Evaluation formative sur les inéquations, les systèmes et la programmation linéaire

Corrigé

Tous les calculs ayant servi à trouver la solution doivent figurer sur la feuille de donnée.
Toute solution sans fondement mathématique sera ignorée.
Une présentation soignée est exigée.
Durée : 90 minutes. Points : 55

Problème 1. Résoudre et donner la solution sous forme d'intervalle **3+3+4+5 points**

a) $\frac{x+3}{3}+\frac{x-8}{4}<x-1$

b) $-5\leq 4-3x<2$

c) $\begin{cases} \frac{2x+1}{5}+\frac{4x-5}{3}\geq x \\ \frac{7x+2}{5}-\frac{3x}{2}\geq 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3(x-1)-1\geq 1 \\ 4(2x-3)<4 \\ 5(4-x)>5 \end{cases}$

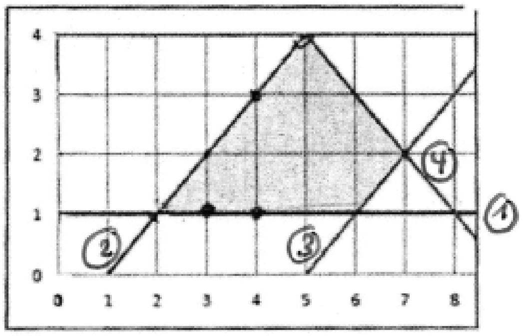
Problème 2. Représenter la région définie par les inéquations **10 points**

$$\begin{cases} 3x-2y\geq 0 \\ 3x-2y-12\leq 0 \\ x-2y+8>0 \\ x-2y+4<0 \end{cases}$$

Voir feuilles annexes

Problème 3. **10 points**

Déterminer le système d'inéquations qui définit le domaine suivant :



Problème 4. **20 points**

Tony, sportif cycliste, prépare son entraînement en vue d'une importante compétition. Son entraînement doit se composer chaque semaine d'un certain nombre d'heures de travail en salle et d'un certain nombre d'heures de travail sur route.

Au total, il doit s'entraîner au moins 20 heures chaque semaine et son nombre d'heures de travail sur route doit être au moins égal au tiers du nombre d'heures en salle.

Pour s'entraîner en salle, il retient les services d'un entraîneur spécialisé qui lui coûte 10 francs l'heure ; cependant cet entraîneur ne sera disponible que s'il est engagé pour au moins 10 heures par semaine.

Pour s'entraîner sur route, il retient les services d'un spécialiste qui lui demande 12 francs l'heure; ce spécialiste ne peut être disponible que pour 15 heures par semaine au maximum.

(a) Comment Tony doit-il planifier sa semaine d'entraînement afin qu'elle lui coûte le moins cher possible ?

(b) Comment Tony devrait-il modifier sa planification si l'entraînement en salle passait à 15 francs l'heure ?

Voir feuilles annexes

Problème 1

a)

$\frac{x+3}{3} + \frac{x-8}{4} < x-1$	$\cdot 12$
$4x+12+3x-24 < 12x-12$	Réduction
$7x-12 < 12x-12$	$-12x+12$
$-5x < 0$	$:(-5)$ ⚠
$x > 0$	

$\Rightarrow$ $x \in \left]0;+\infty\right[$

b)

$-5 \leq 4-3x < 2$	-4
$-9 \leq -3x < -2$	$:(-3)$ ⚠

$3 \geq x > \frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{3} < x \leq 3$

$\Rightarrow$ $x \in \left]\frac{2}{3};3\right]$

c)

$\frac{2x+1}{5} + \frac{4x-5}{3} \geq x$	$\cdot 15$
$6x+3+20x-25 \geq 15x$	Réduction
$26x-22 \geq 15x$	$-15x+22$
$11x \geq 22$	$:11$
$x \geq 2$	

