## Exercice 1



On sait que, si le vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à une droite d, alors une équation cartésienne de d est $ax + by + c = 0$.

Ici $\overrightarrow{AB}$ doit être perpendiculaire à la médiatrice.

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire à la médiatrice.

Une équation cartésienne de la médiatrice est donc : $4x + 3y + c = 0$.

Reste à déterminer c. Pour cela, on va utiliser un point connu de la droite.
On sait que la médiatrice de AB passe par le milieu M de AB.

On a $M = \left(\frac{-5+3}{2} ; \frac{-4+2}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2} ; \frac{-2}{2}\right) = (-1;-1)$. Ainsi $M(-1;-1)$.

Par substitution dans $4x + 3y + c = 0$, on trouve :
$4\cdot(-1) + 3\cdot(-1) + c = 0 \Rightarrow -4 - 3 + c = 0 \Rightarrow -7 + c = 0 \Rightarrow c = 7$.

Une équation cartésienne de la médiatrice est donc $\underline{4x + 3y + 7 = 0}$.

## Exercice 2

La hauteur issue de A est perpendiculaire au segment BC, donc au vecteur $\overrightarrow{BC}$.

On a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de la hauteur issue de A est donc $x + 2y + c = 0$.

$A(6;0)$ appartient à cette hauteur : on doit donc avoir : $6 + 2 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -6$.

Une équation cartésienne de la hauteur issue de A est donc $\underline{\underline{x + 2y - 6 = 0}}$.

La hauteur issue de B est perpendiculaire au segment AC, donc au vecteur $\overrightarrow{AC}$.

On a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de la hauteur issue de B est donc $3x - 2y + c = 0$.

$B(-2;0)$ appartient à cette hauteur : on doit donc avoir $3 \cdot (-2) - 2 \cdot 0 + c = 0$
$\Rightarrow -6 + c = 0 \Rightarrow c = 6$.

Une équation cartésienne de la hauteur issue de B est donc $\underline{\underline{3x - 2y + 6 = 0}}$.

La hauteur issue de C est perpendiculaire au segment AB, donc au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de la hauteur issue de C est donc $x + c = 0$.

$C(0;4)$ appartient à cette hauteur : on doit donc avoir $0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$.

Une équation cartésienne de la hauteur issue de C est donc $\underline{\underline{x = 0}}$.

Pour trouver l'orthocentre C du triangle, on cherche l'intersection des 3 hauteurs. Pour cela, on va chercher l'intersection de 2 hauteurs et vérifier qu'elle appartient à la troisième hauteur.

Cherchons l'intersection de la hauteur issue de A et de la hauteur issue de C :
on doit donc résoudre : $\begin{cases} x + 2y - 6 = 0 \\ x = 0. \end{cases}$

De la 2e relation, on a $x = 1$ et on a $2y = 6 - x = 6 - 0 = 6 \Rightarrow y = 3$.
Avec $x = 0$ et $y = 3$, on a $3x - 2y + 6 = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 6 = -6 + 6 = 0$.

L'orthocentre est donc $\underline{\underline{C(0;3)}}$.

## Exercice 3



On a: $a: x+3y-4=0$.

On en déduit que le vecteur $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ (coefficients de $x$ et $y$) est orthogonal à $a$.

Comme $b$ est parallèle à $a$, le vecteur $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ est aussi orthogonal à $b$.

Ainsi, une équation cartésienne de $b$ est $x+3y+d=0$.

$b$ passe par $A(4;3)$.

Par substitution, on a: $4+3\cdot 3+d=0 \Rightarrow 4+9+d=0 \Rightarrow 13+d=0 \Rightarrow d=-13$.

Une équation cartésienne de $b$ est donc $\underline{\underline{x+3y-13=0}}$.

Comme $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal à $a$, le vecteur $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ est parallèle à $a$.

