Lycée Denis-de-Rougemont
Degré 11

Mathématiques de niveau 1

ANALYSE

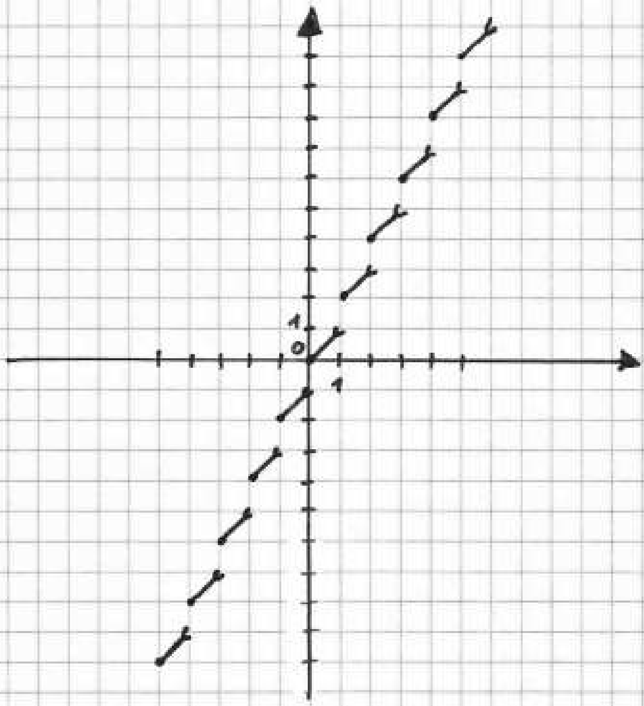
Corrigé des exercices

Exercice 1

a)

x	-5	$-4{,}5$	-4	$-3{,}5$	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1
$[x]$	-5	-5	-4	-4	-3	-3	-2	-2	-1	-1	0	0	1
$x+[x]$	-10	$-9{,}5$	-8	$-7{,}5$	-6	$-5{,}5$	-4	$-3{,}5$	-2	$-1{,}5$	0	$0{,}5$	2

x	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3	$3{,}5$	4	$4{,}5$	5
$[x]$	1	2	2	3	3	4	4	5
$x+[x]$	$2{,}5$	4	$4{,}5$	6	$6{,}5$	8	$8{,}5$	10



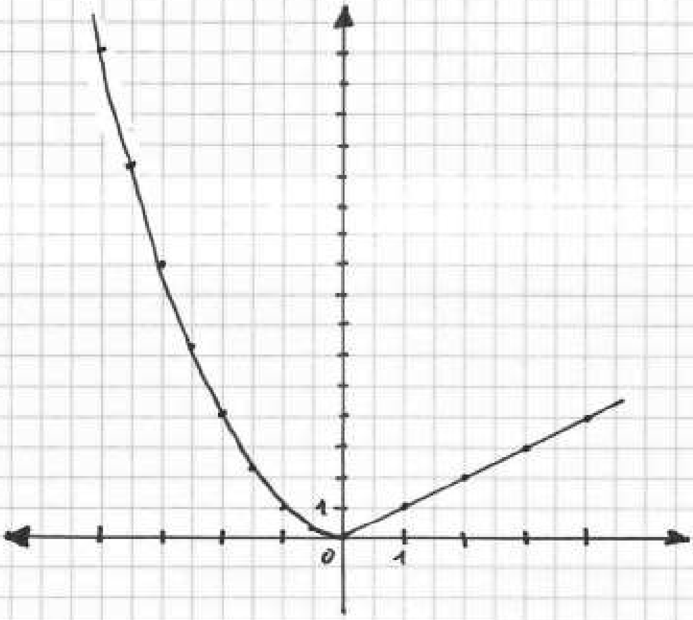
L'ensemble des images est $\ldots \cup [-10;-9[\cup [-8;-7[\cup [-6;-5[\cup [-4;-3[\cup [-2;-1[\cup [0;1[\cup [2;3[\cup [4;5[\cup [6;7[\cup [8;9[\cup \ldots$

b) Pour $x = \ldots -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots$
Autrement dit, pour $x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

a)

x	-4	$-3{,}5$	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	1	2	3	4
$f(x)$	16	$12{,}25$	9	$6{,}25$	4	$2{,}25$	1	$0{,}25$	0	1	2	3	4

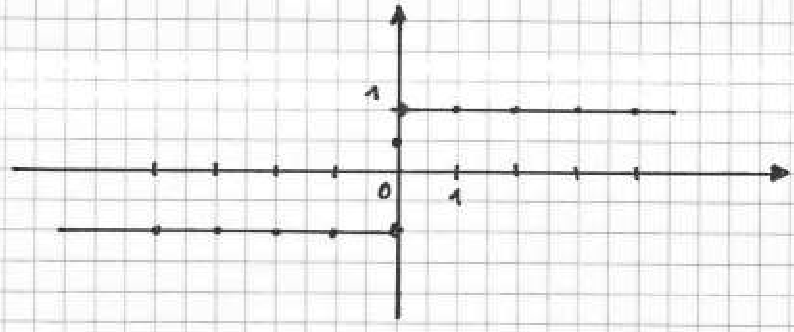


b) Comme $f(x) \to 0$ si $x \underset{<}{\to} 0$ et $f(x) \to 0$ si $x \underset{>}{\to} 0$, on conclut que f n'est pas discontinue en $x = 0$.

Exercice 3

a)

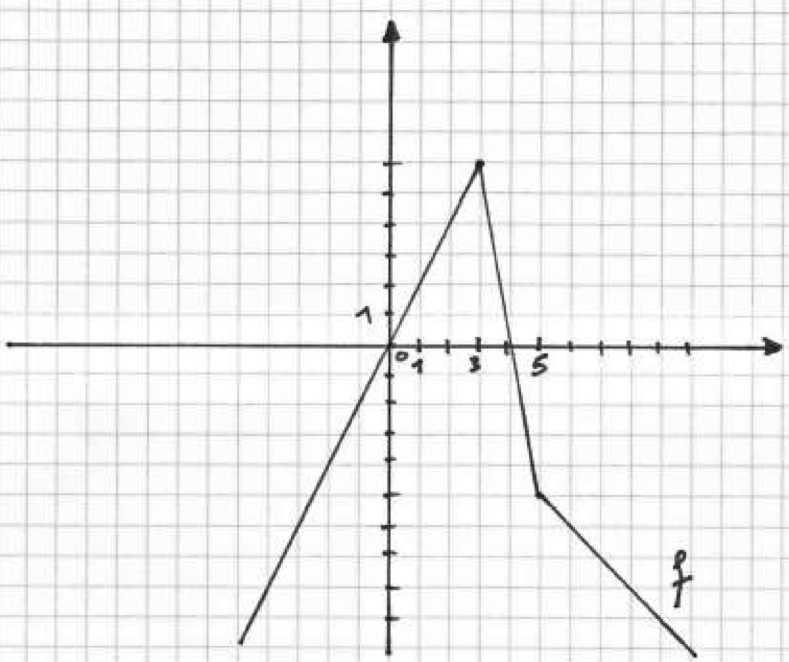
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\lvert x \rvert$	4	3	2	1	0	1	2	3	4
$\frac{\lvert x \rvert}{x}$	-1	-1	-1	-1	$0,5$	1	1	1	1



b) On a $f(x) \longrightarrow -1$ si $x \underset{<}{\longrightarrow} 0$, $f(0) = 0,5$ et $f(x) \longrightarrow 1$ si $x \underset{>}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi f est discontinue en $x = 0$.

Exercice 4



On doit avoir $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x)$ puisque f est continue.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} 2x = 6$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} (ax+b) = 3a+b$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ <}} (ax+b) = 5a+b$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} (-x) = -5$.

On doit donc avoir $3a+b=6$ et $5a+b=-5$.

En soustrayant la première de ces équations à la seconde, on trouve :

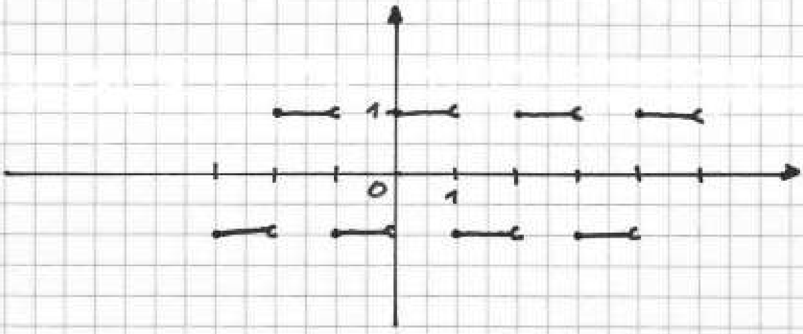
$2a = -11$, i.e. $a = -\frac{11}{2}$.