$\frac{7x+2}{5} - \frac{3x}{2} \geq 0$	$\cdot 10$
$14x+4-15x \geq 0$	Réduction
$-x+4 \geq 0$	-4
$-x \geq -4$	$\cdot(-1)$ ⚠
$x \leq 4$	

$x \geq 2$ et $x \leq 4$ $\Rightarrow$ $x \in [2;4]$

d)

$3(x-1)-1 \geq 1$	Distributivité
$3x-3-1 \geq 1$	Réduction
$3x-4 \geq 1$	$+4$
$3x \geq 5$	$:3$
$x \geq \frac{5}{3}$	

$4(2x-3) < 4$	D
$8x-12 < 4$	$+12$
$8x < 16$	$:8$
$x < 2$	

$5(4-x) > 5$	D
$20-5x > 5$	-20
$-5x > -15$	$:(-5)$ ⚠
$x < 3$	

$x \geq \frac{5}{3}$, $x<2$, $x<3$ $\Rightarrow$ $x \in \left[\frac{5}{3};2\right[$.

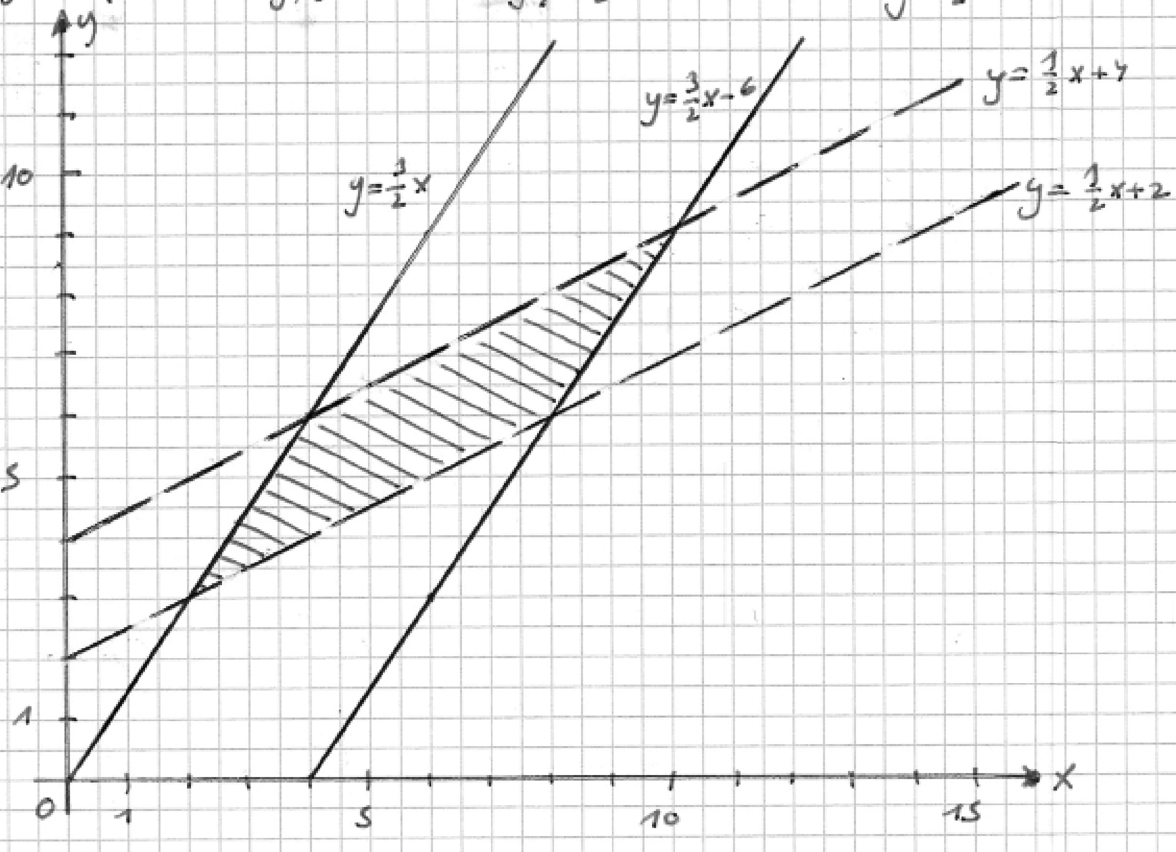
Problème 2

$3x-2y \geq 0 \Rightarrow -2y \geq -3x \Rightarrow y \leq \frac{3}{2}x$: on dessine $y=\frac{3}{2}x$ et on est au-dessous.

$3x-2y-12 \leq 0 \Rightarrow -2y \leq -3x+12 \Rightarrow y \geq \frac{3}{2}x-6$: on dessine $y=\frac{3}{2}x-6$ et on est au-dessus.

$x-2y+8 > 0 \Rightarrow -2y > -x-8 \Rightarrow y < \frac{1}{2}x+4$: on dessine $y=\frac{1}{2}x+4$ et on est au-dessous.

$x-2y+4 < 0 \Rightarrow -2y < -x-4 \Rightarrow y > \frac{1}{2}x+2$: on dessine $y=\frac{1}{2}x+2$ et on est au-dessus.



