Exercice 24

$$y = f(x) = \frac{x^2-16}{2x+10}.$$

1. Domaine de définition: c'est l'ensemble des x pour lesquels on peut calculer f: on doit avoir $2x+10 \neq 0$, i.e. $2x \neq -10$, i.e. $x \neq -5 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

Parité: $f(-x) = \frac{(-x)^2-16}{2(-x)+10} = \frac{x^2-16}{-2x+10} = -\frac{x^2-16}{2x-10} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ ni paire, ni impaire.

Périodicité: seules les fonctions trigonométriques sont périodiques $\Rightarrow$ pas périodique.

2. Intersections avec l'axe x: On pose $y=0$. On a $\frac{x^2-16}{2x+10} = 0 \Rightarrow x^2-16=0 \Rightarrow x = \pm 4$.
$\Rightarrow (-4;0)$ et $(4;0)$.

Intersection avec l'axe y: On pose $x=0$. On a alors $y = \frac{-16}{10} = -1{,}6 \Rightarrow (0;-1{,}6)$.

3. Tableau de signes:

x		-5		-4		4	
x^2-16	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$2x+10$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	////	$+$	0	$-$	0	$+$

4. Asymptotes verticales: Si $x \underset{<}{\rightarrow} -5$, $f(x) = \frac{x^2-16}{2x+10} \rightarrow \frac{(-5)^2-16}{0_-} = \frac{9}{0_-} \rightarrow -\infty$.

Si $x \underset{>}{\rightarrow} -5$, $f(x) = \frac{x^2-16}{2x+10} \rightarrow \frac{(-5)^2-16}{0_+} = \frac{9}{0_+} \rightarrow +\infty$.

$\Rightarrow x=-5$ est une asymptote verticale avec $\lim\limits_{x \underset{<}{\rightarrow} -5} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \underset{>}{\rightarrow} -5} f(x) = +\infty$.

5. Asymptotes non verticales: On a $f(x) = \frac{x^2-16}{2x+10}$.

Effectuons la division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 16 & 2x+10 \\ \hline -(x^2+5x) & \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \\ -5x+16 & \\ -(-5x-25) & \\ \hline 41 & \end{array}$$

Ainsi $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} + \frac{41}{2x+10}$.

Si $x \rightarrow +\infty$, $\frac{41}{2x+10} \rightarrow 0_+$. Si $x \rightarrow -\infty$, $\frac{41}{2x+10} \rightarrow 0_-$.

Ainsi $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ est une asymptote verticale et $y \underset{>}{\rightarrow} \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ si $x \rightarrow +\infty$ et $y \underset{<}{\rightarrow} \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ si $x \rightarrow -\infty$.

<u>Intersections avec les asymptotes non verticales:</u> Cherchons les x tels que $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$:

$$\frac{x^2-16}{2x+10} = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \Rightarrow x^2 - 16 = \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right)(2x+10)$$

$$\Rightarrow x^2 - 16 = x^2 + 5x - 5x - 25 \Rightarrow x^2 - 16 = x^2 - 25 \Rightarrow -16 = -25,$$

ce qui est impossible.

$\Rightarrow$ <u>Le graphe de f ne coupe pas son asymptote oblique.</u>

6. <u>Dérivée:</u> On a $f(x) = \frac{x^2-16}{2x+10} = \frac{u}{v}$ avec $u = x^2 - 16$ et $v = 2x + 10$.

Ainsi $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u' = 2x$ et $v = 2$.

Donc $f'(x) = \frac{2x(2x+10) - (x^2-16) \cdot 2}{(2x+10)^2} = \frac{4x^2 + 20x - 2x^2 + 32}{(2x+10)^2} = \underline{\underline{\frac{2x^2 + 20x + 32}{(2x+10)^2}}}.$

<u>Points à tangente horizontale:</u> Ce sont les x tels que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2+20x+32}{(2x+10)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 20x + 32 = 0$, ce qui est une équation du deuxième degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 2$, $b = 20$ et $c = 32$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \cdot 2 \cdot 32 = 400 - 256 = 144$; $\sqrt{\Delta} = 12$.

Ainsi $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 + 12}{2 \cdot 2} = \frac{-8}{4} = -2$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 - 12}{2 \cdot 2} = \frac{-32}{4} = -8$.

Avec $x_1 = -2$, on a $f(x) = \frac{(-2)^2 - 16}{2 \cdot (-2) + 10} = \frac{4 - 16}{-4 + 10} = \frac{-12}{6} = -2$.

Avec $x_2 = -8$, on a $f(x) = \frac{(-8)^2 - 16}{2 \cdot (-8) + 10} = \frac{64 - 16}{-16 + 10} = \frac{48}{-6} = -8$.

<u>Les points à tangente horizontale sont donc $(-2 ; -2)$ et $(-8 ; -8)$.</u>

7. <u>Tableau de variations (ou de croissance):</u>

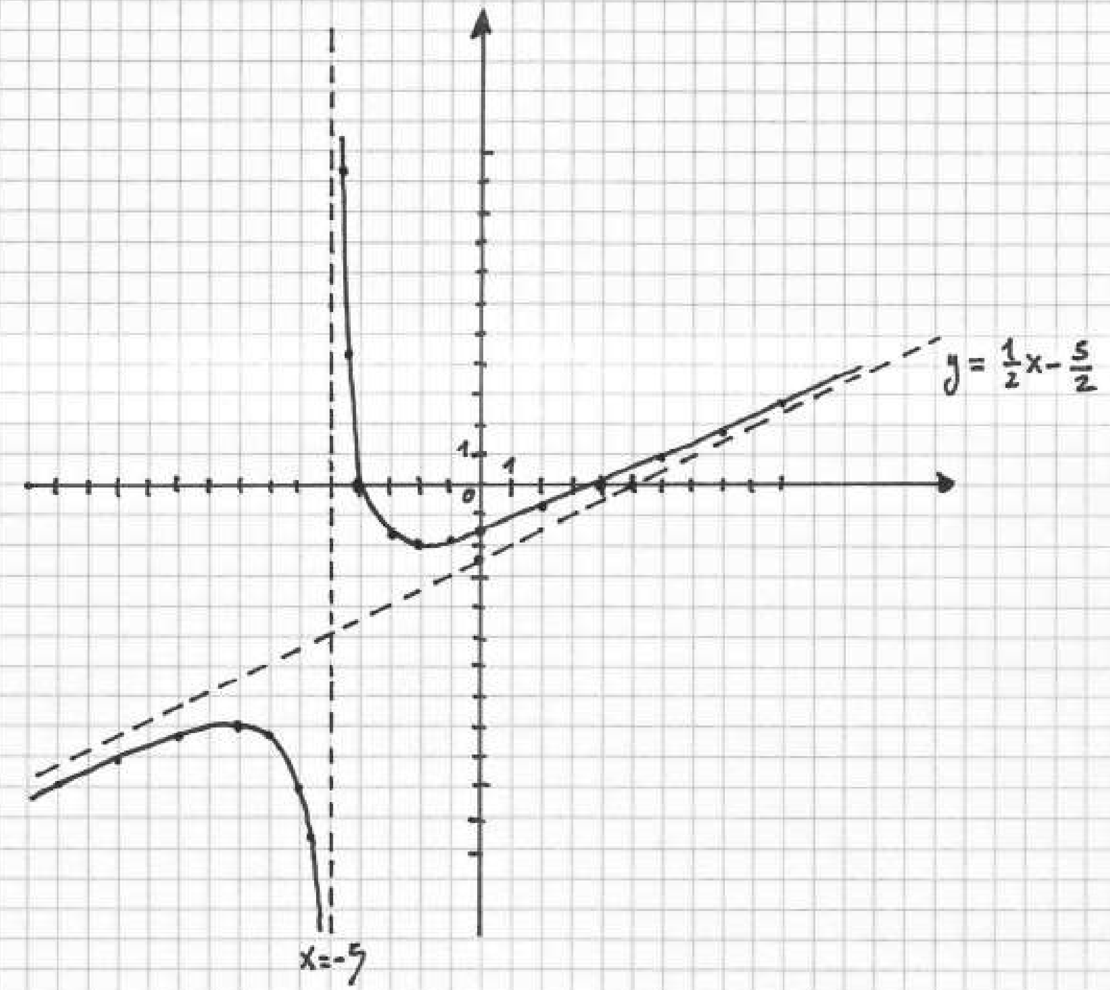
x		-8		-5		-2	
$2x^2+20x+32$	+	0	−	−	−	0	−
$(2x+10)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	−	////	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	////	↘	min	↗

Ainsi f est croissante sur $]-\infty ; -8[\cup]-2 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-8 ; -5[\cup]-5 ; -2[$.

8. <u>Tableau de valeurs:</u>

x	-10	-12	-14	-7	-6	$-5,7$	$-4,5$	$-4,7$	-3	-1	0	2	6	8	10
$f(x)$	$-8,4$	$-9,14$	-10	$-8,25$	-10	$-11,78$	$4,25$	$10,15$	$-1,75$	$-1,875$	$-1,6$	$-0,86$	$0,91$	$1,85$	$2,8$

Graphe:



Exercice 25

$$y = f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4}.$$

1. Domaine de définition: c'est l'ensemble des x pour lesquels on peut calculer f : on doit avoir

$$x^2-4 \neq 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \text{ et } x \neq 2$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}.$$

Parité: $f(-x) = \frac{(-x)^2-9}{(-x)^2-4} = \frac{x^2-9}{x^2-4} = f(x) \Rightarrow$ f est paire (son graphe est symétrique par rapport à l'axe y).

Périodicité: seules les fonctions trigonométriques sont périodiques $\Rightarrow$ pas périodique.

2. Intersections avec l'axe x: On pose $y=0$. On a $\frac{x^2-9}{x^2-4} = 0 \Rightarrow x^2-9=0$

$$\Rightarrow (x+3)(x-3) = 0 \Rightarrow x=-3 \text{ et } x=3.$$

$$\Rightarrow (-3;0) \text{ et } (3;0).$$

Intersection avec l'axe y: On pose $x=0$. On a alors $y = \frac{-9}{-4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \left(0;\frac{9}{4}\right)$.

3. Tableau de signes:

x		-3		-2		2		3	
x^2-9	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2-4	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	////	$+$	////	$-$	0	$+$

4. Asymptotes verticales:

Si $x \underset{<}{\to} -2$, $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4} \to \frac{(-2)^2-9}{0+} = \frac{-5}{0+} = -\infty$.

Si $x \underset{>}{\to} -2$, $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4} \to \frac{(-2)^2-9}{0-} = \frac{-5}{0-} = +\infty$.

