3MG ANALYSE 2 TE2

CORRIGE DU TEST

Exercice 1

$f_1(x) = e^{\cos(x)} \cdot \sin(x)$: on va procéder par changement de variable ; avec $t = \cos(x)$, on a
$t' = -\sin(x) \Rightarrow \frac{dt}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)\,dx$
$\Rightarrow \sin(x)\,dx = -dt$; ainsi $\int e^{\cos(x)} \cdot \sin(x)\,dx =$
$= \int e^t \cdot (-dt) = -\int e^t dt = -e^t + c = -e^{\cos(x)} + c,\ c \in \mathbb{R}$;
ainsi une primitive de $e^{\cos(x)} \cdot \sin(x)$ est $-e^{\cos(x)} + c,\ c \in \mathbb{R}$.

$f_2(x) = \left(1 + \frac{1}{x^3}\right) \cdot \ln(x)$: on va procéder par intégration par parties ; avec $u' = 1 + \frac{1}{x^3} = 1 + x^{-3}$
et $v = \ln(x)$, on a $u = x + \frac{x^{-2}}{-2} = x - \frac{1}{2x^2}$ et $v' = \frac{1}{x}$; ainsi
$\int \left(1 + \frac{1}{x^3}\right) \ln(x)\,dx = \int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx =$
$= \left(x - \frac{1}{2x^2}\right)\ln(x) - \int \left(x - \frac{1}{2x^2}\right) \cdot \frac{1}{x}\,dx =$
$= \left(x - \frac{1}{2x^2}\right)\ln(x) - \int \left(1 - \frac{1}{2x^3}\right) dx =$
$= \left(x - \frac{1}{2x^2}\right)\ln(x) - \int \left(1 - \frac{1}{2}x^{-3}\right) dx =$
$= \left(x - \frac{1}{2x^2}\right)\ln(x) - x + \frac{1}{2}\,\frac{x^{-2}}{-2} + c =$
$= \left(x - \frac{1}{2x^2}\right)\ln(x) - x - \frac{1}{4x^2} + c,\ c \in \mathbb{R}$;
ainsi une primitive de $\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)\ln(x)$ est
$\left(x - \frac{1}{2x^2}\right)\ln(x) - x - \frac{1}{4x^2} + c,\ c \in \mathbb{R}$.

$f_3(x) = \cos(x) \cdot x^2$: on va procéder par deux intégrations par parties successives ;
avec $u' = \cos(x)$ et $v = x^2$, on a $u = \sin(x)$ et $v' = 2x$; ainsi
$\int \cos(x) \cdot x^2\,dx = \int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx = \sin(x) \cdot x^2 - \int \sin(x) \cdot 2x\,dx =$
$= \sin(x) \cdot x^2 - 2\int \sin(x) \cdot x\,dx$; avec $f' = \sin(x)$ et $g = x$, on a $f = -\cos(x)$ et
$g' = 1$; ainsi $\int \sin(x)\,dx = \int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx =$
$= -\cos(x) \cdot x - \int (-\cos(x)) \cdot 1\,dx = -\cos(x) \cdot x + \int \cos(x)\,dx =$
$= -\cos(x) \cdot x + \sin(x)$; par conséquent,
$\int \cos(x) \cdot x^2\,dx = \sin(x) \cdot x^2 - 2\left(-\cos(x) \cdot x + \sin(x)\right) + c =$
$= \sin(x) \cdot x^2 + 2\cos(x) \cdot x - 2\sin(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$;
ainsi une primitive de $\cos(x) \cdot x^2$ est $\sin(x) \cdot x^2 + 2\cos(x) \cdot x - 2\sin(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

On a $f(x) = x \cdot (2-x)^{\frac{1}{3}}$.

A. Commençons par chercher une primitive $F(x)$ de $f(x)$.

On va procéder par intégration par parties : avec $u = x$ et $v' = (2-x)^{\frac{1}{3}}$, on a $u' = 1$ et $v = \frac{(2-x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \cdot (-1) = -\frac{3}{4}(2-x)^{\frac{4}{3}}$, ainsi