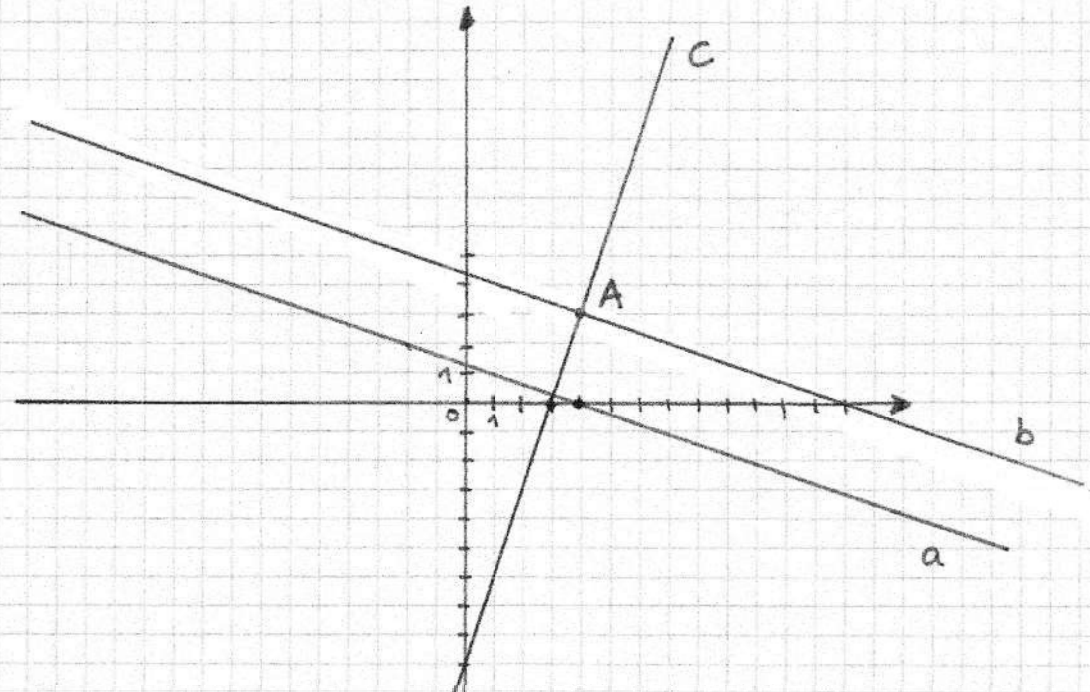
Comme $c$ est orthogonal à $a$, le vecteur $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal à $c$.

Une équation cartésienne de $c$ est donc $3x-y+e=0$.

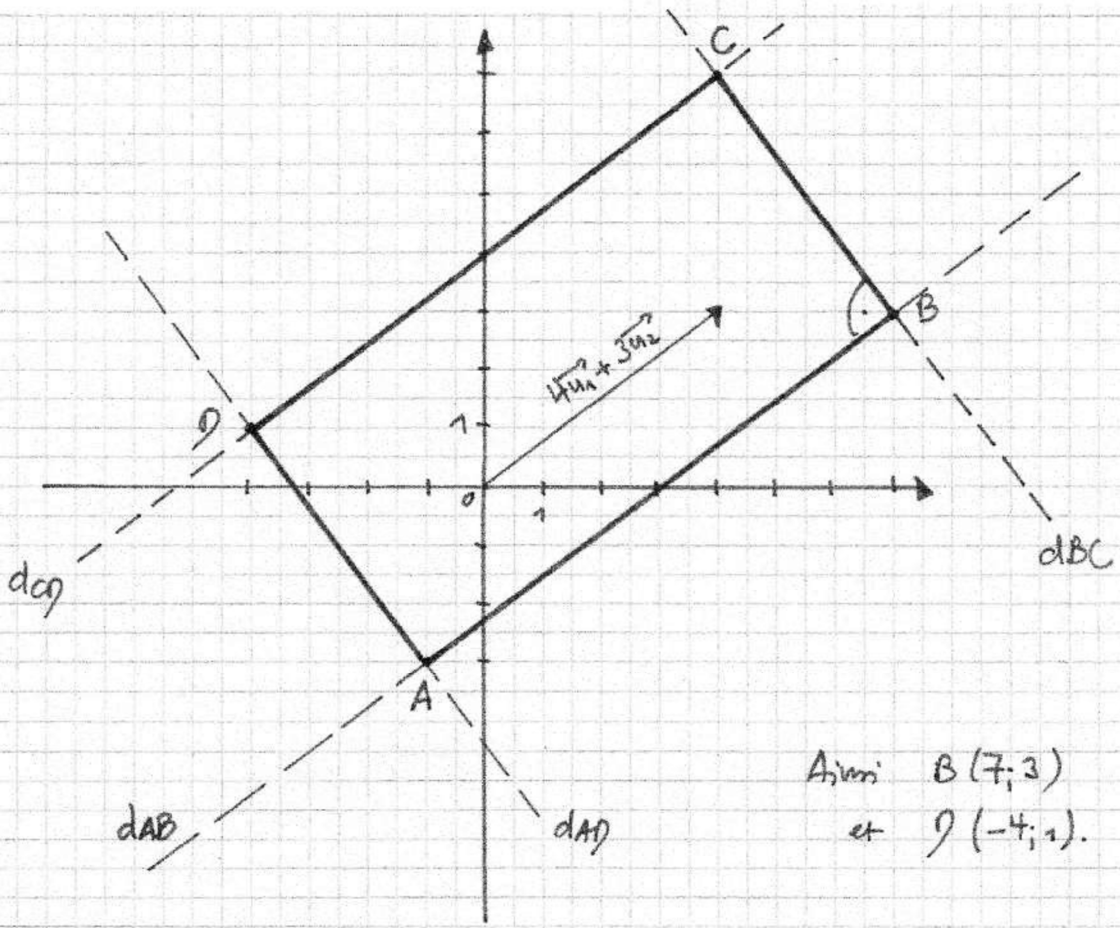
$c$ passe par $A(4;3)$.