Si $x \underset{<}{\to} 2$, $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4} \to \frac{2^2-9}{0-} = \frac{-5}{0-} = +\infty$.

Si $x \underset{>}{\to} 2$, $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4} \to \frac{2^2-9}{0+} = \frac{-5}{0+} = -\infty$.

Ainsi $x=-2$ et $x=2$ sont des asymptotes verticales avec

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = -\infty, \ \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = +\infty, \ \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = -\infty.$$

5. Asymptotes non verticales: On a $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-4}$.

Effectuons la division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} x^2-9 & x^2-4 \\ \hline -(x^2-4) & 1 \\ \hline -5 & \end{array}$$

Ainsi $f(x) = 1 + \frac{-5}{x^2-4}$.

Si $x \to \pm\infty$, $\frac{-5}{x^2-4} \to \frac{-5}{-\infty} = 0_-$.

Ainsi $y=1$ est une asymptote horizontale et $y \underset{<}{\to} 1$ si $x \to \pm\infty$.

Intersections avec les asymptotes non verticales: Cherchons les x tels que $f(x)=1$:

$\frac{x^2-9}{x^2-4}=1 \Rightarrow x^2-9=x^2-4 \Rightarrow -9=-4$, ce qui est exclu $\Rightarrow$ il n'y a pas d'intersection.

6. Dérivées: On a $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-4}=\frac{u}{v}$ avec $u=x^2-9$ et $v=x^2-4$.

Ainsi $f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'=2x$ et $v'=2x$.

Donc $f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-(x^2-9)2x}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^3-8x-2x^3+18x}{(x^2-4)^2}=\frac{10x}{(x^2-4)^2}$.

Points à tangente horizontale: Ce sont les x tels que $f'(x)=0$.

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{10x}{(x^2-4)^2}=0 \Rightarrow 10x=0 \Rightarrow x=0$.

Avec $x=0$, on a $f(x)=\frac{-9}{-4}=\frac{9}{4}$.

Le point à tangente horizontale est donc $(0;\frac{9}{4})$.

7. Tableau de variations (ou de croissance):

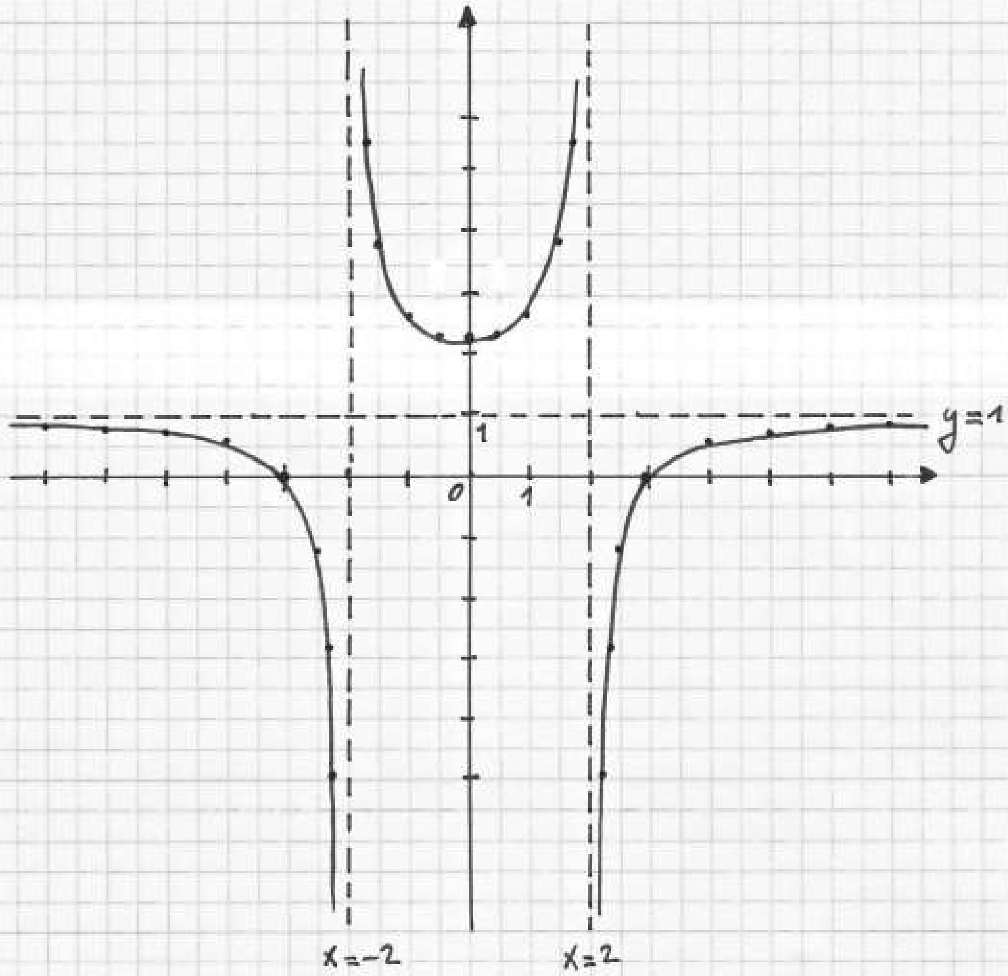
x		-2		0		2	
$10x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x^2-4)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	////	$-$	0	$+$	////	$+$
$f(x)$	$\searrow$	////	$\searrow$	min	$\nearrow$	////	$\nearrow$

Ainsi f est croissante sur $]-\infty;-2[\,\cup\,]-2;0[$ et décroissante sur $]0;2[\,\cup\,]2;+\infty[$.

8. Tableau de valeurs:

x	±4	±5	±6	±7	$\pm2,5$	$\pm2,3$	$\pm2,2$	$\pm0,5$	±1	$\pm1,5$	$\pm1,7$
$f(x)$	0,58	0,76	0,84	0,89	-1,22	-2,88	-4,95	2,33	2,66	3,86	5,5

Graphe:



6. <u>Dérivée:</u> On a $f(x) = \dfrac{4x+12}{(x+2)^2} = \dfrac{4x+12}{x^2+4x+4} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = 4x+12$ et $v = x^2+4x+4$.

Ainsi $f'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ où $u' = 4$ et $v' = 2x+4$.

Donc
$$f'(x) = \frac{4(x^2+4x+4) - (4x+12)(2x+4)}{(x^2+4x+4)^2} =$$
$$= \frac{4x^2+16x+16 - (8x^2+16x+24x+48)}{(x^2+4x+4)^2} =$$
$$= \frac{4x^2+16x+16 - 8x^2-16x-24x-48}{(x^2+4x+4)^2} =$$
$$= \frac{-4x^2-24x-32}{(x^2+4x+4)^2} = \frac{-4x^2-24x-32}{(x+2)^4}.$$

<u>Point à tangente horizontale:</u> Ce sont les x tels que $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{-4x^2-24x-32}{(x^2+4x+4)^2} = 0 \Longrightarrow -4x^2-24x-32 = 0$$

$\Longrightarrow x^2+6x+8 = 0$, ce qui est une équation du 2^e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=6$ et $c=8$;
on a $\Delta = b^2-4ac = 6^2-4.1.8 = 36-32 = 4$; $\sqrt{\Delta} = 2$;
ainsi $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6+2}{2\cdot1} = \dfrac{-4}{2} = -2$ et
$x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-6-2}{2\cdot1} = \dfrac{-8}{2} = -4$.

Avec $x = -2$, on a $f(x) = \dfrac{4(-2)+12}{(-2+2)^2}$ n'existe pas $-2 \notin D$.
Avec $x = -4$, on a $f(x) = \dfrac{4\cdot(-4)+12}{(-4+2)^2} = \dfrac{-16+12}{(-2)^2} = \dfrac{-4}{4} = -1$.

<u>Le point à tangente horizontale est donc $(-4;-1)$.</u>

7. <u>Tableau de variations (ou de croissance):</u>

x		-4		-2	
$-4x^2-24x-32$	$-$	0	$+$	0	$-$
$(x+2)^4$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	////	$-$
$f(x)$	↘	min	↗	////	↘

<u>Ainsi f est croissante sur $]-4;-2[$ et décroissante sur $]-\infty;-4[\cup]-2;+\infty[$.</u>

8. <u>Tableau de valeurs:</u>

x	-7	-6	-5	-3,5	-2,75	-2,5	-1	-0,5	1	2	3	4	5
$f(x)$	-0,64	-0,75	-0,89	-0,89	1,78	8	8	4,44	1,78	1,25	0,96	0,78	0,65

Exercice 26

$$y = f(x) = \frac{4x+12}{(x+2)^2}.$$

1. Domaine de définition: c'est l'ensemble des x pour lesquels on peut calculer f : on doit avoir
$(x+2)^2 \neq 0 \Rightarrow x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2 \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Parité: $f(-x) = \frac{4\cdot(-x)+12}{(-x+2)^2} = \frac{-4x+12}{(-x+2)^2} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ ni paire, ni impaire.

Périodicité: seules les fonctions trigonométriques sont périodiques $\Rightarrow$ pas périodique.

2. Intersections avec l'axe x: On pose $y=0$. On a $\frac{4x+12}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow 4x+12 = 0$
$\Rightarrow 4x = -12 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow (-3;0)$.

Intersection avec l'axe y: On pose $x=0$. On a $\frac{12}{2^2} = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow (0;3)$.

3. Tableau des signes:

x		-3		-2	
$4x+12$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	////	$+$

4. Asymptotes verticales: si $x \xrightarrow[<]{} -2$, $f(x) = \frac{4x+12}{(x+2)^2} \longrightarrow \frac{-8+12}{0_+} = \frac{4}{0_+} = +\infty$.

si $x \xrightarrow[>]{} -2$, $f(x) = \frac{4x+12}{(x+2)^2} \longrightarrow \frac{-8+12}{0_+} = \frac{4}{0_+} = +\infty$.

$\Rightarrow$ $x=-2$ est une asymptote verticale avec $\lim\limits_{x \underset{>}{\overset{<}{\to}} -2} f(x) = +\infty$.

5. Asymptotes non verticales: On a $f(x) = \frac{4x+12}{(x+2)^2} = \frac{4x+12}{x^2+4x+4}$.

Si on veut effectuer la division euclidienne, on trouve un quotient nul.

