

### Exercice 10.1

Soit  $E_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  un ensemble contenant les  $n$  premiers nombres naturels et  $a_n$  le nombre de sous-ensemble de  $E_n$ . Par exemple, il y a 4 sous-ensembles de  $E_2$  :  $\emptyset$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$  and  $\{1, 2\}$ .

- Déterminer  $a_1, a_2, a_3$  et  $a_4$ .
- Expliquer  $a_{k+1} = 2 \cdot a_k$ . Dédurre  $a_n = 2^n$ .
- Combien de sous-ensembles de  $E_n$  ont exactement  $k$  éléments?

### Exercice 10.2

- Expliquer la relation :  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$
- Expliquer pourquoi  $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$  et  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- Vérifier que le triangle de Pascal contient des coefficients binomiaux.
- Prouver, par induction, l'expression suivante :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, n \in \mathbb{N}^*$$

### Exercice 10.3

De combien de manières différentes 7 personnes peuvent-elles prendre place sur 7 chaises autour d'une table?

- Les chaises sont alignées.
- La table est ronde.

### Exercice 10.4

Sur une feuille quadrillée, on suit les traits pour se rendre d'un point D (départ) à un point A (arrivée) qui se trouve 7 carrés à droite et 4 carrés au-dessus. Combien de parcours de longueur minimale peut-on faire?

### Exercice 10.5

On dispose de boîtes et de boules. Dans chaque boîte il est possible de mettre au plus une boule. Dans chacun des cas suivants, dire de combien de manières différentes on peut placer les boules dans les boîtes.

- Ranger 5 boules de couleurs différentes dans 5 boîtes alignées.
- Ranger 5 boules choisies parmi 12 boules de couleurs différentes dans 5 boîtes alignées
- Ranger 5 boules choisies parmi 7 boules blanches et 10 boules noires dans 5 boîtes alignées
- Ranger 7 boules blanches et 10 boules noires dans 20 boîtes alignées
- Ranger 9 boules choisies parmi 6 boules blanches et 10 boules noires dans 9 boîtes alignées
- Ranger 10 boules blanches et 10 boules noires dans 20 boîtes alignées de sorte que les 2 boîtes médianes contiennent chacune une boule blanche.

### Exercice 10.6

A bord d'un voilier, chaque signal est constitué de 8 pavillons alignés verticalement. Combien de signaux différents peuvent être formés à partir de 4 pavillons rouges, 3 pavillons blancs et 1 pavillon bleu ?

### Exercice 10.7

Dans une grille rectangulaire de 5 colonnes et 3 lignes, de combien de façons différentes peut-on placer...

- 5 jetons rouges s'il doit y avoir un jeton par colonne ?
- 5 jetons de couleurs différentes, un dans chaque colonne ?
- 5 jetons rouges ?
- 5 jetons de couleurs différentes ?

### Exercice 10.8

Sur une feuille quadrillée, on suit les traits pour se rendre d'un point D (départ) à un point A (arrivée) qui se trouve 7 carrés plus à droite et 4 carrés plus haut. Combien y a-t-il de parcours comportant 11 unités ?

### Exercice 10.9

L'alphabète contient 26 lettres : 5 voyelles et 21 consonnes.

- Combien de mots de 5 lettres possédant 3 consonnes différentes et 2 voyelles différentes peut-on former ?
- Combien de ces mots contiennent la lettre B ?

### Exercice 10.10

- Au Jass, combien de jeux différents un joueur peut-il recevoir ?  
Pour mémoire, chacun des 4 joueurs reçoit 9 cartes.
- Combien y a-t-il de donnes différentes ? (jeux des 4 joueurs N.O.S.E)
- Combien y a-t-il de donnes qui attribuent les 4 valets au joueur N ?
- Combien de possibilités a-t-on en tirant 5 cartes d'un paquet de Jass qu'une d'entre elles au moins soit un as ?

### Exercice 10.11

Au Sport-Toto on doit pronostiquer pour 13 matchs le résultat (gagné, perdu, nul). Combien de pronostics différents y a-t-il ?

### Exercice 10.12

On souhaite ranger 2 boules jaunes et deux boules vertes dans 3 tiroirs (bleu, jaune et gris). Combien y a-t-il de rangements différents ?

### Exercice 10.13

Calculer le nombre de possibilités qu'a Lisa de placer 5 livres épais, 4 moyennement épais et 3 livres fins sur une étagère de telle sorte que les livres de même épaisseur soient côte à côte.

### Exercice 10.14

Combien de « mots » différents forme-t-on avec toutes les lettres de...

- AUTO
- ELEVES
- SOCIOLOGIQUES

### Exercice 10.15

Supposons qu'une plaque d'immatriculation contient deux lettres distinctes suivies de 3 chiffres dont le premier est différent de zéro. Combien de plaques différentes peut-on imprimer ?

### Exercice 10.16

Combien y a-t-il de nombres de 4 chiffres différents ?

### Exercice 10.17

De combien de façons peut-on tirer l'une après l'autre, 3 cartes d'un jeu 52 cartes ?

- Avec remise, en tenant compte de l'ordre de tirage des cartes
- Sans remise, en tenant compte de l'ordre de tirage des cartes

### Exercice 10.18

- De combien de façons différentes, 3 garçons et 2 filles peuvent prendre place sur un banc ?
- De combien de façons différentes peuvent-ils s'asseoir si les garçons s'assoient les uns à côté des autres et s'il en est de même pour les filles
- De combien de manières différentes peuvent-ils s'asseoir si seulement les filles s'assoient l'une à côté des autres ?

### Exercice 10.19

- Sachant que les personnes de même nationalité s'asseyent les unes à côté des autres, de combien de façons différentes 3 Américains, 4 Français, 4 Danois et 2 Italiens peuvent-ils prendre place sur un banc ?
- Même problème en supposant que les personnes s'assoient autour d'une table ronde.

### Exercice 10.20

De combien de manières peut-on former un jury de 3 hommes et 2 femmes parmi 7 hommes et 5 femmes ?

### Exercice 10.21

A l'oral d'un examen, un étudiant doit répondre à 8 questions sur un total de 10.

- Combien de choix possibles y a-t-il ?
- Combien de choix y a-t-il s'il doit répondre aux 3 premières questions ?
- Combien de choix y a-t-il s'il doit répondre au moins à 4 des 5 premières questions ?

### Exercice 10.22

Dans une assemblée de 25 dames et 15 messieurs, on nomme un comité de 5 personnes.

- a. Combien de comités peut-on envisager ?
- b. Combien de comités comprennent 3 dames ?
- c. Combien de comités comprennent au moins 3 dames ?
- d. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une dame au sein de comité ?

### Exercice 10.23

Une délégation de 4 lycéens est choisie chaque année pour suivre le congrès annuel de l'Association des Parents d'Elèves.

- a. De combien de manières peut-on former la délégation s'il y a 12 lycéens éligibles ?
- b. De combien de manières, si deux lycéens éligibles refusent de suivre le congrès ensemble ?
- c. De combien de manières si deux des lycéens éligibles sont des frères jumeaux et ne pourront suivre le congrès qu'ensemble ?