Par substitution, on a: $3\cdot 4-3+e=0 \Rightarrow 12-3+e=0 \Rightarrow 9+e=0 \Rightarrow e=-9$.

Une équation cartésienne de $c$ est donc $\underline{\underline{3x-y-9=0}}$.



Exercice 4




La droite $d_{AB}$ passe par $A(-1;-3)$ et est parallèle à $4\vec{u_1}+3\vec{u_2}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

Elle est donc orthogonale à $\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$.

Son équation cartésienne s'écrit ainsi : $3x-4y+c=0$.

Avec $A(-1;-3)$, on obtient : $3\cdot(-1)-4(-3)+c=0 \Rightarrow -3+12+c=0 \Rightarrow 9+c=0 \Rightarrow c=-9$.

L'équation cartésienne de $d_{AB}$ est donc : $3x-4y-9=0$.

La droite $d_{BC}$ est perpendiculaire à la droite $d_{AB}$ (puisque ABCD est un rectangle) et est donc orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

Son équation cartésienne s'écrit donc : $4x+3y+c=0$.

Avec $C(4;7)$, on obtient : $4\cdot4+3\cdot7+c=0 \Rightarrow 16+21+c=0 \Rightarrow 37+c=0 \Rightarrow c=-37$.

L'équation cartésienne de $d_{BC}$ est donc : $4x+3y-37=0$.

B est l'intersection de $d_{AB}$ et $d_{BC}$. $B(x;y)$ est donc la solution du système :

$$\left.\begin{cases}3x-4y-9=0 \xrightarrow{\cdot 3} 9x-12y-27=0\\ 4x+3y-37=0 \xrightarrow{\cdot 4} 16x+12y-148=0\end{cases}\right\} \xrightarrow{+} 25x-175=0 \Rightarrow 25x=175 \Rightarrow x=7.$$

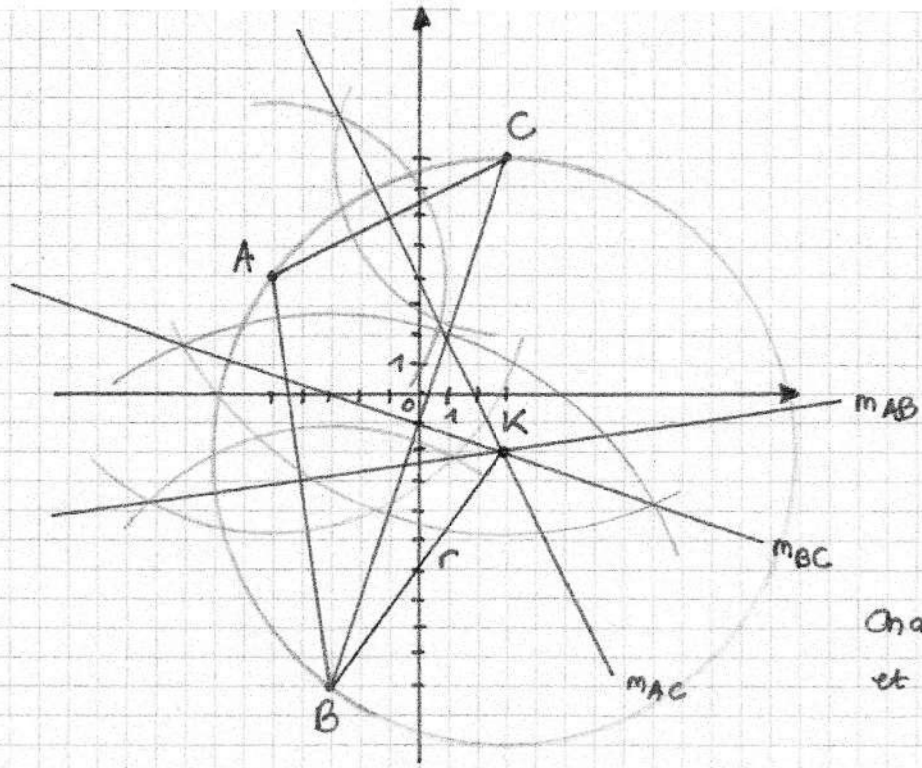
Avec $x=7$, on trouve $4y=3x-9=3\cdot7-9=21-9=12 \Rightarrow y=3$.

Ainsi, on a $\underline{B(7;3)}$.

On a : $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, on a $\underline{D(-4;1)}$.

# Exercice 5




On a $K(3;-2)$ et $r=10$.