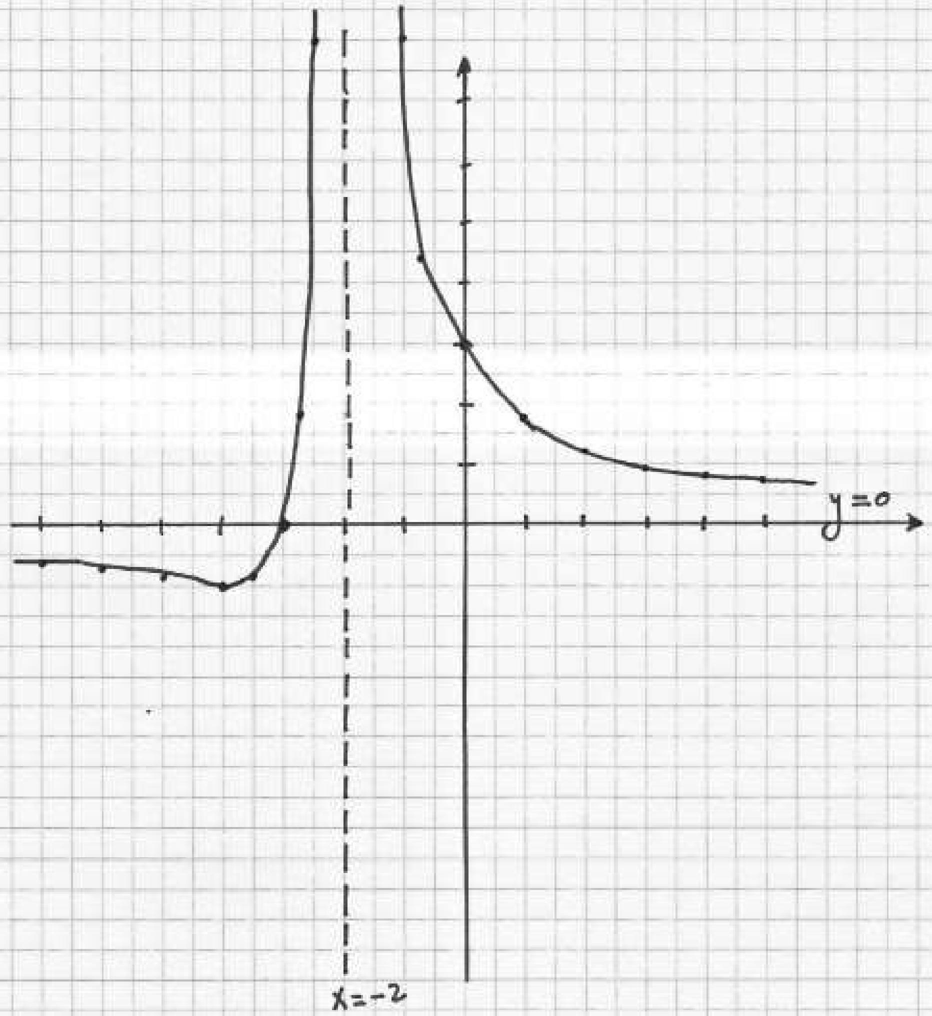
Si $x \to +\infty$, $f(x) = \frac{4x+12}{x^2+4x+4} \longrightarrow 0_+$.

Si $x \to -\infty$, $f(x) = \frac{4x+12}{x^2+4x+4} \longrightarrow 0_-$.

Ainsi $y=0$ est une asymptote horizontale et $y \to 0_+$ si $x \to +\infty$ et $y \to 0_-$ si $x \to -\infty$.

Intersections avec l'asymptote non verticale: Elles correspondent aux x tels que $f(x)=0$; ce sont donc les zéros de f $\Rightarrow$ $(-3;0)$.

Graphe:



Exercice 27

$$y = f(x) = \frac{8x-6}{x^2+1}$$

1. Domaine de définition: c'est l'ensemble des x par lesquels on peut calculer f: on doit avoir $x^2+1 \neq 0$. c'est toujours le cas puisque $x^2 \geq 0 \Rightarrow \underline{\underline{D = \mathbb{R}}}$.

Parité: $f(-x) = \dfrac{8(-x)-6}{(-x)^2+1} = \dfrac{-8x-6}{x^2+1} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ ni paire, ni impaire.

Périodicité: seules les fonctions trigonométriques sont périodiques $\Rightarrow$ pas périodique.

2. Intersections avec l'axe x: On pose $y=0$. On a $\dfrac{8x-6}{x^2+1} = 0 \Rightarrow 8x-6 = 0$

$\Rightarrow 8x = 6 \Rightarrow x = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

$\Rightarrow \underline{\underline{(0{,}75\,;\,0)}}$.

Intersection avec l'axe y: On pose $x=0$. On a alors $y = \dfrac{-6}{1} = -6 \Rightarrow \underline{\underline{(0\,;\,-6)}}$.

3. Tableau de signes:

x		$0{,}75$	
$8x-6$	$-$	0	$+$
x^2+1	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$

4. Asymptotes verticales: Comme D n'a pas d'exclus ($D = \mathbb{R}$), il n'y a pas d'asymptote verticale.

5. Asymptotes non verticales: On a $f(x) = \dfrac{8x-6}{x^2+1}$. Le quotient de la division euclidienne de $8x-6$ par x^2+1 est 0. Ainsi $y=0$ est une asymptote horizontale.

Si $x \to +\infty$, $\dfrac{8x-6}{x^2+1} \to 0_+$. Si $x \to -\infty$, $\dfrac{8x-6}{x^2+1} \to 0_-$.

Ainsi $y=0$ est une asymptote horizontale et $y \to 0_+$ si $x \to +\infty$ et $y \to 0_-$ si $x \to -\infty$.

Intersections avec l'asymptote non verticale: Cherchons les x tels que $f(x) = 0$. Ils correspondent aux intersections avec l'axe x (voir ci-dessus).

$\Rightarrow \underline{\underline{(0{,}75\,;\,0)}}$.

6. Dérivée: On a $f(x) = \dfrac{8x-6}{x^2+1} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = 8x-6$ et $v = x^2+1$.

Ainsi $f'(x) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u' = 8$ et $v' = 2x$.

Donc $f'(x) = \dfrac{8(x^2+1) - (8x-6)\,2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{8x^2+8-16x^2+12x}{(x^2+1)^2} = \underline{\underline{\dfrac{-8x^2+12x+8}{(x^2+1)^2}}}$.

<u>Points à tangente horizontale:</u> Ce sont les x tels que $f'(x)=0$.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-8x^2+12x+8}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow -8x^2+12x+8=0 \Rightarrow 2x^2-3x-2=0,$$

ce qui est une équation du 2e degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=2, b=-3, c=-2$; on a $\Delta = b^2-4ac = (-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2) = 9+16 = 25$; $\sqrt{\Delta}=5$;

ainsi $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+5}{2\cdot 2} = \dfrac{8}{4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-5}{2\cdot 2} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

Avec $x=2$, on a $f(x) = \dfrac{8\cdot 2-6}{2^2+1} = \dfrac{16-6}{5} = \dfrac{10}{5} = 2$.

Avec $x=-\frac{1}{2}$, on a $f(x) = \dfrac{8\cdot(-\frac{1}{2})-6}{(-\frac{1}{2})^2+1} = \dfrac{-4-6}{\frac{1}{4}+1} = \dfrac{-10}{5/4} = -10 : \dfrac{5}{4} = -10\cdot\dfrac{4}{5} =$

$= -\dfrac{40}{5} = -8$.

<u>Les points à tangente horizontale sont donc $(2;2)$ et $(-\frac{1}{2};-8)$.</u>

7. <u>Tableau des variations (ou de croissance):</u>

x		$-\frac{1}{2}$		2	
$-8x^2+12x+8$	$-$	0	$+$	0	$-$
$(x^2+1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

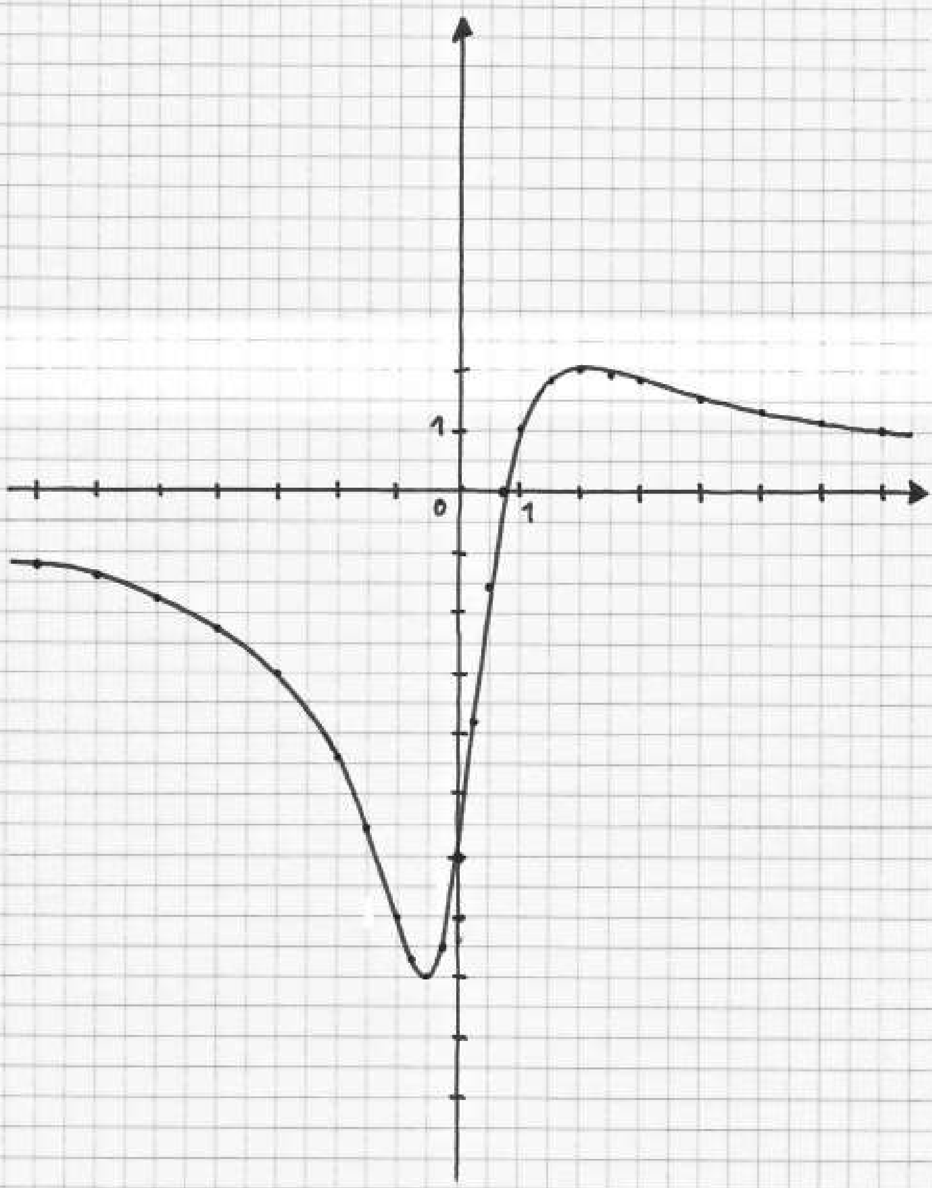
<u>Ainsi f est croissante sur $]-\frac{1}{2};2[$ et f est décroissante sur $]-\infty;-\frac{1}{2}[\ \cup\ ]2;+\infty[$.</u>