$$\int x \cdot (2-x)^{\frac{1}{3}} dx = \int uv' dx = uv - \int u'v dx = x \cdot \left(-\frac{3}{4}(2-x)^{\frac{4}{3}}\right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{3}{4}(2-x)^{\frac{4}{3}}\right) dx =$$
$$= -\frac{3x}{4}(2-x)^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{4}\int (2-x)^{\frac{4}{3}} dx = -\frac{3x}{4}(2-x)^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{(2-x)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} \cdot (-1) =$$
$$= -\frac{3x}{4}(2-x)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{7}(2-x)^{\frac{7}{3}} = -\frac{3x}{4}(2-x)^{\frac{4}{3}} - \frac{9}{28}(2-x)^{\frac{3}{3}\frac{7}{3}} =$$
$$= -\frac{3}{4}(2-x)^{\frac{4}{3}}\left(x + \frac{3}{7}(2-x)\right) = -\frac{3}{4}(2-x)^{\frac{4}{3}}\left(x + \frac{6}{7} - \frac{3}{7}x\right) =$$
$$= -\frac{3}{4}(2-x)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{4}{7}x + \frac{6}{7}\right) = -\frac{3}{28}(2-x)^{\frac{4}{3}}(4x+6).$$

Ainsi, on a $F(x) = -\frac{3}{28}(2-x)^{\frac{4}{3}}(4x+6)$.

On a alors $I = \int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0)$.

Comme $F(2) = -\frac{3}{28}(2-2)^{\frac{4}{3}}(4 \cdot 2 + 6) = 0$ et $F(0) = -\frac{3}{28} 2^{\frac{4}{3}}(2 \cdot 0 + 6) =$
$= -\frac{3}{28} \cdot 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 6 = -\frac{9}{7} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = -\frac{9}{7}\sqrt[3]{2} \cong -1{,}62$, on obtient

$$I = \int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0) = 0 - \left(-\frac{9}{7}\sqrt[3]{2}\right) = \frac{9}{7}\sqrt[3]{2} \cong 1{,}62.$$

B. D'après Formulaires et Tables, p. 96-97, on sait que $I = \int_a^b f(x)dx \cong$
$\cong \frac{b-a}{3n}\left(f(a) + 4\left[f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})\right] + 2\left[f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2})\right] + f(b)\right)$,
où n est pair et $a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$ correspondent aux subdivisions de l'intervalle $[a;b]$ en n parties. Ici $a = 0$ et $b = 2$, et, donc, $b - a = 2$

$n = 2$: $x_1 = 1$ et $I \cong \frac{2}{3 \cdot 2}\left(f(0) + 4f(1) + f(2)\right) = \frac{1}{3}\left(0 + 4 \cdot 1 \cdot (2-1)^{\frac{1}{3}} + 0\right) = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 1^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$.

$n = 4$: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{3}{2}$ et

$$I \cong \frac{2}{3 \cdot 4}\left(f(0) + 4\left(f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f\left(\tfrac{3}{2}\right)\right) + 2f(1) + f(2)\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\left(0 + 4\left(\tfrac{1}{2}\left(2-\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \tfrac{3}{2}\left(2-\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) + 2 \cdot 1 \cdot (2-1)^{\frac{1}{3}} + 0\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\left(4\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) + 2\right) = \frac{1}{6}\left(4\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\right) + 2\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{2\sqrt[3]{3} + 6}{\sqrt[3]{2}} + 2\right) \cong 1{,}51$$

$n = 8$: $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$, $x_5 = \frac{5}{4}$, $x_6 = \frac{3}{2}$, $x_7 = \frac{7}{4}$ et

$$I \cong \frac{2}{3 \cdot 8}\left(f(0) + 4\left(f\left(\tfrac{1}{4}\right) + f\left(\tfrac{3}{4}\right) + f\left(\tfrac{5}{4}\right) + f\left(\tfrac{7}{4}\right)\right) + 2\left(f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\tfrac{3}{2}\right)\right) + f(2)\right) =$$
$$= \frac{1}{12}\left(0 + 4\left(\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{7}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + \tfrac{5}{4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} + \tfrac{7}{4}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right) + 2\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + 1 + \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right) + 0\right) =$$
$$\cong 1{,}576$$

C. $n = 2$: erreur $\cong \frac{1{,}62 - \frac{4}{3}}{1{,}62} \cong 0{,}177 = 17{,}7\%$.

$n=4$: erreur $\cong \dfrac{1,62-1,51}{1,62} \cong 0,068 = 6,8\%$.

$n=8$: erreur $\cong \dfrac{1,62-1,576}{1,62} \cong 0,027 = 2,7\%$.

Exercice 3

On a $f(x) = \dfrac{1}{x(1+\ln^2(x))}$.

A. La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. On doit donc avoir $x > 0$.
Or, avec $x>0$, on a $x(1+\ln^2(x)) > 0$.
Ainsi le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$

B. Avec la substitution $t = \ln(x)$, on a $t' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt$.
Ainsi $\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x(1+\ln^2(x))}\,dx = \int \frac{1}{1+\ln^2(x)} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan(t)$ (F+T, p.78).