Cherchons les équations cartésiennes des médiatrices du triangle ABC :

médiatrice de AB : $m_{AB}$ : est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$ et passe par $M_{AB}$, milieu de AB ;

on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-3\\-10\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-14\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$ ;

une équation cartésienne de $m_{AB}$ est donc : $x-7y+c=0$ ;

de plus, $M_{AB} = \left(\frac{-5+(-3)}{2} ; \frac{4+(-10)}{2}\right) = (-4;-3)$ ;

par substitution, on trouve : $-4-7\cdot(-3)+c=0$

$\Rightarrow -4+21+c=0 \Rightarrow 17+c=0 \Rightarrow c=-17$ ;

une équation cartésienne de $m_{AB}$ est donc $x-7y-17=0$ ;

médiatrice de BC : $m_{BC}$ : est perpendiculaire à $\overrightarrow{BC}$ et passe par $M_{BC}$, milieu de BC ;

on a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-3\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\18\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ ;

une équation cartésienne de $m_{BC}$ est donc $x+3y+c=0$ ;

de plus, $M_{BC} = \left(\frac{-3+3}{2} ; \frac{-10+8}{2}\right) = (0;-1)$ ;

par substitution, on trouve : $0+3\cdot(-1)+c=0 \Rightarrow c=3$ ;

une équation cartésienne de $m_{BC}$ est donc $x+3y+3=0$ ;

médiatrice de AC : $m_{AC}$ : est perpendiculaire à $\overrightarrow{AC}$ et passe par $M_{AC}$, milieu de AC ;

on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}3\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ;

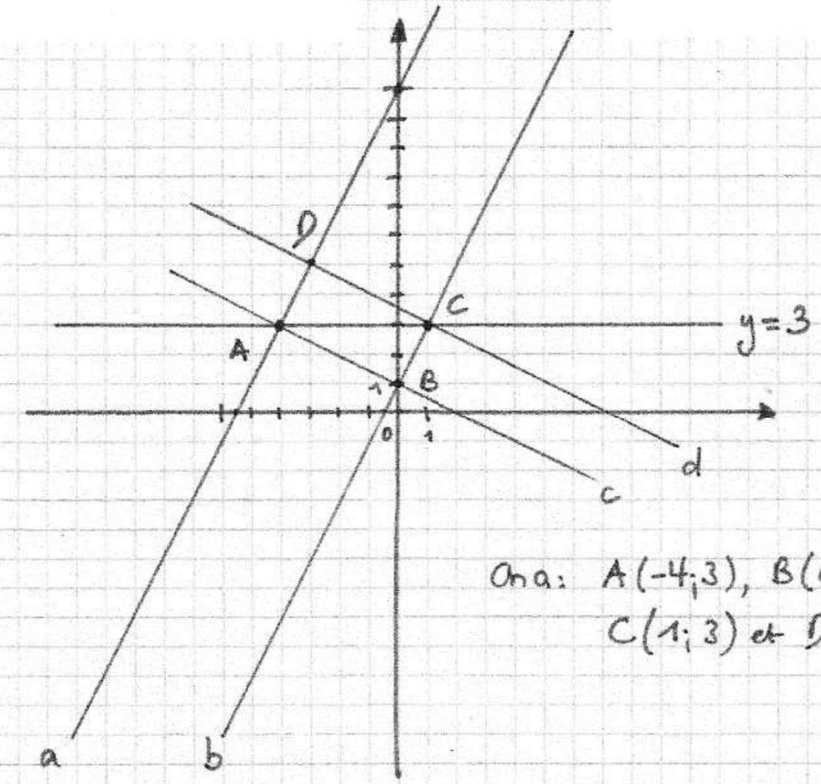
une équation cartésienne de $m_{AC}$ est donc $2x+y+c=0$ ;

de plus, $M_{AC} = \left(\frac{-5+3}{2} ; \frac{4+8}{2}\right) = (-1;6)$ ;

par substitution, on trouve : $2\cdot(-1)+6+c=0 \Rightarrow c=-4$ ;

une équation cartésienne de $m_{AC}$ est donc $2x+y-4=0$.

## Exercice 6




On a : $A(-4;3)$, $B(0;1)$, $C(1;3)$ et $D(-3;5)$.

a et b sont parallèles (ils ont les 2 le même vecteur orthogonal, $\binom{2}{-1}$).
Le point A est l'intersection de a et $y=3$ : on a donc $2x = y - 11 = 3 - 11 = -8$
$\Rightarrow x = -4$. Donc $\underline{\underline{A(-4;3)}}$.

Le point C est l'intersection de b et $y=3$ : on a donc $2x = y - 1 = 3 - 1 = 2$
$\Rightarrow x = 1$. Donc $\underline{\underline{C(1;3)}}$.

