Lycée Denis-de-Rougemont
Degré 11

Mathématiques niveau 1

ANALYSE

Corrigé du TE B

Exercice 1

On a $f(x) = y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x + 7$.

Les points à tangente horizontale sont les $(x;y)$ avec $f'(x) = 0$.

On a $f'(x) = x^2 - 2x - 15$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$, équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1, b = -2, c = -15$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64$ et $\sqrt{\Delta} = 8$.

On trouve $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+8}{2 \cdot 1} = \frac{10}{2} = 5$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-8}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$.

Avec $x_1 = 5$, on a $y_1 = f(x_1) = \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 5^2 - 15 \cdot 5 + 7 = \frac{125}{3} - 25 - 75 + 7 = -\frac{154}{3}$.

Avec $x_2 = -3$, on a $y_2 = f(x_2) = \frac{1}{3}(-3)^3 - (-3)^2 - 15 \cdot (-3) + 7 = -9 - 9 + 45 + 7 = 34$.

Les points à tangente horizontale sont donc $\underline{\left(5; -\frac{154}{3}\right) \text{ et } (-3;34)}$.

Exercice 2

a) $y = \frac{\sin(x)}{x^2} = \frac{u}{v}$ où $u = \sin(x)$ et $v = x^2$.

$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ où $u' = \cos(x)$ et $v' = 2x$.

Ainsi $y' = \frac{\cos(x) \cdot x^2 - \sin(x) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x\left(x\cos(x) - 2\sin(x)\right)}{x^4} = \underline{\underline{\frac{x\cos(x) - 2\sin(x)}{x^3}}}$.

b) $y = \cos(x) \cdot (1 - \sin(x)) = u \cdot v$ où $u = \cos(x)$ et $v = 1 - \sin(x)$.

$y' = u'v + uv'$ où $u' = -\sin(x)$ et $v' = -\cos(x)$.

Ainsi $y' = -\sin(x)\left(1 - \sin(x)\right) + \cos(x) \cdot (-\cos(x)) = \underline{\underline{-\sin(x) + \sin^2(x) - \cos^2(x)}}$.

On peut utiliser la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Rightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$.

On trouve $y' = -\sin(x) + \sin^2(x) - 1 + \sin^2(x) = \underline{\underline{2\sin^2(x) - \sin(x) - 1}}$.

c) $y = \cos\left(x^2 - \frac{2}{x} + 3\right)$, ce qui est une fonction composée.

On a $y' = -\sin\left(x^2 - \frac{2}{x} + 3\right) \cdot \left(2x + \frac{2}{x^2}\right) = \underline{\underline{-2\left(x + \frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x^2 - \frac{2}{x} + 3\right)}}$.

Exercice 3

On a $y=-2x^2+12x-9$.

a) Le sommet d'une parabole de la forme $y=ax^2+bx+c$ est $(x_S\,;\,y_S)$, où $x_S=-\frac{b}{2a}$.
Ici $a=-2$, $b=12$ et $c=-9$.
Ainsi $x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{12}{2\cdot(-2)}=-\frac{12}{-4}=3$.

Donc $y_S=-2\cdot 3^2+12\cdot 3-9=-18+36-9=9$.