8. <u>Tableau de valeurs:</u>

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	$-1,5$	$-0,75$	$-0,25$	$0,25$	$0,5$
$f(x)$	$-1,24$	$-1,46$	$-1,77$	$-2,24$	-3	$-4,4$	-7	$-5,54$	$-7,68$	$-7,53$	$-3,76$	$-1,6$

x	1	$1,5$	$2,5$	3	4	5	6	7
$f(x)$	1	$1,85$	$1,93$	$1,8$	$1,53$	$1,31$	$1,14$	1

Graphe:



Exercice 28

$$y = f(x) = \frac{x^2+4}{2x}.$$

1. Domaine de définition: c'est l'ensemble des x pour lesquels on peut calculer f : on doit avoir $2x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow \underline{D = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$.

Parité: $f(-x) = \frac{(-x)^2+4}{2(-x)} = \frac{x^2+4}{-2x} = -\frac{x^2+4}{2x} = -f(x) \Rightarrow$ f est impaire.

Périodicité: seules les fonctions trigonométriques sont périodiques $\Rightarrow$ pas périodique

2. Intersections avec l'axe x: On pose $y=0$. On a: $\frac{x^2+4}{2x} = 0 \Rightarrow x^2+4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$ ce qui n'est jamais vrai.

$\Rightarrow$ il n'y a pas d'intersection avec l'axe x.

Intersection avec l'axe y: On devrait poser $x=0$, or $0 \notin D$.

$\Rightarrow$ il n'y a pas d'intersection avec l'axe y.

3. Tableau de signes:

x		0	
x^2+4	$+$	$+$	$+$
$2x$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	////	$+$

4. Asymptotes verticales: Si $x \xrightarrow[<]{} 0$, $f(x) = \frac{x^2+4}{2x} \rightarrow \frac{4}{0_-} = -\infty$.

Si $x \xrightarrow[>]{} 0$, $f(x) = \frac{x^2+4}{2x} \rightarrow \frac{4}{0_+} = +\infty$.

$\Rightarrow x=0$ est une asymptote verticale avec $\lim\limits_{x \xrightarrow[<]{} 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow[>]{} 0} f(x) = +\infty$.

5. Asymptotes non verticales: On a $f(x) = \frac{x^2+4}{2x}$.

Effectuons la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^2+4 & 2x \\ \hline -x^2 & \frac{1}{2}x \\ \hline 4 & \end{array}$$

Ainsi $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{4}{2x} = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$.

Si $x \rightarrow +\infty$, $\frac{2}{x} \rightarrow 0_+$. Si $x \rightarrow -\infty$, $\frac{2}{x} \rightarrow 0_-$.

Ainsi $y = \frac{1}{2}x$ est une asymptote oblique et $y \rightarrow 0_+$ si $x \rightarrow +\infty$ et $y \rightarrow 0_-$ si $x \rightarrow -\infty$.

Intersections avec les asymptotes non verticales: Cherchons les x tels que $f(x)=\frac{1}{2}x$:

$$\frac{x^2+4}{2x}=\frac{1}{2}x \Rightarrow x^2+4=x^2 \Rightarrow 4=0 \text{ ce qui est impossible}$$

$\Rightarrow$ il n'y a pas d'intersection avec l'asymptote non verticale.

6. Dérivée: On a $f(x)=\frac{x^2+4}{2x}=\frac{u}{v}$ avec $u=x^2+4$ et $v=2x$.

Ainsi $f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'=2x$ et $v'=2$.

Donc $f'(x)=\frac{2x\cdot 2x-(x^2+4)\cdot 2}{(2x)^2}=\frac{4x^2-2x^2-8}{4x^2}=\frac{2x^2-8}{4x^2}=\frac{x^2-4}{2x^2}$.

Point à tangente horizontale: On pose les x tels que $f'(x)=0$.

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{2x^2}=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$.

Avec $x=2$, $f(x)=\frac{x^2+4}{2x}=\frac{2^2+4}{2\cdot 2}=\frac{4+4}{4}=\frac{8}{4}=2$.

Avec $x=-2$, $f(x)=-2$ (puisque f est impaire).

Les points à tangente horizontale sont donc $(2;2)$ et $(-2;-2)$.

7. Tableau de variations (ou de croissance):

x		-2		0		2	
x^2-4	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$

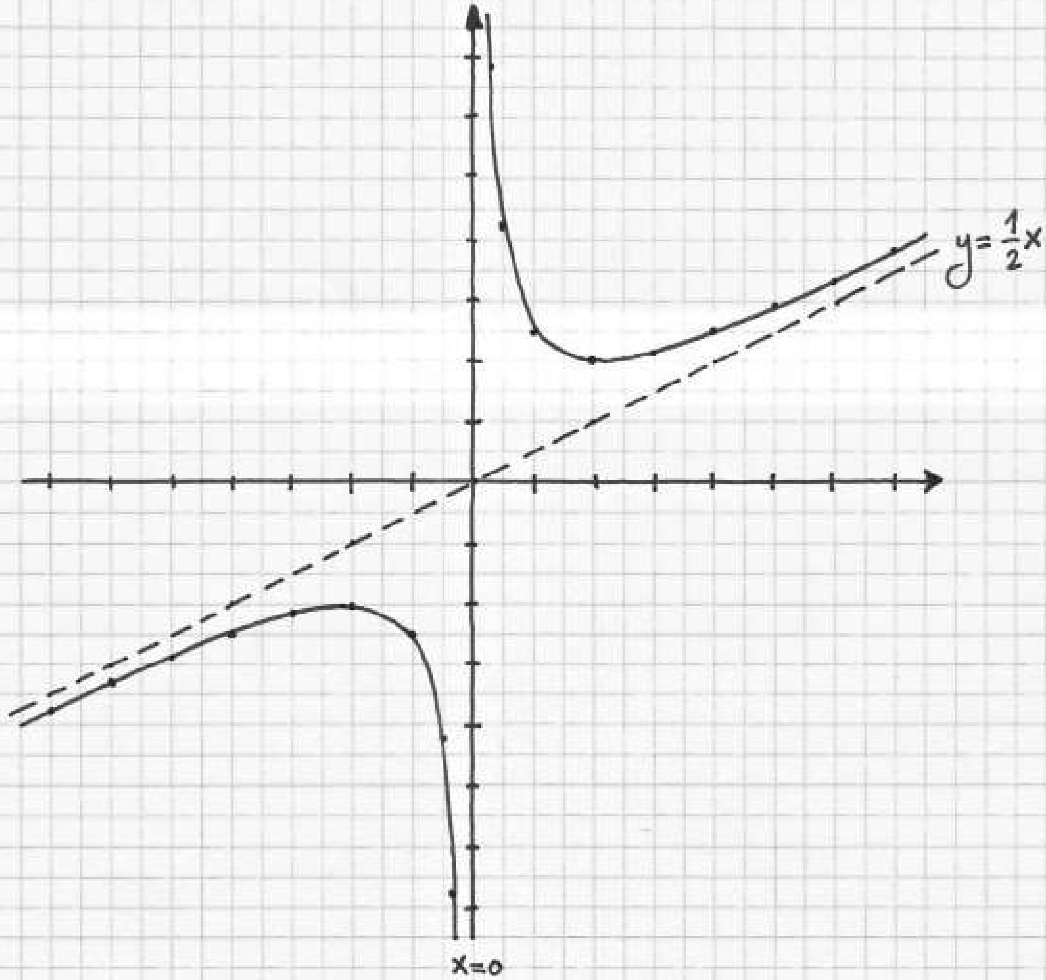
Ainsi f est croissante sur $]-\infty;-2[\,\cup\,]2;+\infty[$ et f est décroissante sur $]-2;0[\,\cup\,]0;2[$.

8. Tableaux de valeurs:

x	-7	-6	-5	-4	-3	-1	$-0,5$	$-0,3$
$f(x)$	$-3,79$	$-3,33$	$-2,9$	$-2,5$	$-2,17$	$-2,5$	$-4,25$	$-6,82$

x	7	6	5	4	3	1	$0,5$	$0,3$
$f(x)$	$3,79$	$3,33$	$2,9$	$2,5$	$2,17$	$2,5$	$4,25$	$6,82$

Graphe:



Exercice 29

$$y = f(x) = \frac{x^3}{2x^2-8}.$$

1. Domaine de définition: c'est l'ensemble des x pour lesquels on peut calculer f : on doit avoir

$$2x^2-8 \neq 0 \Rightarrow 2x^2 \neq 8 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm 2$$

$$\Rightarrow \underline{D = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}}.$$

Parité: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x)^2-8} = \frac{-x^3}{2x^2-8} = -\frac{x^3}{2x^2-8} = -f(-x) \Rightarrow$ f est impaire.

Périodicité: seules les fonctions trigonométriques sont périodiques $\Rightarrow$ pas périodique.

2. Intersections avec l'axe x: On pose $y=0$. On a $\frac{x^3}{2x^2-8} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ $\Rightarrow \underline{(0;0)}$.

Intersection avec l'axe y: On pose $x=0$. On a alors $y = \frac{0^3}{2\cdot 0^2-8} = 0 \Rightarrow \underline{(0;0)}$.

3. Tableau de signes:

x		-2		0		2	
x^3	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x^2-8$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	////	$+$	0	$-$	////	$+$

4. Asymptotes verticales: Si $x \underset{<}{\rightarrow} -2$, $f(x) = \frac{x^3}{2x^2-8} \rightarrow \frac{-8}{0_+} = -\infty$.

Si $x \underset{>}{\rightarrow} -2$, $f(x) = \frac{x^3}{2x^2-8} \rightarrow \frac{-8}{0_-} = +\infty$.