Le point B est l'intersection de b et c, c étant la droite perpendiculaire à a passant par A.
Le vecteur $\binom{2}{-1}$ est orthogonal à a. Il est donc parallèle à c. On en déduit que le vecteur $\binom{1}{2}$ est orthogonal à c et que l'équation cartésienne de cette dernière est $x + 2y + c = 0$.
Avec $A(-4;3)$, on trouve $-4 + 2\cdot 3 + c = 0 \Rightarrow 2 + c = 0 \Rightarrow c = -2$.
L'équation cartésienne de c est donc : $x + 2y - 2 = 0$.
Cherchons l'intersection de b et c :

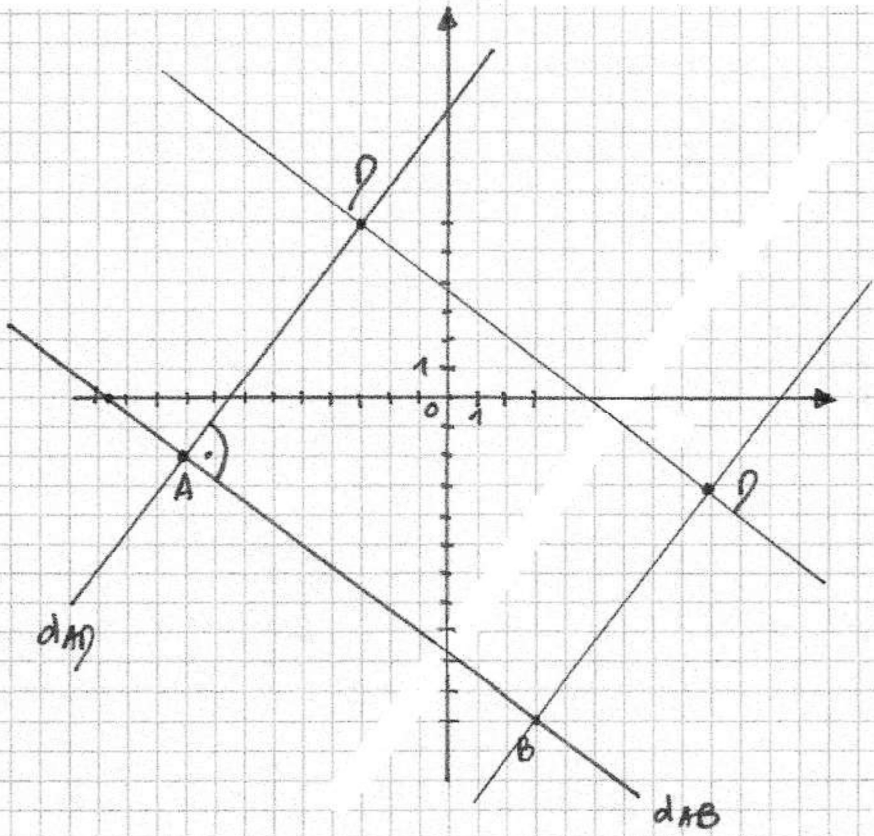
$$\left.\begin{array}{l} b: 2x - y + 1 = 0 \xrightarrow{\cdot 2} 4x - 2y + 2 = 0 \\ c: x + 2y - 2 = 0 \xrightarrow{\cdot 1} x + 2y - 2 = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 5x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Avec $x = 0$, on a $-y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$.
Ainsi $\underline{\underline{B(0;1)}}$.

Le point D est donné par : $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} =$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$ Donc $\underline{\underline{D(-3;5)}}$.

# Exercice 7




Un vecteur orthogonal à la droite $d_{AB}$ : $3x+4y+35=0$ est $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

C'est donc un vecteur parallèle à la droite $d_{AD}$ (puisque $AD \perp AB$).

Ainsi le vecteur $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ est orthogonal à la droite $d_{AD}$.

L'équation cartésienne de la droite $d_{AD}$ est donc : $4x-3y+c=0$.

La droite $d_{AD}$ passe par $D(-3;6)$.

On a donc : $4\cdot(-3)-3\cdot 6+c=0 \Rightarrow -12-18+c=0 \Rightarrow -30+c=0 \Rightarrow c=30$.

L'équation cartésienne de $d_{AB}$ est donc : $4x-3y+30=0$.

A est l'intersection de $d_{AB}$ et $d_{AD}$ :

$$\left.\begin{array}{l} d_{AB} : 3x+4y+35=0 \xrightarrow{\cdot 3} 9x+12y+105=0 \\ d_{AD} : 4x-3y+30=0 \xrightarrow{\cdot 4} 16x-12y+120=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 25x+225=0$$

$$\Rightarrow 25x=-225 \Rightarrow x=-9.$$

Avec $x=-9$, on a $4y=-3x-35=-3\cdot(-9)-35=27-35=-8 \Rightarrow y=-2$.

Ainsi $\underline{\underline{A=(-9;-2)}}$.

La longueur du côté AD est $\|\overrightarrow{AD}\|$. On a :

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-9\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix};$$

ainsi $\|\overrightarrow{AD}\|=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$.

Comme l'aire du rectangle (qui vaut 150) est $\|\overrightarrow{AD}\|\cdot\|\overrightarrow{AB}\|$, on trouve :

$10\cdot\|\overrightarrow{AB}\|=150 \Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\|=15$.