Comme $t = \ln(x)$, on a ainsi qu'une primitive de f est $F(x) = \arctan(\ln(x)) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

C. On a $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} (F(b) - F(1)) =$
$\displaystyle= \lim_{b\to+\infty} \big(\arctan(\ln(b)) - \arctan(\ln(1))\big) = \lim_{b\to+\infty} \arctan(\ln(b)) - \arctan(0) =$
$\displaystyle= \lim_{b\to+\infty} \arctan(\ln(b)) - 0 = \lim_{b\to+\infty} \arctan(\ln(b))$.

Or, en posant $c = \ln(b)$, on a $c \to +\infty$ si $b \to +\infty$.

Ainsi $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} \arctan(c) = \frac{\pi}{2}$.

De plus $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to 0 \\ >}} \int_a^1 f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to 0 \\ >}} (F(1) - F(0)) =$
$\displaystyle= \lim_{\substack{a\to 0 \\ >}} \big(\arctan(\ln(1)) - \arctan(\ln(a))\big) = 0 - \lim_{\substack{a\to 0 \\ >}} \arctan(\ln(a)) =$
$\displaystyle= -\lim_{\substack{a\to 0 \\ >}} \arctan(\ln(a))$.

Or, en posant $d = \ln(a)$, on a $d \to -\infty$ si $a \underset{>}{\to} 0$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 f(x) = -\lim_{d\to-\infty} \arctan(d) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent $\int_1^\infty f(x)\,dx$ et $\int_0^1 f(x)\,dx$ existent toutes les 2 et elles valent chacune $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 4

On a $f(x) = x \cdot \ln^k(x)$, $k \in \mathbb{R}$.

A. Comme $f(x) = u \cdot v$ avec $u = x$ et $v = \ln^k(x)$, on a $u' = 1$ et $v' = k \ln^{k-1}(x) \cdot \frac{1}{x}$, d'où
$f'(x) = u'v + uv' = 1 \cdot \ln^k(x) + x \cdot k \ln^{k-1}(x) \cdot \frac{1}{x} = \ln^k(x) + k \ln^{k-1}(x) =$
$= \ln^{k-1}(x)\left(\ln(x) + k\right)$

Les points à tangente horizontale sont les x tels que $f'(x) = 0$.
$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln^{k-1}(x) \cdot (\ln(x) + k) = 0 \Rightarrow$ soit $\ln^{k-1}(x) = 0$, i.e. $x = 1$, soit $\ln(x) + k = 0$, i.e. $x = e^{-k}$.
Il y a donc 2 solutions : $x = 1$ et $x = e^{-k}$.
Par conséquent, peu importe $k \in \mathbb{R}$, f admet 2 points à tangente horizontale (en $x = 1$ et en $x = e^{-k}$).

B. Commençons par chercher une primitive de $f(x) = x \ln(x)$.
On procède par intégration par parties : avec $u' = x$ et $v = \ln(x)$, on a $u = \frac{x^2}{2}$ et $v' = \frac{1}{x}$;
ainsi $\int x \ln(x)\,dx = \int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx =$
$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)$.
Une primitive de $f(x) = x\ln(x)$ est donc $F(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right)$.
On a alors $I_1 = \int_0^1 x \cdot \ln(x)\,dx = \lim_{a \overset{>}{\to} 0} \int_a^1 x \cdot \ln(x)\,dx = \lim_{a \overset{>}{\to} 0} \left(F(1) - F(a)\right) =$
$= \lim_{a \overset{>}{\to} 0} \left(\frac{1}{2}\left(\ln(1) - \frac{1}{2}\right) - \frac{a^2}{2}\left(\ln(a) - \frac{1}{2}\right)\right) = \lim_{a \overset{>}{\to} 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{a^2}{2}\left(\ln(a) - \frac{1}{2}\right)\right) =$
$= -\frac{1}{4} - \lim_{a \overset{>}{\to} 0} \frac{a^2}{2}\left(\ln(a) - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \lim_{a \overset{>}{\to} 0} \frac{a^2 \ln(a)}{2} + \lim_{a \overset{>}{\to} 0} \frac{a^2}{4} =$
$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{a \overset{>}{\to} 0} a^2 \ln(a)$.