Avec $a = -\frac{11}{2}$, on a $b = 6-3a = 6-3\left(-\frac{11}{2}\right) = 6 + \frac{33}{2} = \frac{45}{2}$.

Ainsi $\underline{\underline{a = -\frac{11}{2} \text{ et } b = \frac{45}{2}}}$.

Exercice 5

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4	$4,5$
$[x]$	-3	-3	-2	-2	-1	-1	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4
$f(x)$	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1



Les points de discontinuité de $\mathbb{R}$ sont les $\underline{x \in \mathbb{Z}}$.

On a $\underline{f(\mathbb{R}) = \{-1;1\}}$.

Exercice 6

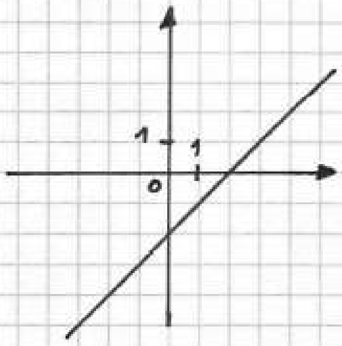
$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$$

a) D est l'ensemble des x pour lesquels on ne peut pas calculer $f(x)$.

On a :

$$\begin{array}{r|l} x^2-5x+6 & x-3 \\ \cline{2-2} \underline{-(x-3x)} & x-2 \\ -2x+6 & \\ \underline{-(-2x+6)} & \\ 0 & \end{array}$$

Ainsi $f(x)$ se simplifie en $f(x) = x-2$ et on a $\underline{D = \mathbb{R}}$.



On a $\underline{\underline{f(D) = \mathbb{R}}}$.

b) Si on n'avait pas simplifier f, on aurait pu dire qu'il y avait un problème en $x=3$ (on ne peut pas diviser par zéro).

Dans ce cas, on a :

si $x \underset{<}{\longrightarrow} 3$, $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} = x-2 \longrightarrow 1$;

si $x \underset{>}{\longrightarrow} 3$, $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} = x-2 \longrightarrow 1$.

Ainsi, la fonction f vaut 1 lorsque x s'approche (et vaut) 3.

Exercice 7

a) $y = \dfrac{x^2-5x+3}{2x-6}$.

Commençons par voir si on peut simplifier cette fonction, autrement dit si x^2-5x+3 se divise par $2x-6$:

$$\begin{array}{r|l} x^2-5x+3 & 2x-6 \\ \cline{2-2} -(x^2-3x) & \frac{1}{2}x-1 \\ \hline -2x+3 & \\ -(-2x+6) & \\ \hline -3 & \end{array}$$

Comme le reste n'est pas nul, x^2-5x+3 ne se divise pas par $2x-6$ et la fonction ne peut pas se simplifier.

Pour déterminer le domaine de définition, il faut que le dénominateur soit non nul.

On a : $2x-6=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$.

Ainsi le domaine de définition est $\underline{D=\mathbb{R}\setminus\{3\}}$ (tous les nombres réels sauf 3).

Si $x \underset{<}{\to} 3$, $y=\dfrac{x^2-5x+3}{2x-6} \to \dfrac{9-15+3}{0_-} = \dfrac{-3}{0_-} = +\infty$ (0_- signifie que l'on s'approche de 0 avec des valeurs négatives).

Si $x \underset{>}{\to} 3$, $y=\dfrac{x^2-5x+3}{2x-6} \to \dfrac{9-15+3}{0_+} = \dfrac{-3}{0_+} = -\infty$ (0_+ signifie que l'on s'approche de 0 avec des valeurs positives).

On a ainsi : $x \underset{<}{\to} 3 \Rightarrow y \to +\infty$,

$x \underset{>}{\to} 3 \Rightarrow y \to -\infty$.

b) $y = \dfrac{4x-3}{x^2-4}$.

Comme $x^2-4=(x+2)(x-2)$, y ne peut pas se simplifier.

Pour déterminer le domaine de définition, il faut que le dénominateur soit non nul.

On a : $x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2$ et $x=-2$.

Ainsi le domaine de définition est $\underline{D=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}}$.

Si $x \underset{<}{\to} -2$, $y=\dfrac{4x-3}{x^2-4} \to \dfrac{-8-3}{0_+} = \dfrac{-11}{0_+} = -\infty$.

Si $x \underset{>}{\to} -2$, $y=\dfrac{4x-3}{x^2-4} \to \dfrac{-8-3}{0_-} = \dfrac{-11}{0_-} = +\infty$.

Si $x \underset{<}{\to} 2$, $y=\dfrac{4x-3}{x^2-4} \to \dfrac{8-3}{0_-} = \dfrac{5}{0_-} = -\infty$.

Si $x \underset{>}{\to} 2$, $y=\dfrac{4x-3}{x^2-4} \to \dfrac{8-3}{0_+} = \dfrac{5}{0_+} = +\infty$.

On a ainsi : $x \underset{<}{\to} -2 \Rightarrow y \to -\infty$, $x \underset{>}{\to} -2 \Rightarrow y \to +\infty$,

$x \underset{<}{\to} 2 \Rightarrow y \to -\infty$ et $x \underset{>}{\to} 2 \Rightarrow y \to +\infty$.

c) $y = \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3}$.

Voyons si y peut se simplifier. Pour voir cela, on va factoriser le numérateur et le dénominateur de la fraction.

On sait que $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$.

$x^2 - x - 12$: $x^2 - x - 12 = 0$: $a = 1$, $b = -1$ et $c = -12$;

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 48 = 49$; $\sqrt{\Delta} = 7$;

ainsi $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+7}{2} = 4$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-7}{2} = -3$;

ainsi $x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3)$.

$x^2 + 2x - 3$: $x^2 + 2x - 3 = 0$: $a = 1$, $b = 2$ et $c = -3$;

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 12 = 16$; $\sqrt{\Delta} = 4$;

ainsi $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+4}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-4}{2} = -3$.

On obtient donc $y = \dfrac{(x-4)(x+3)}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{x-4}{x-1}$.

Pour déterminer le domaine de définition, il faut que le dénominateur soit non nul.

On a : $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.

Ainsi le domaine de définition est : $\underline{\underline{D = \mathbb{R} - \{1\}}}$.

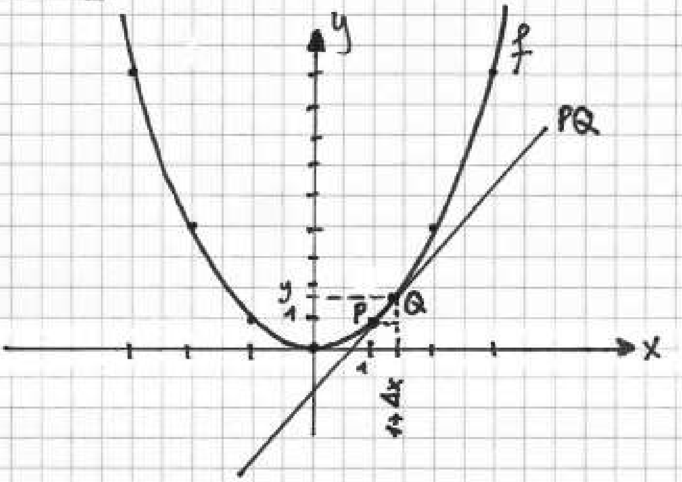
Si $x \underset{<}{\longrightarrow} 1$, $y = \dfrac{x-4}{x-1} \longrightarrow \dfrac{1-4}{0_-} = \dfrac{-3}{0_-} = +\infty$.

Si $x \underset{>}{\longrightarrow} 1$, $y = \dfrac{x-4}{x-1} \longrightarrow \dfrac{1-4}{0_+} = \dfrac{-3}{0_+} = -\infty$.

On a ainsi : $\underline{\underline{x \underset{<}{\longrightarrow} 1 \Rightarrow y \longrightarrow +\infty \text{ et } x \underset{>}{\longrightarrow} 1 \Rightarrow y \longrightarrow -\infty}}$.

Exercice 8

a)



On a $y = (1+\Delta x)^2$

b) La pente de la sécante PQ sera donnée par: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(1+\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \dfrac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} =$

$$= \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x} = 2 + \Delta x.$$

$\Delta x = 1 \Rightarrow$ pente $= 2+1 = 3.$

$\Delta x = 0{,}5 \Rightarrow$ pente $= 2+0{,}5 = 2{,}5.$

$\Delta x = 0{,}4 \Rightarrow$ pente $= 2+0{,}4 = 2{,}4.$

$\Delta x = 0{,}3 \Rightarrow$ pente $= 2+0{,}3 = 2{,}3.$

$\Delta x = 0{,}2 \Rightarrow$ pente $= 2+0{,}2 = 2{,}2.$

$\Delta x = 0{,}1 \Rightarrow$ pente $= 2+0{,}1 = 2{,}1.$

$\Delta x = 0{,}01 \Rightarrow$ pente $2+0{,}01 = 2{,}001.$

c) Si $\Delta x \to 0$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2 + \Delta x \to 2.$

Ainsi la pente de la tangente au graphe de f au point $(1;1)$ est 2.

d) On a $P(x;y)$ et $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ avec $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$

Ainsi: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \dfrac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$

$$= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Donc $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = \underline{\underline{2x}}.$

Exercice 9

a) $y = 2x+5$.