Si $x \underset{<}{\rightarrow} 2$, $f(x) = \frac{x^3}{2x^2-8} \rightarrow \frac{8}{0_-} = -\infty$.

Si $x \underset{>}{\rightarrow} 2$, $f(x) = \frac{x^3}{2x^2-8} \rightarrow \frac{8}{0_+} = +\infty$.

$\Rightarrow$ $x=-2$ et $x=2$ sont des asymptotes verticales et $y \rightarrow +\infty$ si $x \underset{>}{\rightarrow} -2$ et $x \underset{>}{\rightarrow} 2$ et $y \rightarrow -\infty$ si $x \underset{<}{\rightarrow} -2$ et $x \underset{<}{\rightarrow} 2$.

---

5. Asymptotes non verticales: Effectuons la division euclidienne:

$$\begin{array}{r|l} x^3 & 2x^2-8 \\ \hline -(x^3-4x) & \frac{1}{2}x \\ \hline 4x & \end{array}$$

Ainsi $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{4x}{2x^2-8}$.

Si $x \rightarrow +\infty$, $\frac{4x}{2x^2-8} \rightarrow 0_+$. Si $x \rightarrow -\infty$, $\frac{4x}{2x^2-8} \rightarrow 0_-$.

Ainsi $y = \frac{1}{2}x$ est une asymptote oblique et $y \underset{>}{\rightarrow} \frac{1}{2}x$ si $x \rightarrow +\infty$ et $y \underset{<}{\rightarrow} \frac{1}{2}x$ si $x \rightarrow -\infty$.

Intersections avec l'asymptote non verticale: Cherchons les x tels que $f(x) = \frac{1}{2}x$:

$$\frac{x^3}{2x^2-8} = \frac{1}{2}x \Rightarrow x^3 = \frac{1}{2}x(2x^2-8)$$

$$\Rightarrow x^3 = x^3 - 4x \Rightarrow 0 = -4x \Rightarrow x = 0.$$

Si $x = 0$, $y = f(x) = 0$.

$\Rightarrow$ On a l'intersection $(0;0)$.

6. Dérivées: On a $f(x) = \frac{x^3}{2x^2-8} = \frac{u}{v}$ avec $u = x^3$ et $v = 2x^2-8$.

Ainsi $f'(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u' = 3x^2$ et $v' = 4x$.

Donc $f'(x) = \frac{3x^2(2x^2-8)-x^3 \cdot 4x}{(2x^2-8)^2} = \frac{6x^4-24x^2-4x^4}{(2x^2-8)^2} = \frac{2x^4-24x^2}{(2x^2-8)^2}$.

Points à tangente horizontale: Ce sont les x tels que $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^4-24x^2}{(2x^2-8)^2} = 0 \Rightarrow 2x^4-24x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(x^2-12) = 0$$

$\Rightarrow$ soit $2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, soit $x^2-12 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12}$.

Avec $x = 0$, on a $f(x) = \frac{x^3}{2x^2-8} = 0$.

Avec $x = \sqrt{12}$, on a $f(x) = \frac{x^3}{2x^2-8} = \frac{(\sqrt{12})^3}{2\cdot 12-8} = \frac{12\sqrt{12}}{16} = \frac{3\sqrt{12}}{4} = \frac{3\cdot 2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Avec $x = -\sqrt{12}$, comme f est impaire, on a $f(x) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $(\cong -2,6)$.

Les points à tangente horizontale sont donc $(0;0)$, $\left(2\sqrt{3}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(-2\sqrt{3}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

7. Tableau de variation (ou de croissance):

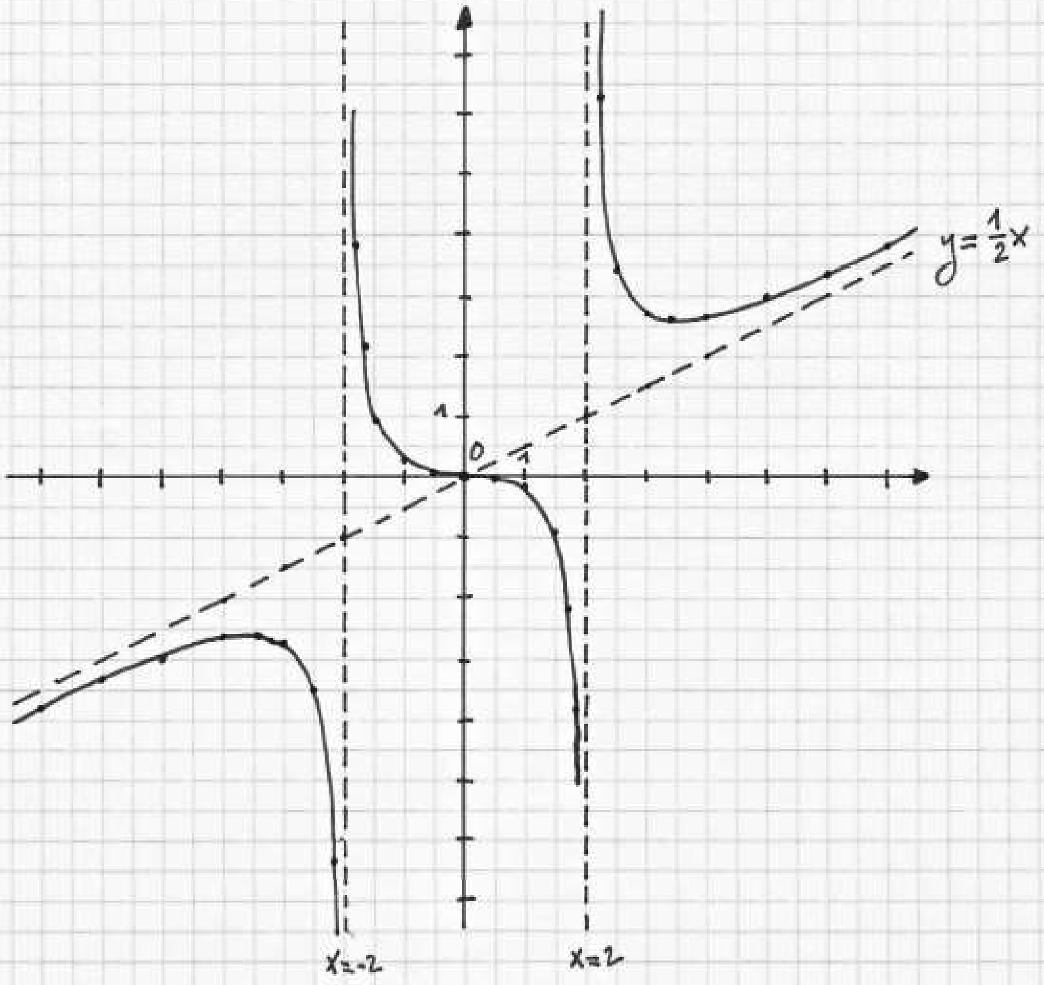
x		$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$	
$2x^2$	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+
x^2-12	+	0	−	−	−	−	−	−	−	0	+
$(2x^2-8)^2$	+	+	+	0	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	−	//	−	0	−	//	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	//	↘	point d'inflexion	↘	//	↘	min	↗

Ainsi f est croissante sur $\left]-\infty ; -2\sqrt{3}\right[\cup \left]2\sqrt{3} ; +\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-2\sqrt{3} ; -2\right[\cup \left]-2 ; 0\right[\cup \left]0 ; 2\right[\cup \left]2 ; 2\sqrt{3}\right[$.

8. Tableau de valeurs :

x	0,5	1	1,5	1,7	1,8	2,2	2,5	3	4	5	6	7
$f(x)$	−0,017	−0,17	−0,96	−2,21	−3,84	6,34	3,47	2,7	2,67	2,98	3,38	3,81
x	−0,5	−1	−1,5	−1,7	−1,8	−2,2	−2,5	−3	−4	−5	−6	−7
$f(x)$	0,017	0,17	0,96	2,21	3,84	−6,34	−3,47	−2,7	−2,67	−2,98	−3,38	−3,81

Graphe :



Exercice 30

$y = f(x) = 3\sin(x) - 4\cos(x)$ (x en radians).

1. Domaine de définition: c'est l'ensemble des x pour lesquels on peut calculer $f \Rightarrow D = \mathbb{R}$.

Parité: $f(-x) = 3\sin(-x) - 4\cos(-x) = -3\sin(x) - 4\cos(x) \neq \pm f(x) \Rightarrow$ ni paire, ni impaire.

Périodicité: On a $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$.

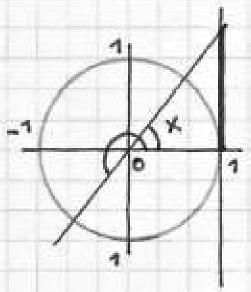
Donc $f(x+2\pi) = 3\sin(x+2\pi) - 4\cos(x+2\pi) = 3\sin(x) - 4\cos(x) = f(x)$.

$\Rightarrow$ f est périodique de période 2π.

Il suffit ainsi d'étudier f sur $[0; 2\pi]$.

2. Intersections avec l'axe x: On pose $y = 0$. On a $3\sin(x) - 4\cos(x) = 0 \Rightarrow 3\sin(x) = 4\cos(x)$

$\Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan(x) = \frac{4}{3}$



$\Rightarrow x = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 0,93$ rad

et $x = 0,93 + \pi = 4,07$ rad

$\Rightarrow (0,93; 0)$ et $(4,07; 0)$.

Intersection avec l'axe y: On pose $x = 0$. On a alors $y = 3\sin(0) - 4\cos(0) = 3.0 - 4.1 = -4$

$\Rightarrow (0; -4)$.

3. Tableau de signes:

x	0		0,93		4,07		2π
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$

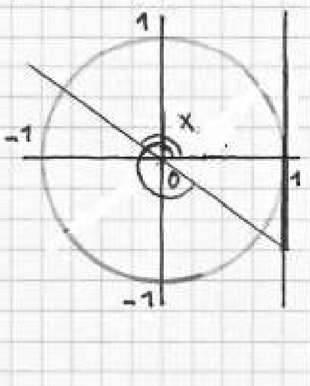
4. Asymptotes verticales: Comme il n'y a pas d'exclu, il n'y a pas d'asymptote verticale.