En posant $c = \frac{1}{a}$, on a $c \to +\infty$, si $a \overset{>}{\to} 0$. Ainsi $\lim_{a \overset{>}{\to} 0} a^2 \ln(a) =$
$= \lim_{c \to +\infty} \left(\frac{1}{c}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{c}\right) = \lim_{c \to +\infty} \frac{1}{c^2}\left(-\ln(c)\right) = -\lim_{c \to +\infty} \frac{\ln(c)}{c^2} = 0$ puisque, lorsque $c \to +\infty$, $\ln(c)$ "perd" vis-à-vis de c^2.

Finalement, on obtient $I_1 = \int_0^1 x \cdot \ln(x)\,dx = -\frac{1}{4}$.

C. On va procéder par intégration par parties : avec $u' = x$ et $v = \ln^k(x)$, on a $u = \frac{x^2}{2}$ et $v' = k \ln^{k-1}(x) \cdot \frac{1}{x}$; ainsi :
$\int_0^1 x \cdot \ln^k(x)\,dx = \lim_{a \overset{>}{\to} 0} \int_a^1 x \ln^k(x)\,dx = \lim_{a \overset{>}{\to} 0} \int_a^1 u'v\,dx = \lim_{a \overset{>}{\to} 0} \left(uv\Big|_a^1 - \int_a^1 uv'\,dx\right) =$

$$= \lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} \left(\frac{x^2}{2} \ln^k(x) \Big|_a^1 - \int_a^1 \frac{x^2}{2} \cdot k \ln^{k-1}(x) \cdot \frac{1}{x}\, dx \right) =$$

$$= \lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} \left(\frac{1^2}{2} \ln^k(1) - \frac{a^2}{2} \ln^k(a) - \frac{k}{2} \int_a^1 x \ln^{k-1}(x)\, dx \right).$$

Similairement à B., en posant $c = \frac{1}{a}$, on a $\lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} a^2 \ln^k(a) = \lim_{c \to +\infty} \left(\frac{1}{c}\right)^2 \ln^k\left(\frac{1}{c}\right) =$

$= \lim_{c \to +\infty} \frac{1}{c^2} \left((-\ln(c))^k \right) = \lim_{c \to +\infty} \frac{(-\ln(c))^k}{c^2} = 0$, puisque, lorsque $c \to +\infty$, $(-\ln(c))^k$ "perd" vis-à-vis de c^2.

On obtient ainsi $I_k = \int_0^1 x \cdot \ln^k(x)\, dx = \lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} \left(-\frac{k}{2} \int_a^1 x \ln^{k-1}(x)\, dx \right) =$

$= -\frac{k}{2} \lim_{\substack{a \to 0 \\ >}} \int_a^1 x \ln^{k-1}(x)\, dx = -\frac{k}{2} \int_0^1 x \ln^{k-1}(x)\, dx = -\frac{k}{2} I_{k-1}$.

On a donc bien $I_k = -\frac{k}{2} \cdot I_{k-1}$.

D. En A, on a montré que $I_1 = -\frac{1}{4}$.

Avec $I_k = -\frac{k}{2} \cdot I_{k-1}$, on a $I_2 = -\frac{2}{2} \cdot I_1 = -I_1 = \frac{1}{4}$, $I_3 = -\frac{3}{2} \cdot I_2 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} =$ $= -\frac{3}{12}$, $I_4 = -\frac{4}{2} I_3 = -2 I_3 = -2 \cdot \left(-\frac{3}{12}\right) = \frac{3}{6}$, etc.

On a $I_n = -\frac{n}{2} I_{n-1} = -\frac{n}{2}\left(-\frac{n-1}{2} I_{n-2}\right) = \frac{n(n-1)}{2^2} I_{n-2} = \frac{n(n-1)}{2^2}\left(-\frac{n-2}{2} I_{n-3}\right) =$

$= -\frac{n(n-1)(n-2)}{2^3} I_{n-3} = \dots = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 2}{2^{n-1}} I_1 =$

$= (-1)^{n-1} \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 2}{2^{n-1}} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = (-1)^n \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{2^{n-1} \cdot 2^2} =$

$= (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$. On obtient ainsi $I_n = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$.

Montrons-la par récurrence (induction).

Pour $n=1$, on a $I_1 = (-1)^1 \cdot \frac{1!}{2^{1+1}} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$. La relation est vraie pour $n=1$.

Supposons-la vraie pour n (hypothèse de récurrence) et montrons-la pour $n+1$.

On a $I_{n+1} = \frac{-(n+1)}{2} I_n \underset{\text{hyp. de réc.}}{=} \frac{-(n+1)}{2} \cdot (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)\cdot n!}{2^{(n+1)+1}} =$

$= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{2^{(n+1)+1}}$. CQFD.