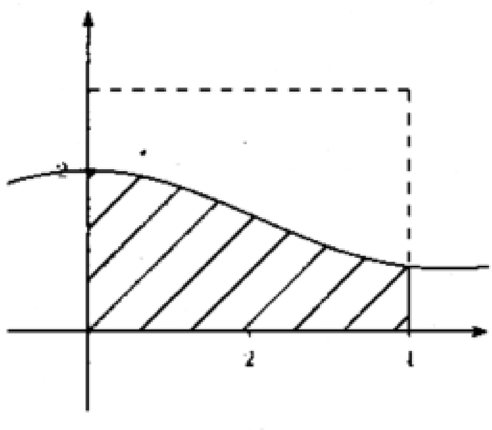
b. Estimer l'intégrale de f de -2 à 0.

Exercice 9.50



Déterminer la hauteur de cette cible rectangulaire de sorte qu'une fléchette lancée au hasard ait la même probabilité de se planter au-dessus qu'au-dessous de la courbe $f(x) \doteq \sin(x) + 2$?

Exercice 9.51



l'intégrale $I = \int_0^4 \frac{\sin(x)}{x} + 1\,dx$ ne peut pas être calculé car elle n'a pas de primitive. Comment utiliser l'information que sur 1500 flèches lancées au hasard contre la cible rectangulaire ci-contre, 780 d'entre elles ont atteint la zone supérieure de la cible ?

Exercice 9.52

Calculer le volume du tore engendré par la rotation du cercle $x^2 + y^2 = 4$ autour de la droite $x = 3$.

Exercice 9.53

Résoudre les équations différentielles suivantes

a. $y' = x - 1$

b. $(x - 1) \cdot y' = x$

c. $y'' = x^2 - x$

Exercice 9.54

a. Vérifier que $y = ce^{-x} + x - 1$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = x$.

b. Show that $y = ae^{x} + be^{-3x} + \sin(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' + 2y' - 3y = 2\cos(x) - 4\sin(x)$$

Exercice 9.55

Trouver les équations différentielles dont les solutions générales sont

a. $y = cx$

b. $y = x + c$

c. $y = x^2 + c$

d. $y = ce^{x}$

e. $x^2 + y^2 = c^2$

f. $y = ax^2 + bx + c$

g. $y = a\cos(2x) + b\sin(2x)$

h. $y = ae^{x} + be^{-2x}$

Exercice 9.56

Dessiner le champ des directions lié à l'équation différentielle $y' = x + y$. Trouver une bonne approximation de la valeur en $x = 2$ de la solution particulière qui passe par l'origine. Dessiner cette solution pour $x \in [-3; 3]$ puis deviner l'expression fonctionnelle de cette solution particulière. La solution exacte sera obtenue plus tard.

Exercice 9.57

Résoudre les équations différentielles suivantes

a. **Equations où y n'apparaît pas**

a) $y' = x\cos(x)$

b) $y' = x^2 + x$

c) $y'' = xe^{x}$

b. **Equations à variables séparées**

a) $xy' - y = 0$

b) $xy' = 5y$

c) $y' = x^2y$

d) $y^2 = (x + 1)y'$

e) $y'\sin(x) - y\cos(x) = 0$

f) $yy' = x$

g) $x^2y' = \cos^2(y)$

c. **Equations homogènes**

a) $y' = \dfrac{y}{x} + x^2$

b) $y' = \dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x}$

d **Equations linéaires**

a) $x^2y' = 1 - y$

b) $y' + x^3 = xy$

c) $y' + y = x^2$

d) $y' + 2xy = x^3 + x$

e) $xy' - y = \ln(x)$

f) $2xy' + y = 1$
condition initale $y = 2$ si $x = 1$

g) $xy' + 3y = -\dfrac{2}{x}$
condition initale $y = -3$ si $x = -1$

Exercice 9.58

Déterminer la fonction f qui vérifie simultanément les conditions $xy' - 2y = x(1 - \ln(x))$ et $f(1) = -0.5$

Exercice 9.59

Lors de la désintégration d'un corps radioactif, la vitesse de désintégration à l'instant t est proportionnelle à la masse du corps à cet instant.

a. Exprimer cette masse m en fonction du temps t sachant que $m(0) = m_0$. On appelle demi-vie le temps nécessaire à la désintégration de la moitié de la masse initiale.

b. Calculer le temps nécessaire à la désintégration des 9 dixièmes d'une masse de thorium dont la demi-vie est de 14'000 ans.

Exercice 9.60

Une certaine quantité d'eau que l'on a porté à ébullition ($100°C$) se refroidit dans un milieu de température ambiante de $18°C$. Au bout de 5 minutes la température n'est plus que de $70°C$.

a. Quelle est la vitesse de refroidissement au début du processus, et après 5 minutes ?

b. Au bout de combien de temps cette eau aura-t-elle une température de $19°C$? Indication : On admettra que la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence des températures de l'eau et du milieu ambiant.

Exercice 9.61

Evolution d'une épidémie

Dans une population (supposée fermée sans migrations, naissances ni décès) contenant n personnes, une maladie contagieuse se développe. La transmission de la maladie se fait lors du contact de personnes saines et malades (!). On veut déterminer le nombre de malades au temps t. Ce nombre $m(t)$ est compris entre 0 et n. L'augmentation du nombre des malades par unité de temps est proportionnelle au nombre de malades et au nombre de personnes saines.

Exercice 9.62

a. Soit le polynôme $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
Calculer $p(0)$, $p'(0)$, $p''(0)$, $p'''(0)$, $p^{(4)}(0)$, $p^{(5)}(0)$, $p^{(6)}(0)$.

b. Soit le polynôme $p(x) = 3x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 3x + 7$.
Calculer $p(0)$, $p'(0)$, $p''(0)$, $p'''(0)$, $p^{(4)}(0)$, $p^{(5)}(0)$, $p^{(6)}(0)$.

c. Soit le polynôme $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.
Calculer $p(0)$, $p'(0)$, $p''(0)$, $p'''(0)$, $p^{(4)}(0)$, $p^{(5)}(0)$, $p^{(6)}(0)$.

d. Soit le polynôme $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.
Calculer $p^{(k)}(0)$.

Exercice 9.63

Dessiner le graphe de $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[-2; 2]$, puis répondre aux questions suivantes :

a. Trouver un polynôme $p_1(x)$ de degré 1 avec $p_1(0) = f(0)$ et $p_1'(0) = f'(0)$.

b. Trouver un polynôme $p_2(x)$ de degré 2 avec $p_2(0) = f(0)$, $p_2'(0) = f'(0)$ et $p_2''(0) = f''(0)$.

c. Trouver un polynôme $p_3(x)$ de degré 3 avec $p_3(0) = f(0)$, $p_3'(0) = f'(0)$,
$p_3''(0) = f''(0)$ et $p_3'''(0) = f'''(0)$.

d. Comparer $f(1)$ et $p_3(1)$, $f(2)$ et $p_3(2)$ et finalement $f(-2)$ et $p_3(-2)$.

Exercice 9.64

Développer le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - 5$ en puissance de $(x - 2)$ en :

a. développant $P(t + 2)$ avec $t = x - 2$.

b. utilisant la formule :

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Exercice 9.65

a. Etablir les développements de Taylor suivants (sans discuter des restes de Lagrange $R_n(x)$ qui tendent vers 0 pour $x \in \mathbb{R}$) :

a) $e^x = \sum_{k \geqslant 0} \frac{x^k}{k!}$

b) $\sin(x) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

c) $\cos(x) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

b. Déduire la formule $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ (où i vérifie $i^2 = -1$).

Exercice 9.66

a. Etablir les développements de Taylor suivants (sans discuter des restes de Lagrange $R_n(x)$ qui tendent vers 0 pour x indiqué entre parenthèses) :

a) $\frac{1}{1-x} = \sum_{k \geqslant 0} x^k \qquad (-1 < x < 1)$

b) $\arctan(x) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$

b. Montrer que $(2 + i)(3 + i) = 5(1 + i)$ et déduire que $\pi = 4(\arctan(1/2) + \arctan(1/3))$.

c. En utilisant quatre termes du développement de Taylor de $\arctan(x)$, donner une estimation du nombre $\pi = 4(\arctan(1/2) + \arctan(1/3))$.

Exercice 9.67

En utilisant les premiers termes du développement de Taylor du numérateur et du dénominateur, calculer les limites suivantes

a. $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x - \sin(x)}$

b. $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$