Problème 3

① $y=1$ et au-dessus: $y \geq 1$.

② points $(2;1)$ et $(4;3) \Rightarrow$ pente $= \frac{3-1}{4-2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow y = x+h$;
avec $(2;1)$ et donc $x=2$ et $y=1$, on a $1=2+h \Rightarrow h=-1 \Rightarrow y=x-1$;
au-dessous $\Rightarrow y \leq x-1$.

③ points $(6;1)$ et $(7;2) \Rightarrow$ pente $= \frac{2-1}{7-6} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow y=x+h$;
avec $(6;1)$ et donc $x=6$ et $y=1$, on a $1=6+h \Rightarrow h=-5 \Rightarrow y=x-5$;
au-dessus $\Rightarrow y \geq x-5$.

④ points $(7;2)$ et $(5;4) \Rightarrow$ pente $= \frac{4-2}{5-7} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow y=-x+h$;
avec $(5;4)$ et donc $x=4$ et $y=5$, on a $5=-4+h \Rightarrow h=9 \Rightarrow y=-x+9$;
au-dessous $\Rightarrow y \leq -x+9$.

Système d'inéquations: $y \geq 1,\ y \leq x-1,\ y \geq x-5,\ y \leq -x+9$.

Problème 4

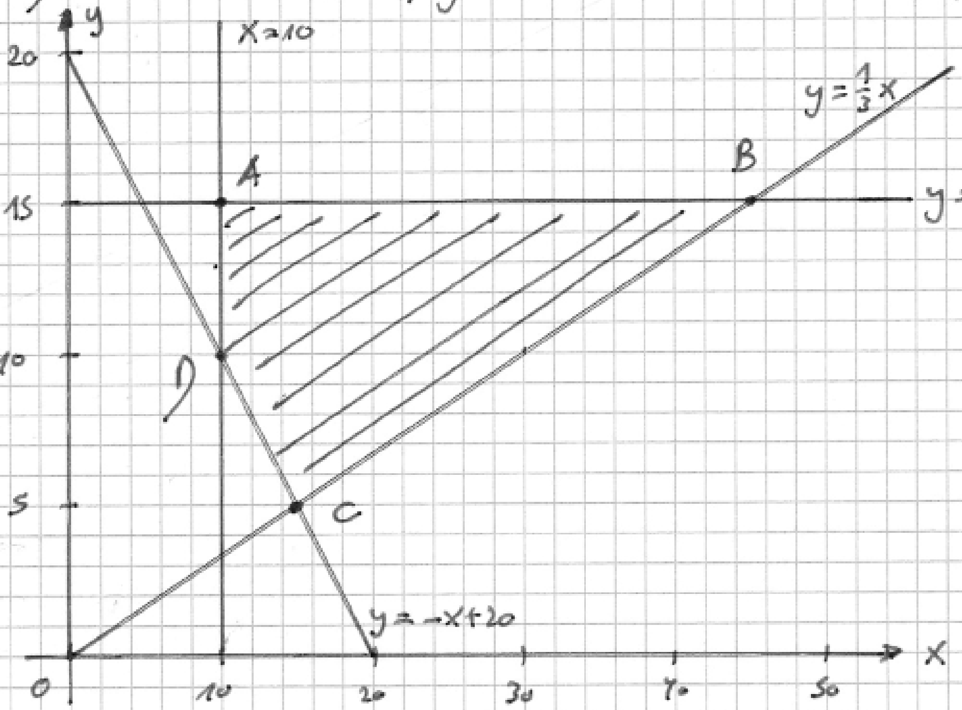
Notons x le nb d'heures en salle et y le nb d'heures sur route.