On a $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2(x+\Delta x)+5-(2x+5)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2x+2\Delta x+5-2x-5}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2 = \underline{\underline{2}}.$

b) $y = 3x^2-4x+7$.

On a $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)+7-(3x^2-4x+7)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3x^2+6x\Delta x+3(\Delta x)^2-4x-4\Delta x+7-3x^2+4x-7}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{6x\Delta x+3(\Delta x)^2-4\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x(6x+3\Delta x-4)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (6x+3\Delta x-4) = \underline{\underline{6x-4}}.$

c) $y = ax+b$.

On a $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a(x+\Delta x)+b-(ax+b)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{ax+a\Delta x+b-ax-b}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} a = \underline{\underline{a}}.$

d) $y = ax^2+bx+c$.

On a $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c-(ax^2+bx+c)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{ax^2+2ax\Delta x+(\Delta x)^2+bx+b\Delta x+c-ax^2-bx-c}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2ax\Delta x+(\Delta x)^2+b\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x(2a+\Delta x+b)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2a+\Delta x+b) = \underline{\underline{2a+b}}.$

e) $y = c$.

On a $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{c-c}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = \underline{\underline{0}}.$

f) $y = x^3$.

On a $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2\right) = \underline{\underline{3x^2}}.$

Exercice 10

On a : $y = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

En $x=0$, si $\Delta x \underset{<}{\to} 0$ (donc $\Delta x < 0$), on a $y = -x$ et

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ <}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ <}} \frac{-(x+\Delta x)-(-x)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ <}} \frac{-x-\Delta x+x}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ <}} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ <}} -1 = \underline{\underline{-1}}.$$

En $x=0$, si $\Delta x \underset{>}{\to} 0$ (donc $\Delta x > 0$), on a $y = x$ et

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ >}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ >}} \frac{x+\Delta x-x}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ >}} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ >}} 1 = \underline{\underline{1}}.$$

Ainsi $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ <}} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ >}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ et, donc, $\underline{\underline{y' \text{ n'existe pas en } x = 0}}$.

Exercice 11

Pour que $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \leq 0 \\ x \text{ si } x > 0 \end{cases}$ soit dérivable en $x = 0$, il faut que

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ <}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ >}} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ en } x = 0.$$

En $x = 0$, si $\Delta x \underset{<}{\to} 0$ (donc $\Delta x < 0$), on a $y = x^2$ et

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ <}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ <}} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ <}} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ <}} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ <}} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ <}} (2x + \Delta x) = 2x \text{ vaut } 0 \text{ si } x = 0.$$

En $x = 0$, si $\Delta x \underset{>}{\to} 0$ (donc $\Delta x > 0$), on a $y = x$ et

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ >}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ >}} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ >}} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ >}} 1 = 1 \text{ (en } x = 0.\text{)}.$$

Comme, en $x = 0$, $\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ <}} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ >}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, **$f$ n'est pas dérivable en $x = 0$.**

Exercice 12

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - \frac{22}{3}$.

Les points à tangente horizontale sont les points $(x;y)$ tels que $f'(x) = 0$.

On a : $f'(x) = \frac{1}{3}3x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x - 3$;

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$: $a = 1$, $b = 2$ et $c = -3$;

$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$; $\sqrt{\Delta} = 4$;

ainsi $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+4}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$ et

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-4}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$.

Avec $x = 1$, on a $y = f(1) = \frac{1}{3}1^3 + 1^2 - 3 - \frac{22}{3} = \frac{1}{3} - 2 - \frac{22}{3} = -2 - \frac{21}{3} = -2 - 7 = -9$.

Avec $x = -3$, on a $y = f(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 + (-3)^2 - 3 \cdot (-3) - \frac{22}{3} = \frac{1}{3}(-27) + 9 + 9 - \frac{22}{3} =$

$= -9 + 9 + 9 - \frac{22}{3} = 9 - \frac{22}{3} = \frac{27}{3} - \frac{22}{3} = \frac{5}{3}$.

Les points à tangente horizontale sont donc $\underline{\left(-3; \frac{5}{3}\right) \text{ et } (1; -9)}$.

Les intersections avec l'axe y sont les points $(x;y)$ tels que $x = 0$.

Avec $x = 0$, on a $y = f(0) = -\frac{22}{3}$.

L'intersection avec l'axe y est donc $\underline{\left(0; -\frac{22}{3}\right)}$.

Les intersections avec l'axe x sont les points $(x;y)$ tels que $y = 0$.

On doit donc résoudre $f(x) = 0$, i.e. $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - \frac{22}{3} = 0$.

On sait que $f(-2) = 0$. Autrement $x = -2$ est une solution de cette équation.

En outre, cela signifie que $f(x)$ se divise par $x + 2$.

Effectuons cette division :

$$
\begin{array}{r|l}
\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - \frac{22}{3} & x+2 \\
\hline
-\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2\right) & \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{11}{3} \\
\frac{1}{3}x^2 - 3x - \frac{22}{3} & \\
-\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x\right) & \\
-\frac{11}{3}x - \frac{22}{3} & \\
-\left(-\frac{11}{3}x - \frac{22}{3}\right) & \\
0 &
\end{array}
$$

On a ainsi $f(x) = (x+2)\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}\right)$.

$f(x) = 0$ signifie alors que soit $x + 2 = 0$ (i.e. $x = -2$, solution que l'on a déjà), soit

$\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{11}{3} = 0$, i.e. $x^2 + x - 11 = 0$.

Cette dernière équation nous donnera les autres solutions de $f(x) = 0$.

$x^2 + x - 11 = 0$: $a = 1$, $b = 1$, $c = -11$;

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-11) = 1 + 44 = 45$;

$$\text{ainsi } x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{45}}{2} \cong 2{,}8541 \text{ et}$$

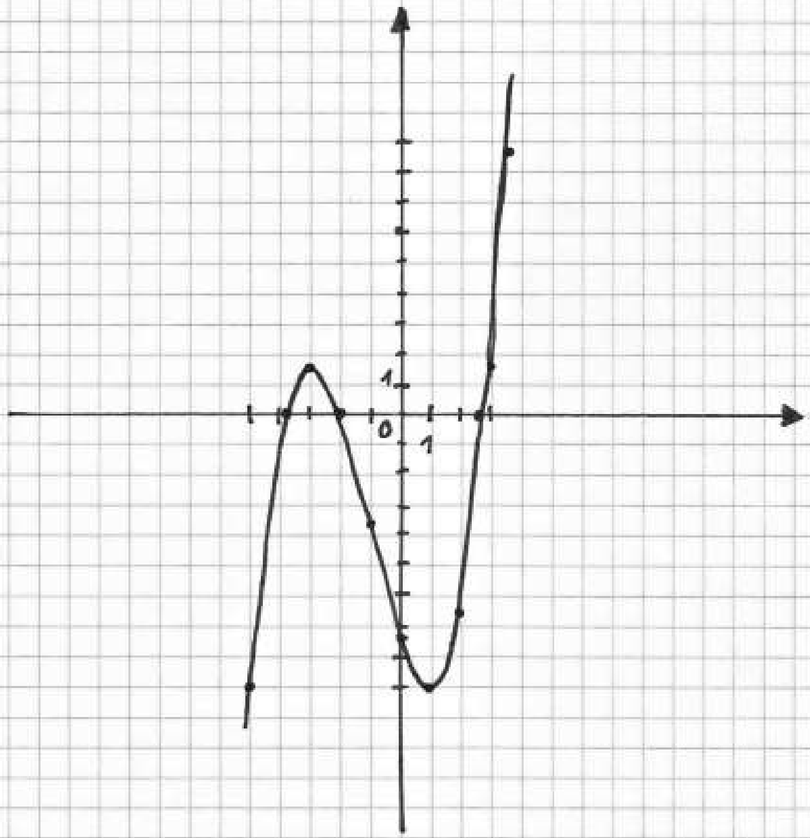
$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{45}}{2} \cong -3{,}8541.$$

Les intersections avec l'axe x sont donc : $(-3{,}8541 ; 0)$, $(-2 ; 0)$ et $(2{,}8541 ; 0)$.

On peut maintenant dessiner le graphe de f :

x	$-3{,}8541$	-2	$2{,}8541$	0	-3	1	-5	-1	2	3	$3{,}5$
$f(x)$	0	0	0	$-7{,}333$	$1{,}667$	-9	-9	$-3{,}667$	$-6{,}667$	$1{,}667$	$8{,}708$

$\underbrace{1{,}667 \quad -9}_{\text{points à tangente horizontale}}$



Exercice 13

L'équation de la tangente est de la forme $y=ax+b$.

a est la pente de la droite et vaut $f'(2)$.