Posons $B(x;y)$. On doit avoir $B \in d_{AB}$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = 15$.

$B \in d_{AB} \Longrightarrow 3x + 4y + 35 = 0$ ①.

$\|\overrightarrow{AB}\| = 15$ : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+9 \\ y+2 \end{pmatrix}$;

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x+9)^2 + (y+2)^2} = 15 \Longrightarrow (x+9)^2 + (y+2)^2 = 225 \quad ②.$$

On doit donc résoudre le système d'équations suivants:

① $3x + 4y + 35 = 0$

② $(x+9)^2 + (y+2)^2 = 225$

De ①, on tire $4y = -3x - 35 \Longrightarrow y = -\frac{3}{4}x - \frac{35}{4}$.

Par substitution dans ②, on trouve:

| | |
|---|---|
| $(x+9)^2 + \left(-\frac{3}{4}x - \frac{35}{4} + 2\right)^2 = 225$ | calculs |
| $(x+9)^2 + \left(-\frac{3}{4}x - \frac{27}{4}\right)^2 = 225$ | identités remarquables |
| $x^2 + 18x + 81 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{81}{8}x + \frac{729}{16} = 225$ | $\cdot 16$ |
| $16x^2 + 288x + 1296 + 9x^2 + 162x + 729 = 3600$ | réduction |
| $25x^2 + 450x + 2025 = 3600$ | $-3600$ |
| $25x^2 + 450x - 1575 = 0$ | $:25$ |
| $x^2 + 18x - 63 = 0$ | |

qui est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = 18$ et $c = -63$.

On a: $\Delta = b^2 - 4ac = 18^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-63) = 324 + 252 = 576$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{576} = 24$;

ainsi $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18 + 24}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-18 - 24}{2 \cdot 1} = \frac{-42}{2} = -21$.

Avec $x_1 = 3$, on a $y_1 = -\frac{3}{4}x_1 - \frac{35}{4} = -\frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{35}{4} = -\frac{9}{4} - \frac{35}{4} = -\frac{44}{4} = -11$.

Avec $x_2 = -21$, on a $y_2 = -\frac{3}{4} \cdot (-21) - \frac{35}{4} = \frac{63}{4} - \frac{35}{4} = \frac{28}{4} = 7$.

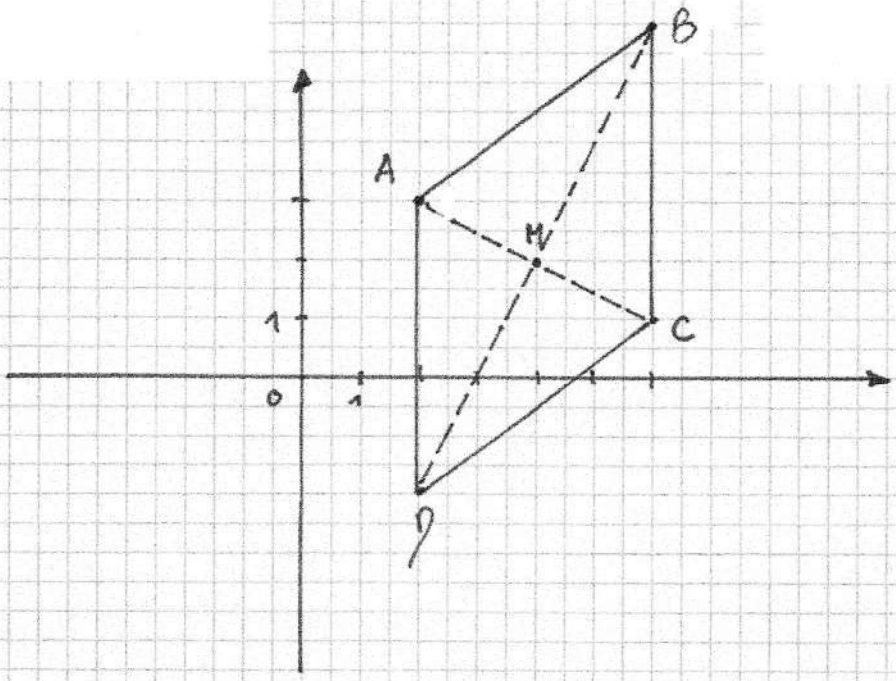
On a donc 2 solutions pour $B$ : soit $B(3;-11)$, soit $B(-21;7)$.

Or, on veut que l'ordonnée de $B$ soit négative. On a donc $\underline{B(3;-11)}$.

On a: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\underline{C(9;-3)}$.

# Exercice 8




On a: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + 2\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} - 2\overrightarrow{OA} =$

$= 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Donc $\underline{C(6;1)}$.

L'aire d'un losange est $\dfrac{\text{pte diag.}\cdot\text{gde diag}}{2}$.

Ici une des diagonales est $\|\overrightarrow{AC}\|$.