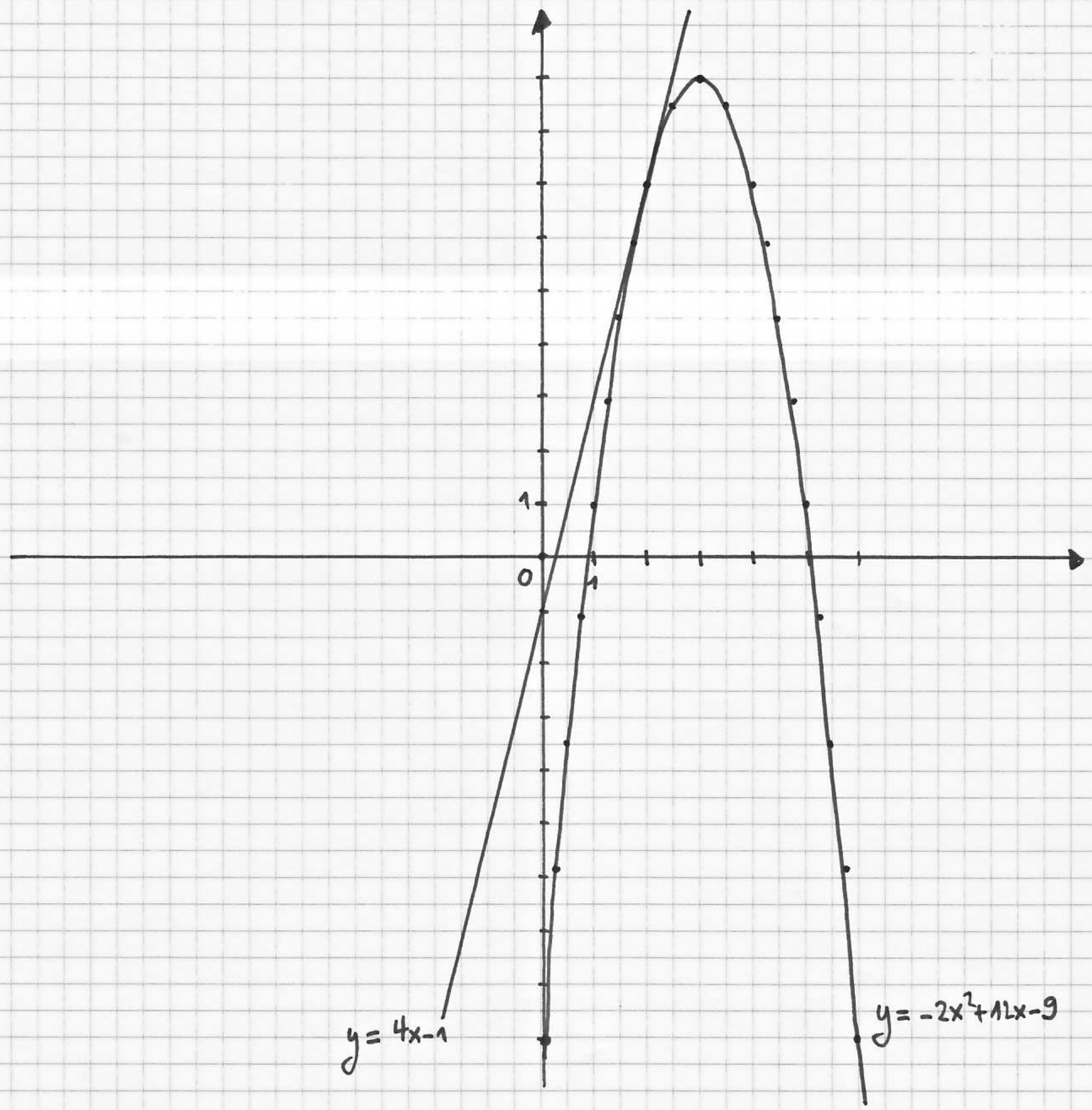
Le sommet est donc $(3\,;\,9)$.

Autre manière: on peut considérer la fonction $f(x)=-2x^2+12x+9$ et le $(x;y)$ tel que $f'(x)=0$ correspondra au sommet de la parabole.

On a $f'(x)=-4x+12$.
$f'(x)=0 \Rightarrow -4x+12=0 \Rightarrow 4x=12 \Rightarrow x=3$.
Avec $x=3$, $f(x)=-2\cdot 3^2+12\cdot 3-9=9$.
Ainsi le sommet est $(3\,;\,9)$.

b) L'équation de la tangente est de la forme $y=mx+h$, où m est la pente.
Or la pente est égale à la dérivée de la fonction au point concerné.
On a donc $m=f'(2)=-4\cdot 2+12=-8+12=4$.
L'équation de la tangente est donc $y=4x+h$.
Pour trouver h, on utilise le point de tangence (point appartenant et au graphe de f et à la tangente) : il s'agit du point $(2\,;\,f(2))$.
On a $f(2)=-2\cdot 2^2+12\cdot 2-9=-8+24-9=7$.
Le point de tangence est $(2\,;\,7)$.
Par substitution dans $y=4x+h$, on trouve $7=4\cdot 2+h \Rightarrow h=-1$.
L'équation de la tangente est ainsi $y=4x-1$.

c) La parabole et la tangente se présente comme suit:


1
0
1
y = 4x-1
y = -2x²+12x-9

Exercice 4

$f(x) = \frac{a}{x} + b.$

En $x = 3$, le graphe de f admet comme tangente la droite t: $y = 4x - 22$.
Le point de tangence est donc $(3; t(3))$.
On a $t(3) = 4 \cdot 3 - 22 = -10$.
On a donc le point $(3; -10)$, qui appartient aussi au graphe de f.
On doit donc avoir $\frac{a}{3} + b = -10$ (1).
La pente de t: $y = 4x - 22$ est 4.
Or, cette pente doit être égale à $f'(3)$.
On a $f'(x) = -\frac{a}{x^2}$ et $f'(3) = -\frac{a}{9}$.

On doit donc avoir $-\frac{a}{9} = 4$ (2).

De (2), on obtient $-a = 36 \Rightarrow a = -36$.

Avec (1), on trouve $\frac{-36}{3} + b = -10 \Rightarrow -12 + b = -10 \Rightarrow b = 2$.

On a donc : $\underline{\underline{a = -36 \text{ et } b = 2}}$.