On a $f(x)=-2x^2+4x+6$ et, donc, $f'(x)=-2\cdot 2x+4=-4x+4$.

Ainsi $f'(2)=-4\cdot 2+4=-8+4=-4$.

On a donc $a=-4$ et l'équation de la tangente s'écrit $y=-4x+b$.

Le point de tangence, point commun entre le graphe de f et celui de la tangence est $(2;f(2))$. On a $f(2)=-2\cdot 2^2+4\cdot 2+6=-2\cdot 4+8+6=-8+8+6=6$.

Par substitution dans l'équation de la tangente, on a alors $6=-4\cdot 2+b$, i.e. $6=-8+b$, d'où $b=14$.

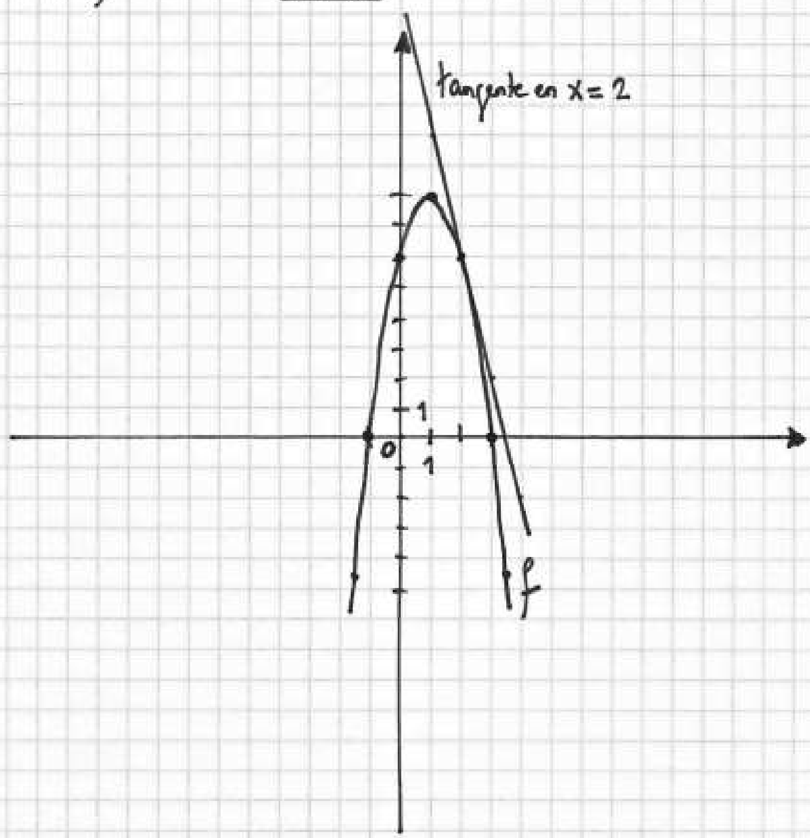
L'équation de la tangente est donc $\underline{\underline{y=-4x+14}}$.

Le sommet d'une parabole $y=ax^2+bx+c$ est donné par $(x_s;y_s)$, où $x_s=-\frac{b}{2a}$ et $y_s=ax_s^2+bx_s+c$.

Ici $y=-2x^2+4x+6$ et, donc, $a=-2$, $b=4$ et $c=6$.

On a alors $x_s=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot(-2)}=-\frac{4}{-4}=1$ et $y_s=-2\cdot 1^2+4\cdot 1+6=-2+4+6=8$.

Donc le sommet de la parabole est $\underline{\underline{(1;8)}}$.



Exercice 14

La tangente t s'écrit $y = 5x - 10$.

Sa pente est 5.

On doit alors avoir $f'(4) = 5$.

On a $f(x) = x^2 + bx + c$ et, donc $f'(x) = 2x + b$.

$f'(4) = 5 \Rightarrow 2 \cdot 4 + b = 5 \Rightarrow 8 + b = 5 \Rightarrow \underline{\underline{b = -3.}}$

On a ainsi $f(x) = x^2 + 5x + c$.

Le point de tangence est $(4 ; y)$, où $y = 5x - 10 = 5 \cdot 4 - 10 = 20 - 10 = 10$.

Par substitution dans $f(x) = x^2 + 5x + c$, on obtient : $4^2 + 5 \cdot 4 + c = 10$, i.e.

$16 + 20 + c = 10$, i.e. $\underline{\underline{c = -26.}}$

Exercice 15

On a $f(x) = \frac{1}{x}$.

Ainsi $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

D'où $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta y \cdot \frac{1}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)} \cdot \frac{1}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x+\Delta x)}$.

Lorsque $\Delta x \to 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to -\frac{1}{x \cdot x} = -\frac{1}{x^2}$.

Ainsi $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Exercice 16

On a $f(x) = \sin(x)$.

Ainsi $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin(x)$.

Avec la formule $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $p = x+\Delta x$ et $q = x$, on trouve $\Delta y = 2\cos\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\Delta x-x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$.

Donc $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = 2\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$.

A la page 72 de "Formulaires et tables", on trouve : $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$.

Ainsi $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = 1$, d'où, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Par conséquent, lorsque $\Delta x \to 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2\cos\left(\frac{2x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = \cos(x)$.

Donc, la dérivée de $f(x) = \sin(x)$ est $\underline{\underline{f'(x) = \cos(x)}}$.

Exercice 17

a) $y = \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (x+\Delta x)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \Delta x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Avec la formule $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$, $p = \frac{\pi}{2} - x - \Delta x$ et $q = \frac{\pi}{2} - x$, on trouve :

$$\Delta y = 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x - \Delta x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x - \Delta x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi - 2x - \Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{-\Delta x}{2}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi - 2x - \Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right), \text{ puisque}$$

$\sin(-z) = -\sin(z)$.

Ainsi : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\cos\left(\frac{\pi - 2x - \Delta x}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -2\cos\left(\frac{\pi - 2x - \Delta x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$.

A la page 72 de "Formulaires et tables", on trouve : $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$.

Ainsi $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = 1$, d'où, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Par conséquent, lorsque $\Delta x \to 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to -2\cos\left(\frac{\pi - 2x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = -\cos\left(\frac{\pi - 2x}{2}\right)$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x).$$

Donc, la dérivée de $\cos(x)$ est $\underline{\underline{-\sin(x)}}$.

b) $y = \sin^2(x) = \sin(x)\cdot\sin(x) = u\cdot v$.

$y' = u'v + uv'$, où $u = \sin(x)$, $u' = \cos(x)$, $v = \sin(x)$, $v' = \cos(x)$.

Ainsi $y' = \cos(x)\sin(x) + \sin(x)\cos(x) = \underline{\underline{2\cos(x)\sin(x)}}$.

c) $y = \cos(x^2)$.

On a :
$$\begin{array}{ccccc} x & \longmapsto & w = x^2 & \longmapsto & y = \cos(w) \\ & & \big\downarrow \text{ dérivée} & & \big\downarrow \text{ dérivée} \\ & & 2x & & -\sin(w) = -\sin(x^2). \end{array}$$

Ainsi $y' = \underline{\underline{-2x\sin(x^2)}}$.

d) $y = \sin(ax+b)$

On a :
$$\begin{array}{ccccc} x & \longmapsto & w = ax+b & \longmapsto & y = \sin(w) \\ & & \big\downarrow \text{ dérivée} & & \big\downarrow \text{ dérivée} \\ & & a & & \cos(w) = \cos(ax+b). \end{array}$$

Ainsi $y' = \underline{\underline{a\cos(ax+b)}}$.

e) $y = \dfrac{1}{x^2+3x} = \dfrac{u}{v}$.

$y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u=1$, $u'=0$, $v = x^2+3x$, $v' = 2x+3$.

Ainsi $y' = \dfrac{0 \cdot (x^2+3x) - 1 \cdot (2x+3)}{(x^2+3x)^2} = \underline{\underline{-\dfrac{2x+3}{(x^2+3x)^2}}}$.

f) $y = \dfrac{2}{\sin(x)} = \dfrac{u}{v}$.

$y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u=2$, $u'=0$, $v=\sin(x)$, $v' = \cos(x)$.

Ainsi $y' = \dfrac{0 \cdot \sin(x) - 2 \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)} = \underline{\underline{-\dfrac{2\cos(x)}{\sin^2(x)}}}$.

Exercice 18

a) $y = x \cdot \cos(x) = u \cdot v$ avec $u = x$ et $v = \cos(x)$.

$y' = u'v + uv'$ avec $u' = 1$ et $v' = -\sin(x)$.