5. Asymptotes non verticales: Comme f est périodique, il n'y a pas d'asymptote non verticale.

6. Dérivée: On a $f'(x) = 3\cos(x) + 4\sin(x)$.

Points à tangente horizontale: Ce sont les x tels que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3\cos(x) + 4\sin(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \tan(x) = -\frac{3}{4}$



$\Rightarrow x = \tan\left(-\frac{3}{4}\right) = 2\pi - 0,64 = 5,64$

et $x = 5,64 - \pi = 2,5$

Avec $x = 5,64$, $f(x) = -5$.

Avec $x = 2,5 = 5$.

Les points à tangente horizontale sont donc $(2,5\,;\,5)$ et $(5,64\,;\,-5)$.

7. Tableau des variations (ou de croissance) :

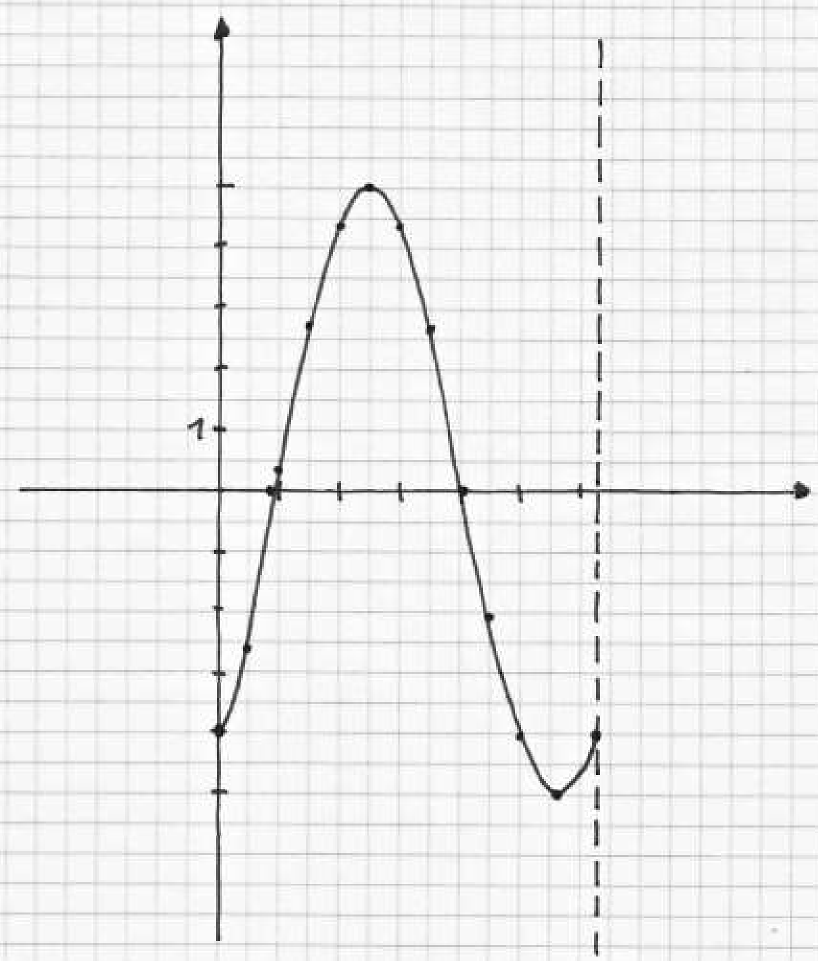
x		2,5		5,64	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

Ainsi f est croissante sur $[0\,;\,2,5[\;\cup\;]5,64\,;\,2\pi]$ et décroissante sur $]2,5\,;\,5,64[$.

8. Tableau de valeurs :

x	0,5	1	1,5	2	3	3,5	4,5	5
$f(x)$	-2,07	0,36	2,71	4,39	4,38	2,69	-2,09	-4,01

Graphe :



Exercice 31

$$y = f(x) = -3 + \sqrt{-x^2 + 8x + 9}.$$

1. Domaine de définition: c'est l'ensemble des x pour lesquels on peut calculer f : on doit avoir $-x^2 + 8x + 9 \geq 0$.

Commençons par résoudre $-x^2 + 8x + 9 = 0$, ce qui est une équation du $2^{\text{ème}}$ degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où $a = -1$, $b = 8$ et $c = 9$. On a:

$\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4\cdot(-1)\cdot 9 = 64 + 36 = 100$ et $\sqrt{\Delta} = 10$; ainsi

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8 + 10}{2\cdot(-1)} = \dfrac{2}{-2} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8 - 10}{2\cdot(-1)} = \dfrac{-18}{-2} = 9.$

On conclut alors que $-x^2 + 8x + 9 \geq 0$ si $-1 \leq x \leq 9$.

Ainsi $\underline{\underline{D = [-1; 9]}}$.

Parité: $f(-x) = -3 + \sqrt{-(-x)^2 + 8\cdot(-x) + 9} = -3 + \sqrt{-x^2 - 8x + 9} \neq \pm f(x) \Rightarrow$ ni paire, ni impaire.

Périodicité: seules les fonctions trigonométriques sont périodiques $\Rightarrow$ pas périodique.

2. Intersections avec l'axe x: On pose $y = 0$. On a $-3 + \sqrt{-x^2 + 8x + 9} = 0 \Rightarrow \sqrt{-x^2 + 8x + 9} = 3$

$\Rightarrow -x^2 + 8x + 9 = 9 \Rightarrow -x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(-x + 8) = 0$

$\Rightarrow$ soit $x = 0$, soit $-x + 8 = 0$, i.e. $x = 8$.

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{(0;0) \text{ et } (8;0)}}$.

Intersection avec l'axe y: On pose $x = 0$. On a alors $y = -3 + \sqrt{9} = -3 + 3 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{(0;0)}}$.

3. Tableau de signes:

x	-1		0		8		9
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$

4. Asymptotes verticales: Comme $D = [-1; 9]$, $f(-1) = -3$ et $f(9) = -3$, on peut calculer f pour toute valeur dans $[-1; 9]$ et il n'y a pas d'asymptote verticale.

5. Asymptotes non verticales: Comme $D = [-1; 9]$, il n'y a pas d'asymptote non verticale.

6. Dérivée: On a $f(x) = -3 + \sqrt{-x^2 + 8x + 9}$.

Ainsi $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{-x^2 + 8x + 9}}(-2x + 8) = \underline{\underline{\dfrac{-x + 4}{\sqrt{-x^2 + 8x + 9}}}}.$

Points à tangente horizontale: Ce sont les x tels que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{-x + 4}{\sqrt{-x^2 + 8x + 9}} = 0 \Rightarrow -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

Avec $x = 4$, on a $f(x) = -3 + \sqrt{-4^2 + 8\cdot 4 + 9} = -3 + \sqrt{-16 + 32 + 9} = -3 + \sqrt{25} = -3 + 5 = 2.$

Le point à tangente horizontale est donc $(4;2)$.

7. Tableau des variations (ou de croissance):

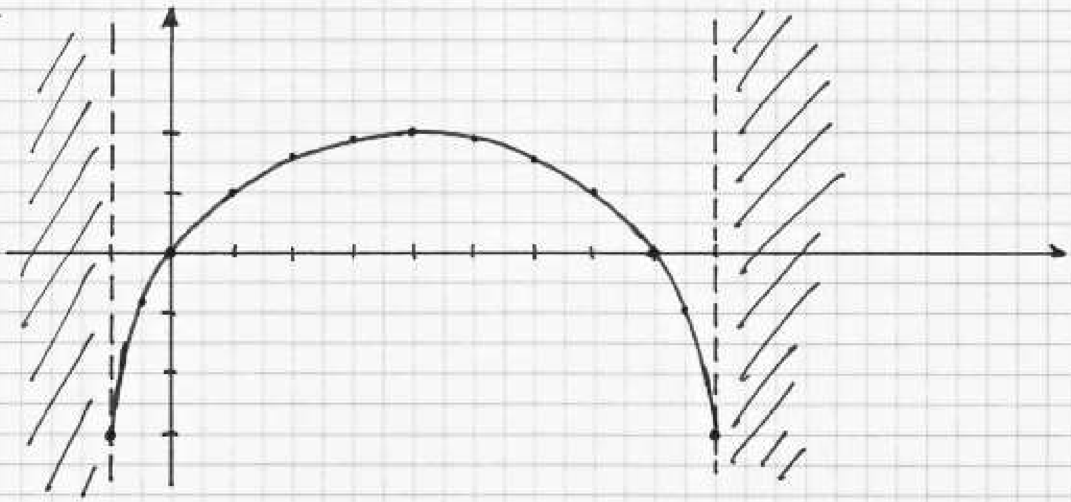
x	-1		4		9
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	max	$\searrow$	-3

Ainsi f est croissante sur $]-1;4[$ et décroissante sur $]4;9[$.

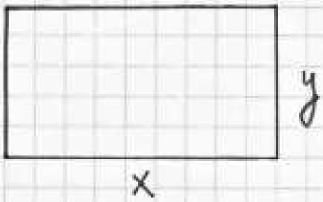
8. Tableau de valeurs:

x	$-0{,}5$	1	2	3	5	6	7	$8{,}5$
$f(x)$	$-0{,}82$	1	$1{,}58$	$1{,}9$	$1{,}9$	$1{,}58$	1	$-0{,}82$

Graphe:



Exercice 32



On doit avoir $2x+2y=L$.

On cherche le maximum de la fonction $f(x)=$ aire du rectangle $=$

$= x\cdot y$.

De $2x+2y=L$, on tire $2y=L-2x \Rightarrow y=-x+\frac{L}{2}$.

On obtient ainsi $f(x)=x\left(-x+\frac{L}{2}\right)=-x^2+\frac{L}{2}x$.

Le maximum de f correspondra à x tel que $f'(x)=0$.

On a $f'(x)=-2x+\frac{L}{2}$.

$f'(x)=0 \Rightarrow -2x+\frac{L}{2}=0 \Rightarrow 2x=\frac{L}{2} \Rightarrow x=\frac{L}{4}$.

Avec $x=\frac{L}{4}$, on a $y=-x+\frac{L}{2}=-\frac{L}{4}+\frac{L}{2}=\frac{L}{4}$.

On a ainsi obtenu $x=y=\frac{L}{4}$.

Donc <u>le maximum de l'aire du rectangle est atteint si le rectangle est un carré de côté $\frac{L}{4}$.</u>

Exercice 33

a) On a $a+b=20$ et on doit cherche le minimum de a^2+b^2.

Posons $f(a)=a^2+b^2$.

On a $b=20-a$. Donc $f(a)=a^2+(20-a)^2=a^2+400-40a+a^2=2a^2-40a+400$.

On cherche a tel que $f(a)$ soit minimum, i.e. $f'(a)=0$.

On a $f'(a)=4a-40$.