On a: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

L'autre diagonale est $\|\overrightarrow{BD}\|$.

L'aire doit valoir 20.

Ainsi $\dfrac{\|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{BD}\|}{2} = 20 \Longrightarrow \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{BD}\| = 40 \Longrightarrow 2\sqrt{5}\,\|\overrightarrow{BD}\| = 40$

$\Longrightarrow \|\overrightarrow{BD}\| = \dfrac{20}{\sqrt{5}} = \dfrac{20\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5}.$

On en déduit que $\|\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MD}\| = 2\sqrt{5}$.

Un vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{AC}$ est $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (puisque $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$).

Un vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{AC}$ est $\dfrac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Ainsi, on va avoir: $\overrightarrow{MB} = 2\sqrt{5}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{MD} = -2\sqrt{5}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$

On a ainsi:

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{\underline{B(6;6)}}$ et

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \underline{\underline{D(2;-2)}}.$

## Exercice 9

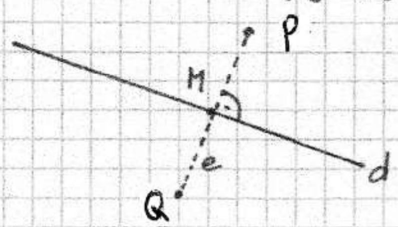


La plus courte distance entre un point $P(x_0\,;y_0)$ et une droite $d$ d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ est $d(P;d)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

a) Ici $x_0=2$, $y_0=6$, $a=3$, $b=5$ et $c=-2$.

Ainsi $d(P;d)=\dfrac{|3\cdot 2+5\cdot 6-2|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\dfrac{|6+30-2|}{\sqrt{9+25}}=\dfrac{34}{\sqrt{34}}=\underline{\underline{\sqrt{34}}}$.

b)




Cherchons l'équation de la droite $e$ passant par $P$ et perpendiculaire à $d$.

Un vecteur orthogonal à $d$ est $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

Un vecteur orthogonal à $e$ (et parallèle à $d$) est $\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$.

Ainsi une équation cartésienne de $e$ est $5x-3y+c=0$.

Avec $P(2;6)$, on a : $5\cdot 2-3\cdot 6+c=0 \Rightarrow 10-18+c=0 \Rightarrow -8+c=0 \Rightarrow c=8$.

Donc l'équation cartésienne de $e$ est $5x-3y+8=0$.

$M$ est l'intersection de $d$ et $e$, donc la solution du système :

$$\left.\begin{cases}3x+5y-2=0 \xrightarrow{\cdot 3} 9x+15y-6=0\\ 5x-3y+8=0 \xrightarrow{\cdot 5} 25x-15y+40=0\end{cases}\right\} \xrightarrow{+} 34x+34=0 \Rightarrow x=-1.$$

Avec $x=-1$, on a $5y=-3x+2=3+2=5 \Rightarrow y=1$.

Ainsi $M(-1;1)$.

(On peut vérifier que $\|\overrightarrow{MP}\|=\sqrt{34}$ : $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{MP}\|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$).

$Q$ est le symétrique de $P$ par rapport à $d$.

On a donc $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OP}+2(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP})=$

$=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$.

Donc $\underline{\underline{Q(-4;-4)}}$.

# Exercice 10

a) Cherchons l'équation cartésienne de a.

a passe par $A(1;4)$ et est parallèle à $15\vec{u_1} - 8\vec{u_2} = \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \end{pmatrix}$.

a est donc perpendiculaire à $\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$.

L'équation cartésienne de a est donc $8x + 15y + c = 0$.

Avec $A(1;4)$, on a : $8 \cdot 1 + 15 \cdot 4 + c = 0 \Rightarrow 8 + 60 + c = 0 \Rightarrow c = -68$.

Ainsi l'équation cartésienne de a est $8x + 15y - 68 = 0$.

La distance de l'origine $(0;0)$ à a est donc $\dfrac{|8 \cdot 0 + 15 \cdot 0 - 68|}{\sqrt{8^2 + 15^2}} = \dfrac{68}{17} = \underline{\underline{4.}}$

b) La distance de l'origine $(0;0)$ à b est $\dfrac{|0+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}707.}}$

c) Cherchons l'équation cartésienne de c.

c passe par $B(4;-11)$ et est parallèle à $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 24 \end{pmatrix}$.

c est donc perpendiculaire à $\begin{pmatrix} 24 \\ 7 \end{pmatrix}$.

L'équation cartésienne de c est donc $24x + 7y + c = 0$.