Ainsi $y' = 1 \cdot \cos(x) + x \cdot (-\sin(x)) = \underline{\underline{\cos(x) - x\sin(x)}}$.

b) $y = x^2 \cdot \sin(x) = u \cdot v$ avec $u = x^2$ et $v = \sin(x)$.

$y' = u'v + uv'$ avec $u' = 2x$ et $v' = \cos(x)$.

Ainsi $y' = 2x\sin(x) + x^2\cos(x) = \underline{\underline{x\,(2\sin(x) + x\cos(x))}}$.

c) $y = \dfrac{3x+2}{x-4} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = 3x+2$ et $v = x-4$.

$y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u' = 3$ et $v' = 1$.

Ainsi $y' = \dfrac{3(x-4) - 1(3x+2)}{(x-4)^2} = \dfrac{3x - 12 - 3x - 2}{(x-4)^2} = \underline{\underline{\dfrac{-14}{(x-4)^2}}}$.

d) $y = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = \sin(x)$ et $v = \cos(x)$.

$y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u' = \cos(x)$ et $v' = -\sin(x)$.

Ainsi $y' = \dfrac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \underline{\underline{\dfrac{1}{\cos^2(x)}}}$

(puisque $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$).

e) $y = \dfrac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = \sin(ax+b)$ et $v = \cos(cx+d)$.

$y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u' = a\cos(ax+b)$ et $v = -c\sin(cx+d)$.

Ainsi $y' = \underline{\underline{\dfrac{a\cos(ax+b)\cos(cx+d) + c\sin(ax+b)\sin(cx+d)}{\cos^2(cx+d)}}}$.

f) $y = \sqrt{1 - \cos(x)}$

$$\begin{array}{ccccc} x & \longmapsto & w = 1 - \cos(x) & \longmapsto & y = \sqrt{w} \\ & & \Big\downarrow \text{dérivée} & & \Big\downarrow \text{dérivée} \\ & & \sin(x) & & \dfrac{1}{2\sqrt{w}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-\cos(x)}}. \end{array}$$

Ainsi $y' = \underline{\underline{\dfrac{\sin(x)}{2\sqrt{1-\cos(x)}}}}$.

g) $y = \cos(2x) \cdot \sin(x) = u \cdot v$ avec $u = \cos(2x)$ et $v = \sin(x)$.

$y' = u'v + uv'$ avec $u' = -2\sin(2x)$ et $v' = \cos(x)$.

Ainsi $y' = \underline{\underline{-2\sin(2x)\sin(x) + \cos(2x)\cos(x)}}$.

h) $y = x \cdot \tan(x) = u \cdot v$ avec $u = x$ et $v = \tan(x)$.

$y' = u'v + uv'$ avec $u' = 1$ et $v' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

Ainsi $y' = 1 \cdot \tan(x) + x \dfrac{1}{\cos^2(x)} = \underline{\underline{\tan(x) + \dfrac{x}{\cos^2(x)}}}$.

i) $y = \dfrac{\cos(3x)}{1 - x^2} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = \cos(3x)$ et $v = 1 - x^2$.

$y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u' = -3\sin(3x)$ et $v' = -2x$.

Ainsi $y' = \underline{\underline{\dfrac{-3\sin(3x)(1 - x^2) + 2x\cos(3x)}{(1 - x^2)^2}}}$.

Exercice 19

a) Cherchons les points à tangente horizontale de $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$, i.e. les x tels que $f'(x) = 0$.

On a $f(x) = \frac{x-3}{x+4} = \frac{u}{v}$ avec $u = x-3$ et $v = x+4$.

Ainsi $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u' = 1$ et $v' = 1$.

Donc $f'(x) = \frac{x+4-(x-3)}{(x+4)^2} = \frac{x+4-x+3}{(x+4)^2} = \frac{7}{(x+4)^2}$.

Pour avoir $f'(x) = 0$, il faut que $\frac{7}{(x+4)^2} = 0$, i.e. $7 = 0$, ce qui est exclu.

Ainsi f n'admet aucun point à tangente horizontale.

b) L'équation de la tangente en $x = 3$ est $y = ax + b$ où $a = f'(3)$.

On a $f'(x) = \frac{7}{(x+4)^2}$. Ainsi $f'(3) = \frac{7}{7^2} = \frac{1}{7}$ et, donc, $a = \frac{1}{7}$ et la tangente s'écrit $y = \frac{1}{7}x + b$.

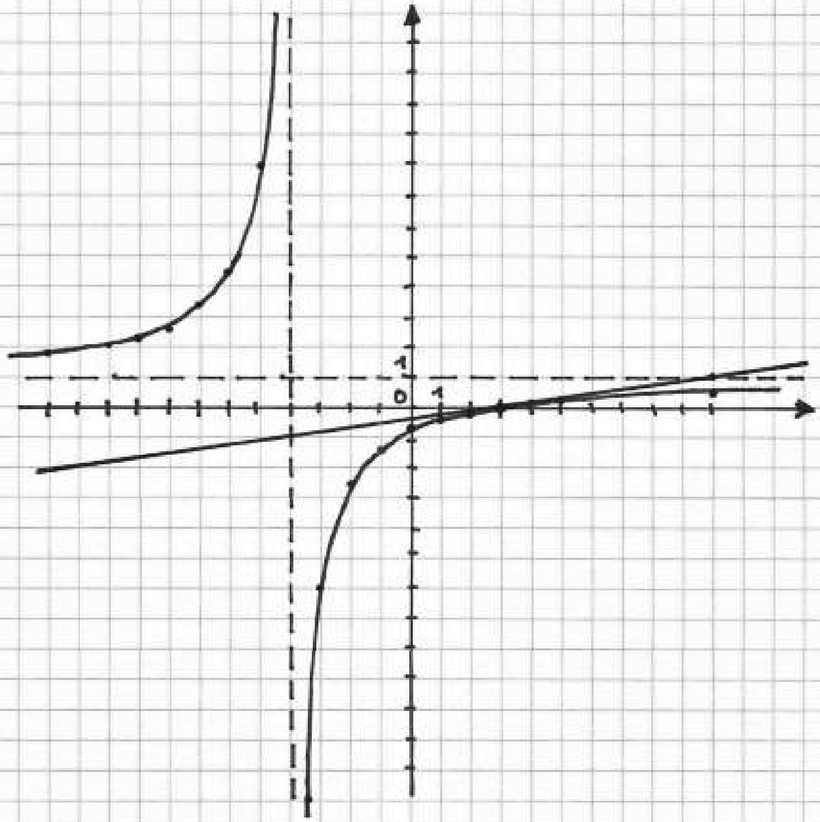
Le point de tangence est $(3; f(3))$.

On a $f(3) = \frac{3-3}{3+4} = \frac{0}{7} = 0$.

On doit donc, par substitution dans $y = \frac{1}{7}x + b$, avoir $0 = \frac{1}{7} \cdot 3 + b$, i.e. $b = -\frac{3}{7}$.

L'équation de la tangente est donc $y = \frac{1}{7}x - \frac{3}{7}$.

c)



Exercice 20

a) La parabole est $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

Son sommet est son point à tangente horizontale.

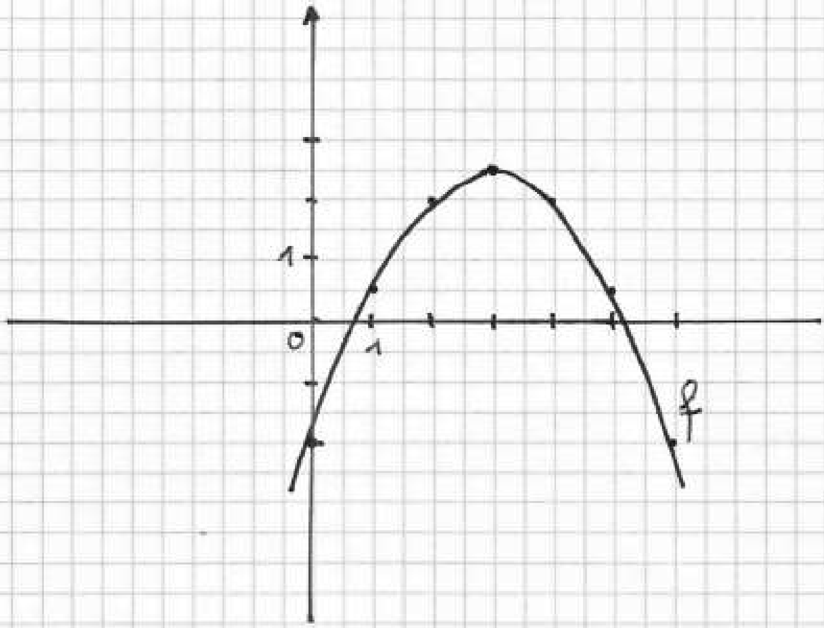
On cherche donc x tel que $f'(x) = 0$.

On a $f'(x) = -\frac{1}{2}2x + 3 = -x + 3$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow -x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3$.