$f'(a)=0 \Rightarrow 4a-40=0 \Rightarrow 4a=40 \Rightarrow a=10$.

Avec $a=10$, on a $b=20-a=20-10=10$.

Ainsi le minimum de a^2+b^2 est en $a=b=10$ et il vaut $a^2+b^2=200$.

b) On a $a+b=20$ et on doit cherche le maximum de $a^2\cdot b^3$.

Posons $f(a)=a^2\cdot b^3$.

On a $b=20-a$. Donc $f(a)=a^2(20-a)^3$.

On cherche a tel que $f(a)$ soit maximum, i.e. $f'(a)=0$.

On a $f(a)=u\cdot v$ avec $u=a^2$ et $v=(20-a)^3$.

Ainsi $f'(a)=u'v+uv'$ avec $u'=2a$ et $v'=-3(20-a)^2$.

Donc $f'(a)=2a(20-a)^3+a^2\cdot(-3(20-a)^2)=2a(20-a)^3-3a^2(20-a)^2=$

$=a(20-a)^2(2(20-a)-3a)=a(20-a)^2(40-2a-3a)=$

$=a(20-a)^2(40-5a)=5a(20-a)^2(8-a)$.

$f'(a)=0 \Rightarrow 5a(20-a)^2(8-a)=0 \Rightarrow$ soit $a=0$, $a=20$ ou $a=8$.

Pour déterminer quelle est la valeur qui donne un maximum pour f, on fait un tableau de croissance:

a		0		8		20	
$5a$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(20-a)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$8-a$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(a)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	point d'inflexion	$\searrow$

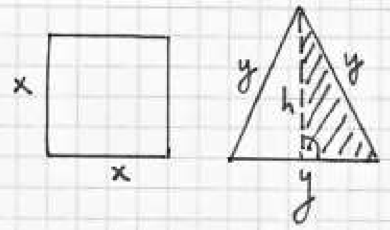
Ainsi $f(a)$ est maximum en $a=8$.

Avec $a=8$, on a $b=20-a=20-8=12$.

De plus, en $a=8$, $f(a)=a^2\cdot b^3=8^2\cdot 12^3=110'592$.

Donc le maximum de a^2b^3 est en $a=8$, $b=12$ et il vaut $110'592$.

Exercice 34



On doit avoir $4x+3y=1$ (mètre).

L'aire du carré vaut x^2.

Pour calculer l'aire du triangle, on doit connaître sa hauteur.

Par le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle hachuré, on a :

$$h^2 = y^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = y^2 - \frac{y^2}{4} = \frac{3y^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3y^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}\,y}{2}.$$

Ainsi l'aire du triangle est $\frac{y \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{3}\,y^2}{4}$.

Comme $4x+3y=1$, on a $3y = 1-4x$, i.e. $y = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}x$.

L'aire du triangle peut alors s'écrire $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}x\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9} - \frac{8}{9}x + \frac{16}{9}x^2\right) =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{36} - \frac{2\sqrt{3}}{9}x + \frac{4\sqrt{3}}{9}x^2 = \frac{4\sqrt{3}}{9}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{9}x + \frac{\sqrt{3}}{36}.$$

L'aire totale du carré et du triangle est donc la fonction $f(x) = x^2 + \frac{4\sqrt{3}}{9}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{9}x + \frac{\sqrt{3}}{36} =$

$$= \frac{9+4\sqrt{3}}{9}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{9}x + \frac{\sqrt{3}}{36}.$$

Cherchons les x tels que $f'(x)=0$.

On a $f'(x) = \frac{18+8\sqrt{3}}{9}x - \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{18+8\sqrt{3}}{9}x - \frac{2\sqrt{3}}{9} = 0 \Rightarrow (18+8\sqrt{3})x = 2\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{18+8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} \cong 0{,}1087.$$

Etablissons un tableau de croissance pour f.

Les valeurs possibles de x sont entre $x=0$ et $x=0{,}25$ ($x=0$ implique que le carré n'existe pas et $x=0{,}25$ signifie que le périmètre du carré est 1 et donc que le triangle n'existe pas).

On a :

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$		$0{,}25$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		min	$\nearrow$	

Ainsi, si $x = \frac{\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}}$, l'aire est minimum. Elle sera maximum à la plus grande des valeurs de $x=0$ et $x=0{,}25$.

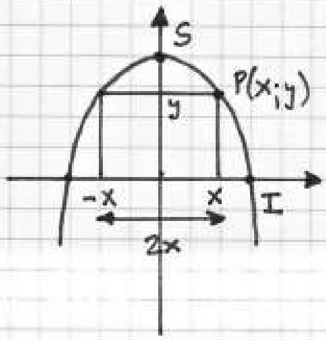
Si $x=0$, $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{36}$. Si $x = 0{,}25 = \frac{1}{4}$, $f(x) = \frac{9+4\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{1}{16} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{36}$.

Ainsi si $x=0$, $f(x) \cong 0{,}048$, et, si $x=0{,}25$, $f(x) = 0{,}0625$.

Donc l'aire sera maximale si $x=0{,}25$.

Par conséquent, si on coupe la ficelle à $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} \cong 0{,}435$ et qu'on fait le carré avec cette longueur et le triangle avec l'autre, l'aire totale est minimale. Si on ne coupe pas la ficelle et que l'on forme un carré avec, l'aire est maximale.

Exercice 35



L'aire du rectangle est $2xy$.

Le point $P(x;y)$ est un point de la parabole.

Le sommet de la parabole est $S(0;4)$.

Son équation s'écrit donc $y = ax^2+4$.

Avec le point $I(3;0)$, par substitution, on obtient :

$$0 = a\cdot 3^2+4 \Rightarrow 9a=-4 \Rightarrow a=-\frac{4}{9}.$$

L'équation de la parabole est donc $y = -\frac{4}{9}x^2+4$.

Le point $P(x;y)$ est donc tel que $y=-\frac{4}{9}x^2+4$.

L'aire du rectangle est donc la fonction $f(x) = 2x\left(-\frac{4}{9}x^2+4\right) = -\frac{8}{9}x^3+8x$.

L'aire sera maximale pour les x tels que $f'(x)=0$.

On a $f'(x) = -\frac{8}{3}x^2+8$.

$f'(x)=0 \Rightarrow -\frac{8}{3}x^2+8=0 \Rightarrow \frac{8}{3}x^2=8 \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

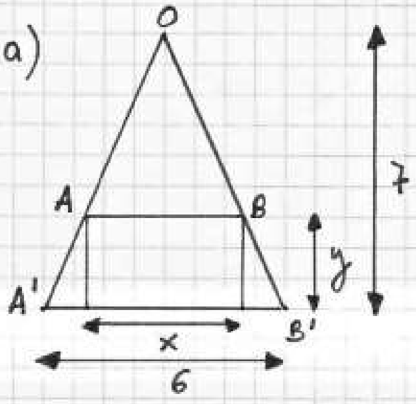
Comme $x>0$, on a $x=\sqrt{3}$.

Par conséquent le triangle d'aire maximale a pour dimensions $2x = \underline{\underline{2\sqrt{3}}}$ et

$y = -\frac{4}{9}(\sqrt{3})^2+4 = -\frac{4}{9}\cdot 3+4 = -\frac{4}{3}+4 = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$. Son aire vaut $2xy = \underline{\underline{\frac{16\sqrt{3}}{3}}}$.

Exercice 36

a)



L'aire du rectangle est $x \cdot y$.

Cherchons une relation entre x et y.

Pour passer du triangle OAB au triangle $OA'B'$, on a une homothétie de centre O et de rapport $\frac{6}{x}$.

La hauteur (verticale) du triangle OAB est $7-y$.

Elle correspond à la hauteur du triangle $OA'B'$ qui vaut 7.

On doit donc avoir $(7-y)\cdot\frac{6}{x} = 7$

$$\Rightarrow 6(7-y) = 7x \Rightarrow x = \frac{6}{7}(7-y) = 6 - \frac{6}{7}y.$$

L'aire du rectangle est donc la fonction $f(y) = \left(6 - \frac{6}{7}y\right)y = 6y - \frac{6}{7}y^2$.

Le maximum de f correspond à y tel que $f'(y) = 0$.

On a $f'(y) = 6 - \frac{12}{7}y$.

$$f'(y) = 0 \Rightarrow 6 - \frac{12}{7}y = 0 \Rightarrow \frac{12}{7}y = 6 \Rightarrow \frac{2}{7}y = 1 \Rightarrow y = \frac{7}{2}.$$

Avec $y = \frac{7}{2}$, on a $x = 6 - \frac{6}{7}y = 6 - \frac{6}{7}\cdot\frac{7}{2} = 6 - 3 = 3$.

Le rectangle d'aire maximale a ainsi pour dimension $\underline{\underline{3 \text{ et } \frac{7}{2}}}$ et son aire vaut $\underline{\underline{\frac{21}{2}}}$.

b) Le rectangle tourne autour de $A'B'$.

Son volume est $\pi y^2 x = \pi y^2\left(6 - \frac{6}{7}y\right) = 6\pi y^2 - \frac{6\pi}{7}y^3$.

On a donc la fonction $g(y) = 6\pi y^2 - \frac{6\pi}{7}y^3$ et on doit trouver son maximum, i.e. y tel que $g'(y) = 0$.

On a $g'(y) = 12\pi y - \frac{18\pi}{7}y^2$.

$$g'(y) = 0 \Rightarrow 12\pi y - \frac{18\pi}{7}y^2 = 0 \Rightarrow 2y - \frac{3}{7}y^2 = 0 \Rightarrow y\left(2 - \frac{3}{7}y\right) = 0$$

$\Rightarrow$ soit $y = 0$, soit $2 - \frac{3}{7}y = 0$.

$y = 0$ ne correspond pas à un volume maximal, puisque, dans ce cas, le volume est nul.

Ainsi on a $2 - \frac{3}{7}y = 0 \Rightarrow \frac{3}{7}y = 2 \Rightarrow y = \frac{14}{3}$.

Avec $y = \frac{14}{3}$, on a $x = 6 - \frac{6}{7}y = 6 - \frac{6}{7}\cdot\frac{14}{3} = 6 - 4 = 2$.

Le rectangle engendrant un volume maximum a ainsi pour dimension 2 et $\frac{14}{3}$ et son volume vaut $\pi y^2 x = \pi\cdot\left(\frac{14}{3}\right)^2\cdot 2 = \underline{\underline{\frac{392\pi}{3}}}$.

c) Le rectangle tourne autour de la hauteur (verticale) passant par son milieu.

Son volume est $\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 y = \frac{\pi}{4}x^2 y$.

Avec $x = 6 - \frac{6}{7}y$, le volume s'écrit $\frac{\pi}{4}\left(6-\frac{6}{7}y\right)^2 y =$

$$= \frac{\pi}{4}\left(36 - \frac{72}{7}y + \frac{36}{49}y^2\right)y = \left(9\pi - \frac{18\pi}{7}y + \frac{9\pi}{49}y^2\right)y =$$

$$= 9\pi y - \frac{18\pi}{7}y^2 + \frac{9\pi}{49}y^3.$$

On a donc la fonction $h(y) = 9\pi y - \frac{18\pi}{7}y^2 + \frac{9\pi}{49}y^3$ et on doit trouver son maximum, i.e. y tel que $h'(y) = 0$.

On a $h'(y) = 9\pi - \frac{36\pi}{7}y + \frac{27\pi}{49}y^2$.

$$h'(y) = 0 \Rightarrow 9\pi - \frac{36\pi}{7}y + \frac{27\pi}{49}y^2 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{4}{7}y + \frac{3}{49}y^2 = 0$$

$$\Rightarrow 49 - 28y + 3y^2 = 0 \Rightarrow 3y^2 - 28y + 49 = 0.$$

C'est une équation du 2e degré de la forme $ay^2 + by + c = 0$ où $a = 3$, $b = -28$ et $c = 49$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-28)^2 - 4\cdot 3\cdot 49 = 784 - 588 = 196$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{196} = 14$.

On a ainsi 2 solutions:

$$y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{28+14}{2\cdot 3} = \frac{42}{6} = 7 \text{ et}$$

$$y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{28-14}{2\cdot 3} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

Afin de déterminer lequel correspond au maximum du volume, il faut faire un tableau de valeur (y peut prendre des valeurs entre 0 et 7):

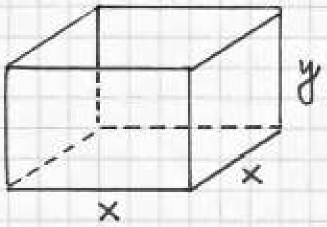
y	0		$\frac{7}{3}$		7
$h'(y)$	+	+	0	−	0
$h(y)$	$\nearrow$		max.	$\searrow$	

Le rectangle engendrant un volume maximum a ainsi pour dimension $x = 6 - \frac{6}{7}y =$

$$= 6 - \frac{6}{7}\cdot\frac{7}{3} = 6 - 2 = \underline{\underline{4}} \text{ et } y = \underline{\underline{\frac{7}{3}}} \text{ et son volume est } \frac{\pi}{4}x^2 y =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot 4^2 \cdot \frac{7}{3} = \underline{\underline{\frac{28\pi}{3}}}.$$

Exercice 37



Le volume doit valoir $108\,cm^3$.

On doit ainsi avoir $x^2y=108$, i.e. $y=\frac{108}{x^2}$.

La surface totale des 5 faces est x^2+4xy.

Avec $y=\frac{108}{x^2}$, on doit trouver le minimum de la fonction $f(x)=x^2+4x\frac{108}{x^2}=x^2+\frac{432}{x}$.

On cherche donc les x tels que $f'(x)=0$.

On a $f'(x)=2x-\frac{432}{x^2}$.

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x-\frac{432}{x^2}=0 \Rightarrow 2x=\frac{432}{x^2} \Rightarrow 2x^3=432 \Rightarrow x^3=216 \Rightarrow x=6$ cm.

Avec $x=6$ cm, on a $y=\frac{108}{6}=18$ cm.

Les dimensions sont donc : <u>base = carré de 6 cm de côté ; hauteur = 18 cm.</u>

Exercice 38

Une boîte de conserve est un cylindre de rayon r et de hauteur h.

Son volume est $\pi r^2 h$ et son aire totale est $2\pi r^2 + 2\pi r h$.

On doit avoir $\pi r^2 h = 1\ell = 1\,dm^3 = 1000\ cm^3$. On a ainsi $h = \frac{1000}{\pi r^2}$ (en cm).

On doit donc chercher le minimum de la fonction $f(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} =$

$$= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}.$$

Cherchons r tel que $f'(r) = 0$.

On a $f'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$.

$$f'(r) = 0 \Rightarrow 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r = \frac{2000}{r^2} \Rightarrow 4\pi r^3 = 2000 \Rightarrow r^3 = \frac{500}{\pi}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \cong 5,419\ cm.$$

Avec $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$, on a $h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi} \cdot r^{-2} = \frac{1000}{\pi}\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^{-2} =$

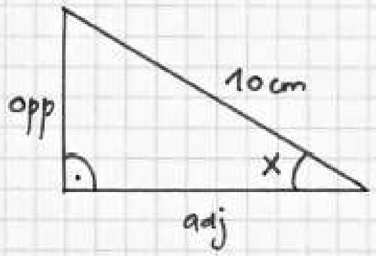
$$= \frac{1000}{\pi}\left(\left(\frac{500}{\pi}\right)^{1/3}\right)^{-2} = \frac{1000}{\pi}\left(\frac{500}{\pi}\right)^{-2/3} = \frac{1000}{\pi}\left(\frac{\pi}{500}\right)^{2/3} =$$

$$= \frac{1000}{\pi}\,\frac{\pi^{2/3}}{500^{2/3}} = \frac{1000}{\pi^{1/3}\,500^{2/3}} = \frac{1}{\pi^{1/3}} \cdot \frac{1000}{(500^2)^{1/3}} = \frac{1}{\pi^{1/3}}\left(\frac{10^9}{500^2}\right)^{1/3} =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{10^9}{500^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{\pi}4000\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{4000}{\pi}} \cong 10,839\ cm.$$

Ainsi les dimensions cherchées sont $r = \sqrt[3]{\frac{4000}{\pi}} \cong 10,839\,cm$ et $h = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \cong 5,419\ cm.$

Exercice 39



L'aire du triangle est $\frac{adj \cdot opp}{2}$.

On a $\cos x = \frac{adj}{10} \Rightarrow adj = 10\cos x$ et

$\sin x = \frac{opp}{10} \Rightarrow opp = 10 \sin x$.

Ainsi l'aire du triangle s'écrit $\frac{10\cos x \cdot 10 \sin x}{2} = \underline{\underline{50 \cos x \cdot \sin x}}$.

On a la fonction $f(x) = 50 \cos x \cdot \sin x$ avec $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et on cherche x tel que $f'(x) = 0$.

On a $f'(x) = u'v + uv'$ où $u = 50\cos x$, $u' = -50 \sin x$, $v = \sin x$ et $v' = \cos x$.

Ainsi $f'(x) = -50 \sin x \cdot \sin x + 50 \cos x \cdot \cos x = 50 \cos^2 x - 50 \sin^2 x$.

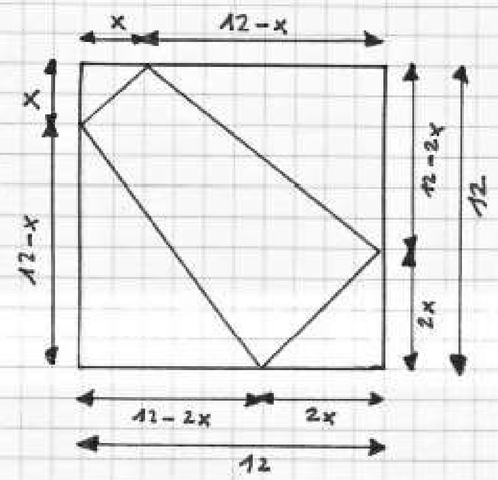
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 50\cos^2 x - 50 \sin^2 x = 0 \Rightarrow 50 \cos^2 x = 50 \sin^2 x$$
$$\Rightarrow \cos^2 x = \sin^2 x \Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 \Rightarrow \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan x = \pm 1$$

Comme on doit avoir $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, le cas $\tan x = -1$ est exclu et on a $\tan x = 1$, d'où $x = \frac{\pi}{4}$.

Pour $x = \frac{\pi}{4}$, on a $f(x) = 50 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 25$.

Ainsi <u>l'aire est maximale si $x = \frac{\pi}{4}$ et elle vaut $25\ cm^2$.</u>

Exercice 40



L'aire du trapèze est l'aire du carré moins l'aire des 4 triangles aux sommets.

L'aire est donc:

$$12^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(12-x)^2}{2} - \frac{(12-2x)^2}{2} =$$

$$= 144 - \frac{x^2}{2} - 2x^2 - \frac{144-24x+x^2}{2} - \frac{144-48x+4x^2}{2} =$$

$$= \cancel{144} - \frac{x^2}{2} - 2x^2 - \cancel{72} + 12x - \frac{x^2}{2} - \cancel{72} + 24x - 2x^2 =$$

$$= -x^2 - 4x^2 + 36x = -5x^2 + 36x.$$

On a donc la fonction $f(x) = -5x^2 + 36x$ et on doit chercher x tel que $f'(x) = 0$.

On a $f'(x) = -10x + 36$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow -10x + 36 = 0 \Rightarrow 10x = 36 \Rightarrow x = 3,6$.

Avec $x = 3,6$, on a $f(x) = -5x^2 + 36 \cdot x = -5 \cdot 3,6^2 + 36 \cdot 3,6 = 64,8$.

Ainsi l'aire maximale du trapèze est $\underline{\underline{64,8\ cm^2}}$.

Exercice 41

On a $f(x) = \sin(2x)$ avec $x \in [0;\pi]$.

On cherche les x tels que la pente est maximum ou minimum.

Autrement dit, on cherche le minimum et le maximum de $f'(x)$.

On a $f'(x) = 2\cos(2x)$.

Si on nomme cette nouvelle fonction g: $g(x) = 2\cos(2x)$, on doit chercher les x tels que $g'(x) = 0$.

On a $g'(x) = -4\sin(2x)$.

$g'(x) = 0 \Rightarrow -4\sin(2x) = 0 \Rightarrow \sin(2x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 + k.\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = k.\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

Comme $x \in [0;\pi]$, on trouve 3 points: $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$.

Faisons un tableau de croissance pour g:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

La pente de f (g) est donc maximale en $x = 0$ et π et minimale en $x = \pi/2$.

En $x = 0$, la pente vaut $g(x) = 2\cos(2x) = 2\cdot 1 = \underline{\underline{2}}$.

En $x = \frac{\pi}{2}$, la pente vaut $g(x) = 2\cos(2x) = 2\cdot(-1) = \underline{\underline{-2}}$.