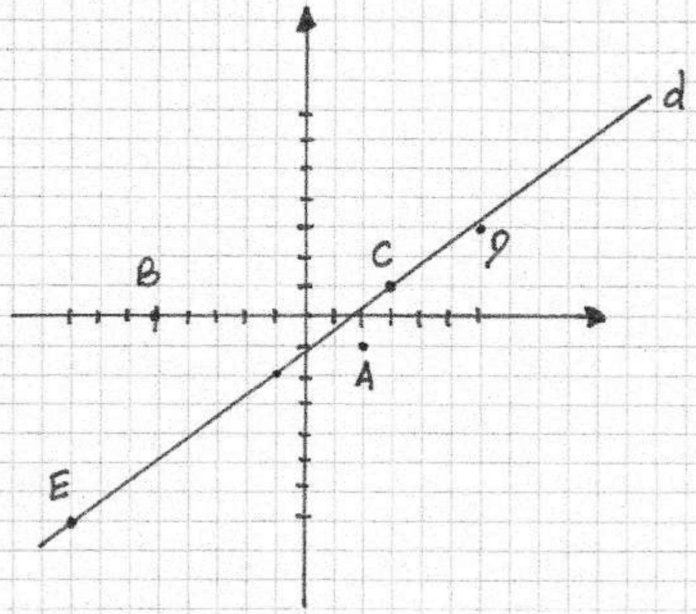
Avec $B(4;-11)$, on a : $24 \cdot 4 + 7 \cdot (-11) + c = 0 \Rightarrow 96 - 77 + c = 0 \Rightarrow 19 + c = 0 \Rightarrow c = -19$.

Ainsi l'équation cartésienne de c est $24x + 7y - 19 = 0$.

La distance de l'origine $(0;0)$ à c est $\dfrac{|24 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 19|}{\sqrt{24^2 + 7^2}} = \underline{\underline{\dfrac{19}{25}}}$.

Exercice 11

a)




b) La plus courte distance entre un point $P(x_0;y_0)$ et une droite d d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ est $d(P;d) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Point A: $d(A;d) = \frac{|3.2-4.(-1)-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|6+8-5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{9}{\sqrt{25}} = \underline{\underline{\frac{9}{5}}}.$

Point B: $d(B;d) = \frac{|3.(-5)-4.0-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|-15-5|}{5} = \frac{|-20|}{5} = \frac{20}{5} = \underline{\underline{4}}.$

Point C: $d(C;d) = \frac{|3.3-4.1-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|9-4-5|}{5} = \frac{0}{5} = \underline{\underline{0}}.$

Point D: $d(D;d) = \frac{|3.6-4.3-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|18-12-5|}{5} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}.$

Point E: $d(E;d) = \frac{|3.(-8)-4.(-7)-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|-24+28-5|}{5} = \frac{|-1|}{5} = \underline{\underline{\frac{1}{5}}}.$

c) Les points dans la même région que A sont les $(x_0;y_0)$ tels que $3x_0-4y_0-5>0$ (puisque, pour A, $3x_0-4y_0-5>0$).

Ainsi <u>D est dans la même région que A</u>.

Par conséquent, les points $(x_0;y_0)$ tels que $3x_0-4y_0-5>0$ sont du même côté, les points $(x_0;y_0)$ tels que $3x_0-4y_0-5<0$ sont de l'autre côté et les points $(x_0;y_0)$ tels que $3x_0-4y_0-5=0$ sont sur la droite.

## Exercice 12

L'équation cartésienne des droites parallèles sont $ax+by+c=0$.
Elles doivent être parallèles au vecteur $3\vec{u_1}-4\vec{u_2}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$. Elles sont donc perpendiculaires à $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$. Ainsi $a=4$ et $b=3$.
L'équation cartésienne des droites parallèles sont $4x+3y+c=0$.
Leur distance au point $A(-6;2)$ doit valoir 6.
On doit donc avoir $\dfrac{|4\cdot(-6)+3\cdot 2+c|}{\sqrt{4^2+3^2}}=6 \Rightarrow \dfrac{|-24+6+c|}{5}=6$

$\Rightarrow |-18+c|=30.$

On a alors soit $-18+c=30$ ①, soit $-18+c=-30$ ②.
① $\Rightarrow c=48$.
② $\Rightarrow c=-12$.
Les équations cartésiennes des droites parallèles sont donc:

$$4x+3y+48=0 \quad \text{et} \quad 4x+3y-12=0.$$

Exercice 13



On remarque tout d'abord que les 2 droites sont parallèles (a est orthogonal à $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et b aussi).

La plus courte distance de a et b est la distance de A à b, où $A \in a$.

Cherchons donc un point $A \in b$.

Si $x = -1$, on a $3\cdot(-1) + 4y - 13 = 0 \Rightarrow -3 + 4y - 13 = 0 \Rightarrow 4y - 16 = 0$

$\Rightarrow 4y = 16 \Rightarrow y = 4.$

On peut donc prendre $A(-1;4)$.

La distance de $A(-1;4)$ à $b: 3x + 4y - 3 = 0$ est $\dfrac{|3\cdot(-1) + 4\cdot 4 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} =$

$$= \frac{|-3+16-3|}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2.$$

La distance la plus courte entre a et b est donc $\underline{\underline{2}}$.