Avec $x = 3$, on a $f(x) = -\frac{1}{2}\cdot 3^2 + 3.3 - 2 = -\frac{9}{2} + 9 - 2 = -\frac{9}{2} + 7 = -\frac{9}{2} + \frac{14}{2} = \frac{5}{2}$.

Son sommet est donc $\underline{(3; \frac{5}{2})}$.



b) On veut une tangente passant par l'origine, donc une tangente de la forme $y = ax$ (fonction linéaire), où a est la pente.

On cherche donc un (ou des) x_0 tel que $a = f'(x_0)$ et $f(x_0) = ax_0$ (point de tangence).

On a $f'(x_0) = -x_0 + 3$ (voir ci-dessus).

On obtient donc les 2 équations suivantes: $-x_0 + 3 = a$ ①

et $-\frac{1}{2}x_0^2 + 3x_0 - 2 = ax_0$ ②.

En substituant ① dans ②, on trouve $-\frac{1}{2}x_0^2 + 3x_0 - 2 = (-x_0 + 3)x_0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}x_0^2 + 3x_0 - 2 = -x_0^2 + 3x_0 \Rightarrow \frac{1}{2}x_0^2 - 2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x_0^2 = 2$

$\Rightarrow x_0^2 = 4 \Rightarrow x_0 = \pm 2$.

Avec $x_0 = 2$, on a $f(x_0) = -\frac{1}{2}.2^2 + 3.2 - 2 = -2 + 6 - 2 = 2$.

Avec $x_0 = -2$, on a $f(x_0) = -\frac{1}{2}(-2)^2 + 3\cdot(-2) - 2 = -2 - 6 - 2 = -10$.

Les points cherchés sont donc $\underline{A(2; 2) \text{ et } B(-2; -10)}$.

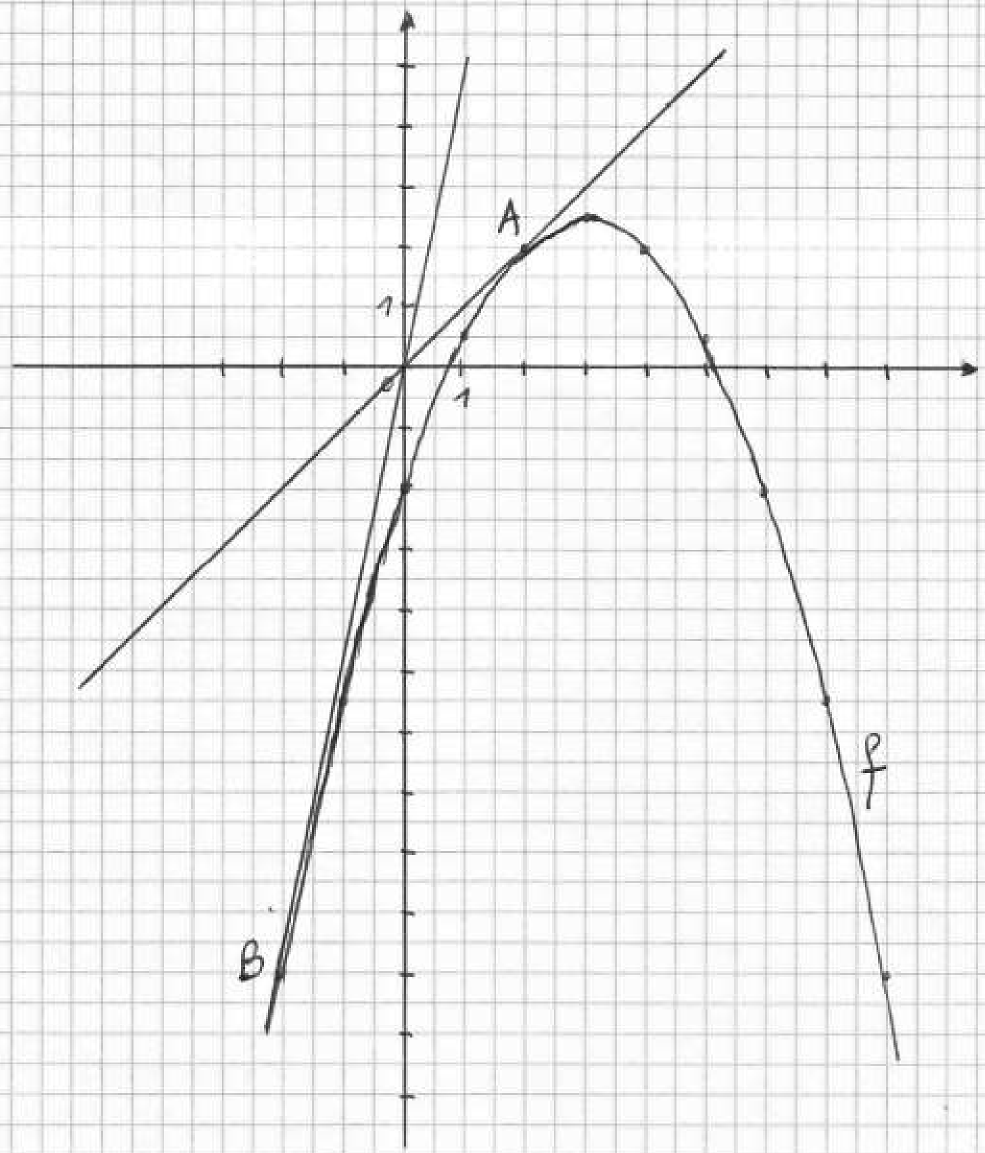
Avec $x_0 = 2$, on a $a = -x_0 + 3 = -2 + 3 = 1$.

Avec $x_0 = -2$, on a $a = -x_0 + 3 = 2 + 3 = 5$.

Ainsi les tangentes sont : $y = x$ en $A(2;2)$ et

$\underline{\underline{y = 5x \text{ en } B(-2;-10)}}$.

c)



Exercice 21

On a $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 4$.

Les points à tangente horizontale sont les $(x;y)$ tels que $f'(x) = 0$.

On a $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - 2$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 + 2x - 2 = 0$: $a = \frac{3}{2}$, $b = 2$, $c = -2$;

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot (-2) = 4 + 12 = 16 ; \ \sqrt{\Delta} = 4 ;$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+4}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-4}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{-6}{3} = -2.$$

Avec $x_1 = \frac{2}{3}$, on a $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} - 4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{27} + \frac{4}{9} - \frac{4}{3} - 4 =$

$$= \frac{4}{27} + \frac{4}{9} - \frac{4}{3} - 4 = -\frac{128}{27} \ (\simeq -4{,}74).$$

Avec $x_2 = -2$, on a $f(x) = \frac{1}{2}(-2)^3 + (-2)^2 - 2(-2) - 4 = \frac{1}{2}(-8) + 4 + 4 - 4 = -4 + 4 = 0.$

Les points à tangente horizontale sont donc $\underline{\left(\frac{2}{3} ; -\frac{128}{27}\right) \text{ et } (-2 ; 0)}$.

Etablissons un tableau de croissance pour f :

x		-2		$\frac{2}{3}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max en $(-2;0)$	$\searrow$	min en $\left(\frac{2}{3};-\frac{128}{27}\right)$	$\nearrow$

Ainsi $\underline{f \text{ est croissante sur }]-\infty;-2] \cup \left[\frac{2}{3};+\infty\right[\text{ et décroissante sur } \left[-2;\frac{2}{3}\right]}$.

Cherchons les zéros de f, autrement dit les x tels que $\frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 4 = 0$.

D'après ce qui a été vu ci-dessus, on a $f(-2) = 0$; autrement dit $x = -2$ est une solution de $\frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 4 = 0$.

Cela signifie que le polynôme $\frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 4$ se divise par $x+2$.

Effectuons cette division:

$$\begin{array}{rr|l}
 & \frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 4 & x+2 \\
\hline
 & -\left(\frac{1}{2}x^3 + x^2\right) & \frac{1}{2}x^2 - 2 \\
 & -2x - 4 & \\
 & -(-2x-4) & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Ainsi on a: $\frac{1}{2}x^3 + x^2 - 2x - 4 = (x+2)\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)$.

Les solutions de $\frac{1}{2}x^3+x^2-2x-4=0$ sont donc les solutions de
$\left(x+2\right)\left(\frac{1}{2}x^2-2\right)=0$.