On peut faire le tableau suivant :

	nb	Coach	Coûts
Heures salle	x	$\geqslant 10$	$10x$
Heures route	y	$\leqslant 15$	$12y$
	$x \geqslant 0$ $y \geqslant 0$ $x+y \geqslant 20$ $y \geqslant \frac{1}{3}x$	$x \geqslant 10$ $y \leqslant 15$	$10x+12y \rightarrow$ trouver le minimum

$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x \geqslant 10$, $y \leqslant 15$, $x+y \geqslant 20 \Rightarrow y \geqslant -x+20$, $y \geqslant \frac{1}{3}x$

On dessine $x=0$ et on est à droite, $y=0$ et on est au-dessus, $x=10$ et on est à droite, $y=15$ et on est au-dessous, $y=-x+20$ et on est au-dessus, $y=\frac{1}{3}x$ et on est au-dessus.



On a : A : $x=10$ et $y=15 \Rightarrow A(10;15)$;

B : intersection de $y=15$ et $y=\frac{1}{3}x \Rightarrow \frac{1}{3}x=15 \Rightarrow x=45 \Rightarrow B(45;15)$;

C : intersection de $y=\frac{1}{3}x$ et $y=-x+20 \Rightarrow \frac{1}{3}x=-x+20 \Rightarrow x=-3x+60 \Rightarrow 4x=60$

$\Rightarrow x=15 \Rightarrow y=\frac{1}{3}\cdot 15=5 \Rightarrow C(15;5)$

D : intersection de $y=-x+20$ et $x=10 \Rightarrow y=-10+20=10 \Rightarrow D(10;10)$.

Calculons les coûts $10x+12y$ pour chacun de ces points :

$A(10;15) \Rightarrow 10\cdot 10+12\cdot 15=280$

$B(45;15) \Rightarrow 10\cdot 45+12\cdot 15=630$

$C(15;5) \Rightarrow 10\cdot 15+12\cdot 5=210 \longleftarrow$

$D(10;10) \Rightarrow 10\cdot 10+12\cdot 10=220$

$\Rightarrow$ <u>15 heures de salle et 5 heures de route</u> pour un coût minimum de 210.–

Si l'entraînement en salle passe à 15.–/heure, la seule chose qui change est la formule pour les coûts : $15x + 12y$.
On calcule alors les coûts $15x+12y$ pour chacun des points A, B, C, D :

$A(10;15) \Rightarrow 15\cdot10+12\cdot15 = 330$

$B(45;15) \Rightarrow 15\cdot45+12\cdot15 = 855$

$C(15;5) \Rightarrow 15\cdot15+12\cdot5 = 285$

$D(10;10) \Rightarrow 15\cdot10+12\cdot10 = 270 \leftarrow$

$\rightarrow$ <u>10 heures de salle et 10 de route</u> pour un coût minimum de 270.–.