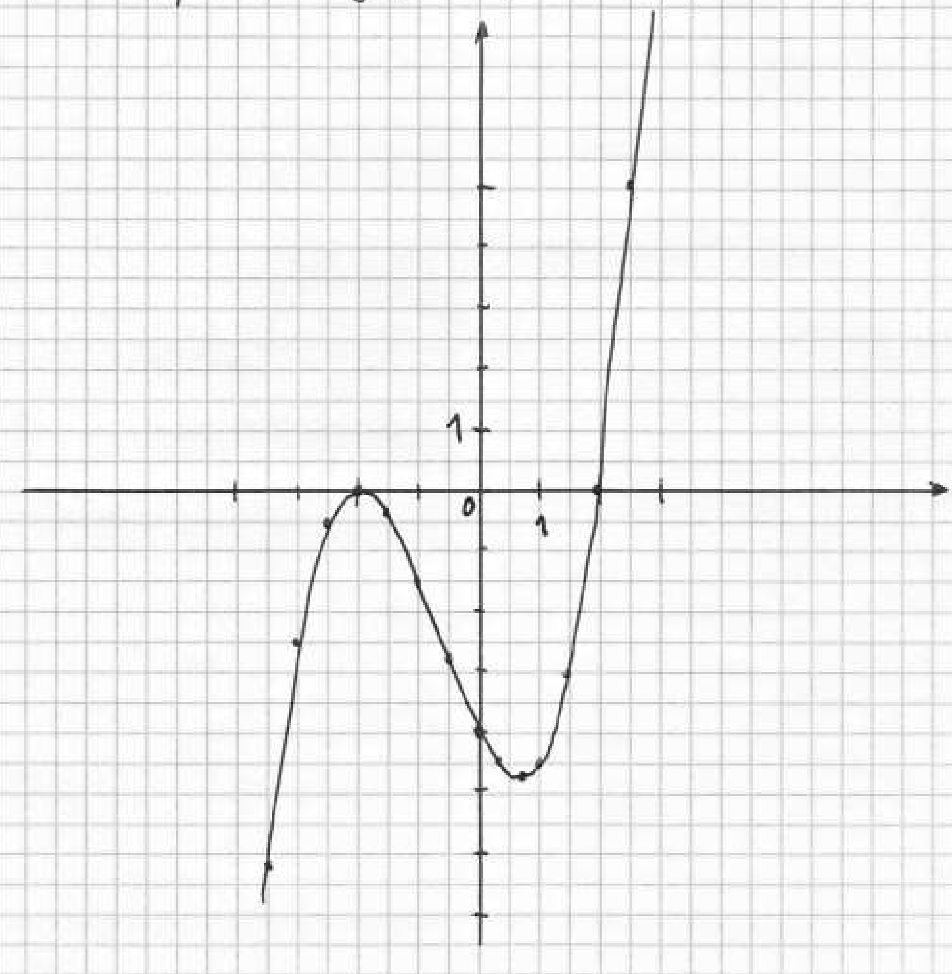
Comme un produit ne peut être nul que si au moins un de ses facteurs est nul, on a :

— soit $x+2=0$, i.e. $x=-2$ (solution déjà trouvée) ;

— soit $\frac{1}{2}x^2-2=0$, i.e. $\frac{1}{2}x^2=2$, i.e. $x^2=4$, i.e. $x=2$ ou $x=-2$.

Les zéros de f sont donc $(-2\,;0)$ et $(2\,;0)$.

On peut maintenant représenter le graphe de f :



Exercice 22

a) On commence par chercher les asymptotes verticales.

Pour cela, on cherche les exclus, i.e. les x pour lesquels on ne peut pas calculer la fonction.

Ici, on doit avoir $x^2-2x \neq 0$.

Si $x^2-2x=0$, on a $x(x-2)=0$ et, donc, soit $x=0$, soit $x-2=0$, i.e. $x=2$.

Les exclus sont donc $x=0$ et $x=2$.

On aura ainsi <u>2 asymptotes horizontales : en $x=0$ et en $x=2$.</u>

$$\text{Si } x \underset{<}{\to} 0,\ y=\frac{2x^2+5x+4}{x^2-2x} \to \frac{4}{0_+}=+\infty.$$

$$\text{Si } x \underset{>}{\to} 0,\ y=\frac{2x^2+5x+4}{x^2-2x} \to \frac{4}{0_-}=-\infty.$$

$$\text{Si } x \underset{<}{\to} 2,\ y=\frac{2x^2+5x+4}{x^2-2x} \to \frac{2\cdot 2^2+5\cdot 2+4}{0_-}=-\infty.$$

$$\text{Si } x \underset{>}{\to} 2,\ y=\frac{2x^2+5x+4}{x^2-2x} \to \frac{2\cdot 2^2+5\cdot 2+4}{0_+}=+\infty.$$

Cherchons maintenant les asymptotes horizontales.

$$\text{On peut écrire } y=\frac{2x^2+5x+4}{x^2-2x}=\frac{x^2\left(2+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\frac{2+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}.$$

Lorsque $x \to \pm\infty$, $\frac{5}{x} \to 0$, $\frac{4}{x^2} \to 0$ et $\frac{2}{x} \to 0$.

Ainsi, lorsque $x \to \pm\infty$, $y \to \frac{2}{1}=2$.

<u>$y=2$ est donc une asymptote horizontale.</u>

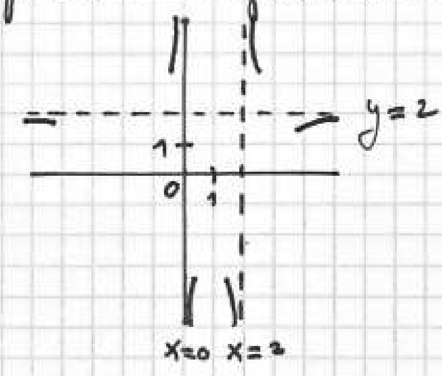
Lorsque $x \to +\infty$, $\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2} \to 0_+$ et $\frac{2}{x} \to 0_+$.

Ainsi $y \to \frac{2+}{1-}=2_-$.

Lorsque $x \to -\infty$, $\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}=\frac{5x+4}{x^2} \to 0_-$ et $\frac{2}{x} \to 0_+$.

Ainsi $y \to \frac{2-}{1+}=2_-$.

On peut résumer graphiquement le comportement asymptotique comme suit :



b) On commence par chercher les asymptotes verticales.

Pour cela, on cherche les exclus, i.e. les x pour lesquels on ne peut pas calculer la fonction.

Ici, on doit avoir $x-2 \neq 0$, i.e. $x \neq 2$.

On aura ainsi une asymptote horizontale : en $x = 2$.

Si $x \underset{<}{\longrightarrow} 2$, $\dfrac{x^2-4x+2}{x-2} \longrightarrow \dfrac{-2}{0_-} \longrightarrow +\infty$.

Si $x \underset{>}{\longrightarrow} 2$, $\dfrac{x^2-4x+2}{x-2} \longrightarrow \dfrac{-2}{0_+} \longrightarrow -\infty$.

Cherchons maintenant les asymptotes non verticales.

Comme le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur, on peut effectuer la division:

$$\begin{array}{r|l} x^2-4x+2 & x-2 \\ \cline{2-2} -(x^2-2x) & x-2 \\ \cline{1-1} -2x+2 & \\ -(-2x+4) & \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

On peut donc écrire $y = x-2 + \dfrac{-2}{x-2}$.

Ainsi on a une asymptote oblique : en $y = x-2$.

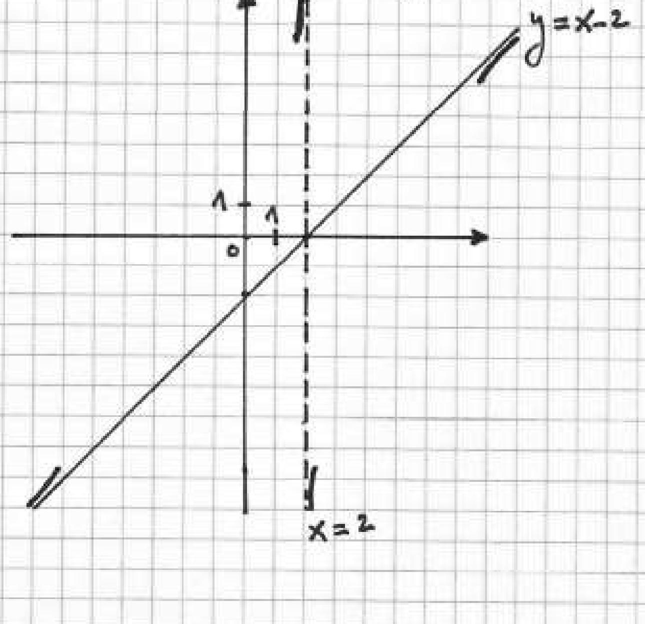
Lorsque $x \longrightarrow +\infty$, $\dfrac{-2}{x-2} \longrightarrow \dfrac{-2}{+\infty} \longrightarrow 0_-$.

Ainsi $y \longrightarrow x-2$ par des valeurs inférieures lorsque $x \longrightarrow +\infty$.

Lorsque $x \longrightarrow -\infty$, $\dfrac{-2}{x-2} \longrightarrow \dfrac{-2}{-\infty} \longrightarrow 0_+$.

Ainsi $y \longrightarrow x-2$ par des valeurs supérieures lorsque $x \longrightarrow -\infty$.

On peut résumer graphiquement le comportement asymptotique comme suit :



c) On commence par chercher les asymptotes verticales.
Pour cela, on cherche les exclus, i.e. les x pour lesquels on ne peut pas calculer la fonction.
Ici, on doit avoir $x^2 - 3 \neq 0$, i.e. $x^2 \neq 3$, i.e. $x \neq \pm\sqrt{3}$.

Si $x \xrightarrow[<]{} -\sqrt{3}$, $\dfrac{5x-2}{x^2-3} \longrightarrow \dfrac{-5\sqrt{3}-2}{0+} = -\infty$.

Si $x \xrightarrow[>]{} -\sqrt{3}$, $\dfrac{5x-2}{x^2-3} \longrightarrow \dfrac{-5\sqrt{3}-2}{0-} = +\infty$.

Si $x \xrightarrow[<]{} \sqrt{3}$, $\dfrac{5x-2}{x^2-3} \longrightarrow \dfrac{5\sqrt{3}-2}{0-} = -\infty$.

Si $x \xrightarrow[>]{} \sqrt{3}$, $\dfrac{5x-2}{x^2-3} \longrightarrow \dfrac{5\sqrt{3}-2}{0+} = +\infty$.

On a ainsi 2 asymptotes horizontales : $x = -\sqrt{3}$ et $x = \sqrt{3}$.

Cherchons maintenant les asymptotes horizontales.

On peut écrire $y = \dfrac{5x-2}{x^2-3} = \dfrac{x\left(5-\frac{2}{x}\right)}{x\left(x-\frac{3}{x}\right)} = \dfrac{5-\frac{2}{x}}{x-\frac{3}{x}}$.

Lorsque $x \longrightarrow \pm\infty$, $5 - \frac{2}{x} \longrightarrow 0+$.

Lorsque $x \longrightarrow +\infty$, $x - \frac{3}{x} \longrightarrow +\infty$.

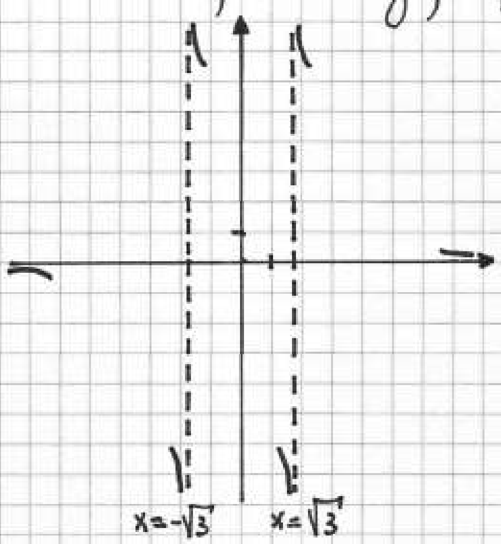
Lorsque $x \longrightarrow -\infty$, $x - \frac{3}{x} \longrightarrow -\infty$.

Ainsi, lorsque $x \longrightarrow +\infty$, $y \longrightarrow \dfrac{0+}{+\infty} = 0+$, et,

lorsque $x \longrightarrow -\infty$, $y \longrightarrow \dfrac{0+}{-\infty} = 0-$.

$y = 0$ est donc une asymptote horizontale.

On peut résumer graphiquement le comportement asymptotique comme suit :



Exercice 23

$$y = f(x) = \frac{-3x^2+12}{(x+1)^2}.$$

1. Domaine de définition: c'est l'ensemble des x pour lesquels on peut calculer f: on doit avoir

$$(x+1)^2 \neq 0 \Rightarrow x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow \underline{\underline{D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}}.$$

Parité: $f(-x) = \frac{-3(-x)^2+12}{(-x+1)^2} = \frac{-3x^2+12}{(x-1)^2} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ ni paire, ni impaire.

Périodicité: seules les fonctions trigonométriques sont périodiques $\Rightarrow$ pas périodique.

2. Intersection avec l'axe x: On pose $y=0$. On a $\frac{-3x^2+12}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow -3x^2+12 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12$

$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ et $x = -2$.

$\Rightarrow \underline{\underline{(-2;0) \text{ et } (2;0)}}.$

Intersection avec l'axe y: On pose $x=0$. On a alors $y = \frac{12}{1^2} = 12 \Rightarrow$ $(0;12)$.

3. Tableau de signes:

x		-2		-1		2	
$-3x^2+12$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	////	$+$	0	$-$

4. Asymptotes verticales: Si $x \xrightarrow[<]{} -1$, $f(x) = \frac{-3x^2+12}{(x+1)^2} \longrightarrow \frac{-3(-1)^2+12}{0_+} = \frac{9}{0_+} = +\infty$.

Si $x \xrightarrow[>]{} -1$, $f(x) = \frac{-3x^2+12}{(x+1)^2} \longrightarrow \frac{-3(-1)^2+12}{0_+} = \frac{9}{0_+} = +\infty$.

$\Rightarrow$ $x=-1$ est une asymptote verticale avec $\lim\limits_{x \xrightarrow[>]{<} -1} f(x) = +\infty$.

5. Asymptotes non verticales: On a $f(x) = \frac{-3x^2+12}{(x+1)^2} = \frac{-3x^2+12}{x^2+2x+1}$.

Effectuons la division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} -3x^2+12 & x^2+2x+1 \\ \hline -(-3x^2-6x-3) & -3 \\ \hline 6x+15 & \end{array}$$

Ainsi $f(x) = -3 + \frac{6x+15}{x^2+2x+1} = -3 + \frac{6x+15}{(x+1)^2}$.

Si $x \to +\infty$, $\frac{6x+15}{(x+1)^2} \to 0_+$. Si $x \to -\infty$, $\frac{6x+15}{(x+1)^2} \to 0_-$.

Ainsi $y=-3$ est une asymptote horizontale et $y \xrightarrow[>]{} -3$ si $x \to +\infty$ et $y \xrightarrow[<]{} -3$ si $x \to -\infty$.

Intersections avec les asymptotes non verticales: Cherchons les x tels que $f(x) = -3$:

$$\frac{-3x^2+12}{(x+1)^2} = -3 \Rightarrow -3x^2+12 = -3(x+1)^2$$

$\Rightarrow -3x^2+12=-3(x^2+2x+1) \Rightarrow -3x^2+12=-3x^2-6x-3$

$\Rightarrow 12=-6x-3 \Rightarrow 6x=-15 \Rightarrow x=-\frac{15}{6}=-\frac{5}{2}$.

$\Rightarrow$ on a l'intersection $\left(-\frac{5}{2};-3\right)$.

6. Dérivée: On a $f(x)=\dfrac{-3x^2+12}{(x+1)^2}=\dfrac{-3x^2+12}{x^2+2x+1}=\dfrac{u}{v}$ avec $u=-3x^2+12$ et $v=x^2+2x+1=$ $=(x+1)^2$

Ainsi $f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'=-6x$ et $v'=2x+2=2(x+1)$.

Donc $f'(x)=\dfrac{-6x(x+1)^2-(-3x^2+12)2(x+1)}{((x+1)^2)^2}=$

$=\dfrac{(x+1)\left(-6x(x+1)-(-3x^2+12).2\right)}{(x+1)^4}=$

$=\dfrac{-6x(x+1)-2(-3x^2+12)}{(x+1)^3}=\dfrac{-6x^2-6x+6x^2-24}{(x+1)^3}=$

$=\dfrac{-6x-24}{(x+1)^3}$.

Points à tangente horizontale: ce sont les x tels que $f'(x)=0$.

$f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{-6x-24}{(x+1)^3}=0 \Rightarrow -6x-24=0 \Rightarrow 6x=-24 \Rightarrow x=-4$.

Avec $x=-4$, on a $f(x)=\dfrac{-3(-4)^2+12}{(-4+1)^2}=\dfrac{-3.16+12}{(-3)^2}=\dfrac{-48+12}{9}=\dfrac{-36}{9}=-4$.

Le point à tangente horizontale est donc $(-4;-4)$.

7. Tableau des variations (ou de croissance):

x		-4		-1	
$-6x-24$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$(x+1)^3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	////	$-$
$f(x)$	↘	min	↗	////	↘

Ainsi f est croissante sur $]-4;-1[$ et décroissante sur $]-\infty;-4[\,\cup\,]-1;+\infty[$.

8. Tableau de valeurs:

x	-6	-5	-3	$-1{,}8$	$-1{,}6$	$0{,}5$	1	3	4	5	6
$f(x)$	$-3{,}84$	$-3{,}94$	$-3{,}75$	$3{,}56$	12	5	$2{,}25$	$-0{,}94$	$-1{,}44$	$-1{,}75$	$-1{,}96$

Graphe: