Exercice 1

L'équation d'un cercle donné par $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ est un cercle de centre $(x_0;y_0)$ et de rayon r.

a) C_1 : $x^2+y^2-14x-2y-1246=0$;

on a : $x^2-14x+49=(x-7)^2 \Rightarrow x^2-14x=(x-7)^2-49$;

$y^2-2y+1=(y-1)^2 \Rightarrow y^2-2y=(y-1)^2-1$;

ainsi, on trouve : $(x-7)^2-49+(y-1)^2-1-1246=0$

$\Rightarrow (x-7)^2+(y-1)^2-1296=0$

$\Rightarrow (x-7)^2+(y-1)^2=36^2$;

donc le centre est $(7;1)$ et le rayon est 36.

b) C_2 : $x^2+y^2+10x+14y+25=0$;

on a : $x^2+10x+25=(x+5)^2 \Rightarrow x^2+10x=(x+5)^2-25$;

$y^2+14y+49=(y+7)^2 \Rightarrow y^2+14y=(y+7)^2-49$;

ainsi, on trouve : $(x+5)^2-25+(y+7)^2-49+25=0$

$\Rightarrow (x+5)^2+(y+7)^2-49=0$

$\Rightarrow (x+5)^2+(y+7)^2=7^2$;

donc le centre est $(-5;-7)$ et le rayon est 7.

c) C_3 : $x^2+y^2+5x-3y+8=0$;

on a : $x^2+5x+\frac{25}{4}=(x+\frac{5}{2})^2 \Rightarrow x^2+5x=(x+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}$;

$y^2-3y+\frac{9}{4}=(y-\frac{3}{2})^2 \Rightarrow y^2-3y=(y-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}$;

ainsi, on trouve : $(x+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}+(y-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+8=0$

$\Rightarrow (x+\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2}=0$

$\Rightarrow (x+\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$;

donc le centre est $(-\frac{5}{2};\frac{3}{2})$ et le rayon est $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d) C_4 : $3x^2+3y^2+7x-10 \Rightarrow x^2+y^2+\frac{7}{3}x-\frac{10}{3}=0$;

on a : $x^2+\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}=(x+\frac{7}{6})^2 \Rightarrow x^2+\frac{7}{3}x=(x+\frac{7}{6})^2-\frac{49}{36}$;

ainsi, on trouve : $(x+\frac{7}{6})^2-\frac{49}{36}+y^2-\frac{10}{3}=0$

$\Rightarrow (x+\frac{7}{6})^2+y^2-\frac{169}{36}=0$

$\Rightarrow (x+\frac{7}{6})^2+y^2=\left(\frac{13}{6}\right)^2$;

donc le centre est $(-\frac{7}{6};0)$ et le rayon est $\frac{13}{6}$.

Exercice 2

L'équation réduite d'un cercle est de la forme $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, où $(x_0;y_0)$ est le centre du cercle et r son rayon.

C_1 : on a $x_0=3$ et $y_0=-4$;
si C_1 est tangent à l'axe des ordonnées, c'est que son rayon est la distance du centre à l'axe y : on a donc $r=3$;
donc $\underline{\underline{(x-3)^2+(y+4)^2=9.}}$

C_2 : on a $x_0=0$ et $y_0=0$;
si C_2 passe par $A(12;6)$, on a $r=\|\overrightarrow{OA}\|=\sqrt{12^2+6^2}=\sqrt{144+36}=\sqrt{180}$;
donc $\underline{\underline{x^2+y^2=180.}}$

C_3 : on a $x_0=2$ et $y_0=3$;
si C_3 est tangent à la droite $d: 2x-y+4=0$, on a $r=\text{dist}(M;d)=$
$=\dfrac{|2\cdot 2-3+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$;
donc $\underline{\underline{(x-2)^2+(y-3)^2=5.}}$

C_4 : si C_4 est situé dans le deuxième quadrant, on a $x_0<0$ et $y_0>0$;
on a $r=5$;
si C_4 est tangent aux axes de référence, on a alors $x_0=-5$ et $y_0=5$;
donc $\underline{\underline{(x+5)^2+(y-5)^2=25.}}$

C_5 et C_6 : leurs centres est sur $c: x+y-63=0$; on a donc $x_0+y_0-63=0$;
si C_5 et C_6 sont tangents à a et b, on a $\text{dist}(K;a)=\text{dist}(K;b)$, où
$K(x_0;y_0)$: $\dfrac{|4x_0+3y_0|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|12x_0-5y_0|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}} \Rightarrow \dfrac{|4x_0+3y_0|}{5}=\dfrac{|12x_0-5y_0|}{13}$;

ainsi, soit $\dfrac{4x_0+3y_0}{5}=\dfrac{12x_0-5y_0}{13}$ ①,

soit $\dfrac{4x_0+3y_0}{5}=-\dfrac{12x_0-5y_0}{13}$ ② ;

① $\Rightarrow 52x_0+39y_0=60x_0-25y_0 \Rightarrow -8x_0=-64y_0 \Rightarrow x_0=8y_0$;
avec $x_0+y_0-63=0$, on trouve : $8y_0+y_0-63=0 \Rightarrow 9y_0=63 \Rightarrow y_0=7$;
avec $x_0=8y_0$, on obtient : $x_0=8\cdot 7=56$;
② $\Rightarrow 52x_0+39y_0=-60x_0+25y_0 \Rightarrow 112x_0=-14y_0 \Rightarrow -8x_0=y_0$;
avec $x_0+y_0-63=0$, on trouve : $x_0-8y_0-63=0 \Rightarrow -7y_0=63 \Rightarrow y_0=-9$;
avec $y_0=-8x_0$, on obtient $x_0=-8\cdot(-9)=72$;

On a ainsi 2 centres : $(56;7)$ et $(72;-9)$.

Les rayons sont alors :

$(56;7) \Rightarrow r = \text{dist}((56;7);a) = \text{dist}((56;7);b)$;

$$\text{dist}((56;7);a) = \frac{|4\cdot 56 + 3\cdot 7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{224+21}{5} = \frac{245}{5} = 49;$$

$$\text{dist}((56;7);b) = \frac{|12\cdot 56 - 5\cdot 7|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}} = \frac{672-35}{13} = \frac{637}{13} = 49.$$

Ainsi, on a : $c_5 : (x-56)^2+(y-7)^2 = 2401$

et $\underline{c_6 : (x-72)^2+(y+9)^2 = 2401.}$

c_7 : le centre est sur l'axe des ordonnées $\Rightarrow$ on a $x_0 = 0$;

le cercle passe par les points $A(4;2)$ et $B(-6;-2)$ $\Rightarrow$ le centre est sur la médiatrice m du segment AB ;

m est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passe par le milieu du segment AB : $M = \left(\frac{4+(-6)}{2}; \frac{2+(-2)}{2}\right) = (-1;0)$;

l'équation cartésienne de m est : $5x + 2y + c = 0$;

avec $M(-1;0)$, on trouve $5\cdot(-1) + c = 0 \Rightarrow c = 5$;

ainsi $m : 5x + 2y + 5 = 0$;

avec $x_0 = 0$, on trouve $5\cdot 0 + 2y_0 + 5 = 0 \Rightarrow 2y_0 = -5 \Rightarrow y_0 = -\frac{5}{2}$;

par conséquent, le centre est $K\left(0;-\frac{5}{2}\right)$;

le rayon est alors donné par $r = \|\overrightarrow{AK}\| = \|\overrightarrow{BK}\|$;

on a : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -9/2 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{AK}\| = \sqrt{(-4)^2 + \left(-\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{145}{4}}$;

$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1/2 \end{pmatrix}$;

$\|\overrightarrow{BK}\| = \sqrt{6^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{36 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{145}{4}}$;

ainsi le rayon est $r = \sqrt{\frac{145}{4}}$;

on a donc $\underline{c_7 : x^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{145}{4}}$.

c_8 et c_9 : ces cercles passent par $A(2;0)$ et $B(8;0)$ $\Rightarrow$ leurs centres sont sur la médiatrice m du segment AB ;

m est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et passe par le milieu du segment AB : $M = \left(\frac{2+8}{2}; \frac{0+0}{2}\right) = (5;0)$;

l'équation cartésienne de m est : $x + c = 0$;

avec $M(5;0)$, on trouve $5 + c = 0 \Rightarrow c = -5$;

ainsi $m : x - 5 = 0$;

Les centres de C_8 et C_9 sont par conséquent de la forme $K(5;y_0)$;
Comme ils doivent être tangents des ordonnées, on doit avoir $r=5$ (première coordonnée de K);
ainsi les équations de C_8 et C_9 s'écrivent $(x-5)^2+(y-y_0)^2=5^2$;
avec $A(2;0)$, on trouve $(2-5)^2+(0-y_0)^2=25 \Rightarrow 9+y_0^2=25 \Rightarrow y_0^2=16$
$\Rightarrow y_0=\pm 4$;
ainsi, on a : C_8 : $(x-5)^2+(y-4)^2=25$
et C_9 : $(x-5)^2+(y+4)^2=25$.

Exercice 3

Une tangente à un cercle au point P est perpendiculaire à $\overrightarrow{KP}$ où K est le centre du cercle.

On a : $(x+5)^2+(y-2)^2-25=0$.

Le point P est donné par $(-2;y)$.

Par substitution, on trouve $(-2+5)^2+(y-2)^2=25 \Rightarrow 9+(y-2)^2=25$

$\Rightarrow (y-2)^2=16 \Rightarrow y-2=\pm 4 \Rightarrow$ soit $y=6$, soit $y=-2$.

Les points P concernés sont donc $P_1(-2;6)$ et $P_2(-2;-2)$.

Le rayon du cercle est $\sqrt{25}=5$ et son centre est $K(-5;2)$.

En $P_1(-2;6)$: $\overrightarrow{KP_1}=\overrightarrow{OP_1}-\overrightarrow{OK}=\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$;

la tangente t_1 au cercle en P_1 est ainsi donnée par:

t_1: $3x+4y+c=0$;

avec $P_1(-2;6)$, on a $3\cdot(-2)+4\cdot 6+c=0$

$\Rightarrow -6+24+c=0 \Rightarrow 18+c=0 \Rightarrow c=-18$;

on a ainsi $\underline{\underline{t_1:\ 3x+4y-18=0.}}$

En $P_2(-2;-2)$: $\overrightarrow{KP_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OK}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$;

la tangente t_2 au cercle en P_2 est ainsi donnée par:

t_2: $3x-4y+c=0$;

avec $P_2(-2;-2)$, on a $3\cdot(-2)-4\cdot(-2)+c=0$

$\Rightarrow -6+8+c=0 \Rightarrow 2+c=0 \Rightarrow c=-2$;

on a ainsi $\underline{\underline{t_2:\ 3x-4y-2=0.}}$

Exercice 4

Les tangentes cherchées sont parallèles à $d: x-4y+10=0$.
Elles sont donc de la forme $t: x-4y+c=0$.
La distance du centre du cercle aux tangentes doit être égale au rayon.
On doit donc avoir: centre du cercle $(2;-5)$; rayon du cercle $=\sqrt{17}$;

$$\frac{|2-4\cdot(-5)+c|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}}=\sqrt{17} \Rightarrow \frac{|22+c|}{\sqrt{17}}=\sqrt{17} \Rightarrow |22+c|=17;$$

d'où: soit $22+c=17 \Rightarrow c=-5$,
soit $22+c=-17 \Rightarrow c=-39$.

Les deux tangentes sont donc: $t_1: x-4y-5=0$
$\underline{\underline{t_2: x-4y-39=0.}}$

Cherchons l'équation de la droite perpendiculaire à t_1 et t_2 et passant par le centre du cercle.
Un vecteur orthogonal à t_1 et t_2 est $\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$. Un vecteur parallèle à t_1 et t_2 est donc $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.

L'équation de la droite perpendiculaire à t_1 et t_2 est donc: $4x+y+c=0$.
Avec le centre du cercle, $(2;-5)$, on a: $4\cdot2+(-5)+c=0 \Rightarrow 3+c=0 \Rightarrow c=-3$.
L'équation de la perpendiculaire est donc $4x+y-3=0$.

Les points de contact seront les intersections de cette perpendiculaire et de t_1 et t_2.

Avec t_1: $\left.\begin{array}{l} x-4y-5=0 \xrightarrow{\cdot 1} x-4y-5=0 \\ 4x+y-3=0 \xrightarrow{\cdot 4} 16x+4y-12=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 17x-17=0 \Rightarrow x=1;$

avec $x=1$, $y=-4x+3=-4+3=-1$;
donc le point de contact est $\underline{\underline{(1;-1)}}$.

Avec t_2: $\left.\begin{array}{l} x-4y-39=0 \xrightarrow{\cdot 1} x-4y-39=0 \\ 4x+y-3=0 \xrightarrow{\cdot 4} 16x+4y-12=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 17x-51=0 \Rightarrow x=3;$

avec $x=3$, $y=-4x+3=-12+3=-9$;
donc le point de contact est $\underline{\underline{(3;-9)}}$.

Exercice 5

Cherchons les points d'intersection de c: $(x-4)^2+(y-3)^2-20=0$ et d: $x-3y+15=0$.

$x-3y+15=0 \Rightarrow x=3y-15$.

$\Rightarrow (3y-15-4)^2+(y-3)^2-20=0 \Rightarrow (3y-19)^2+(y-3)^2-20=0$

$\Rightarrow 9y^2-114y+361+y^2-6y+9-20=0 \Rightarrow 10y^2-120y+350=0$

$\Rightarrow y^2-12y+35=0$: $a=1$, $b=-12$, $c=35$; $\Delta=b^2-4ac=(-12)^2-4\cdot1\cdot35=144-140=4$,

$\sqrt{\Delta}=2$; $y_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{12+2}{2\cdot1}=\frac{14}{2}=7$; $y_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{12-2}{2\cdot1}=\frac{10}{2}=5$.

Avec $y_1=7$, $x_1=3y_1-15=3\cdot7-15=6$.

Avec $y_2=5$, $x_2=3y_2-15=3\cdot5-15=0$.

Les points d'intersection de c et d sont donc $A(7;6)$ et $B(5;0)$.

Une tangente à un cercle est perpendiculaire au vecteur reliant le centre du cercle et le point de contact.

t_1 sera perpendiculaire à $\overrightarrow{KA}$ où $K(4;3)$ est le centre du cercle.

On a : $\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OK}=\begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi on a : $t_1: x+y+c=0$.

Avec $A(7;6)$, on a $7+6+c=0 \Rightarrow c=-13$.

Donc $\underline{t_1: x+y-13=0}$.

t_2 sera perpendiculaire à $\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OK}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.

Ainsi on a : $t_2: x-3y+c=0$.

Avec $B(5;0)$, on a $5-3\cdot0+c=0 \Rightarrow c=-5$.

Donc $\underline{t_2: x-3y-5=0}$.

Exercice 6

Les droites à distance 3 de d sont parallèles à d.

Comme $d : 7x - 24y - 8 = 0$, les équations de ces droites parallèles sont : $7x - 24y + c = 0$.

On devra avoir que la distance de $A \in d$ à ces droites parallèles vaut 3.

Cherchons un point A de d : si $x = 8$, on a $7 \cdot 8 - 24y - 8 = 0 \Rightarrow 56 - 24y - 8 = 0$
$\Rightarrow 48 - 24y = 0 \Rightarrow 24y = 48 \Rightarrow y = 2$.

On peut donc prendre $A(8;2)$.

La distance de A aux droites parallèles est $\dfrac{|7 \cdot 8 - 24 \cdot 2 + c|}{\sqrt{7^2 + (-24)^2}} = \dfrac{|56 - 48 + c|}{\sqrt{49 + 576}} =$
$= \dfrac{|8+c|}{\sqrt{625}} = \dfrac{|8+c|}{25}$.

On doit donc avoir $\dfrac{|8+c|}{25} = 3 \Rightarrow |8+c| = 75$.

On a alors soit $8 + c = 75$ (1), soit $8 + c = -75$ (2).

(1) $\Rightarrow c = 67$.

(2) $\Rightarrow c = -83$.

Les équations des droites parallèles cherchées sont donc :

$$\underline{\underline{7x - 24y + 67 = 0 \quad \text{et} \quad 7x - 24y - 83 = 0.}}$$

Exercice 7

a: $5x+2y-3=0$ et b: $5x+2y-9=0$.

On cherche l'ensemble des points $P(x;y)$ tels que $d(P;a)=d(P;b)$.

On a: $d(P;a)=\frac{|5x+2y-3|}{\sqrt{5^2+2^2}}=\frac{|5x+2y-3|}{\sqrt{29}}$ et $d(P;b)=\frac{|5x+2y-9|}{\sqrt{5^2+2^2}}=\frac{|5x+2y-9|}{\sqrt{29}}$.

Ainsi $\frac{|5x+2y-3|}{\sqrt{29}}=\frac{|5x+2y-9|}{\sqrt{29}} \Rightarrow |5x+2y-3|=|5x+2y-9|$.

Donc, soit $5x+2y-3=5x+2y-9$ ①,

soit $5x+2y-3=-(5x+2y-9)$ ②.

① $\Rightarrow -3=-9$ ce qui est exclu.

② $\Rightarrow 5x+2y-3=-5x-2y+9 \Rightarrow 10x+4y-12=0 \Rightarrow 5x+2y-6=0$.

C'est donc la droite $\underline{\underline{5x+2y-6=0}}$.

Exercice 8

Une bissectrice d'un angle est l'ensemble des points à la même distance des côtés de l'angle.
Ainsi les bissectrices des droites a et b sont les points $P(x;y)$ tels que :
$dist(P;a) = dist(P;b)$.

On doit donc avoir $\frac{|x-3y+8|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{|3x-y-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} \Longrightarrow \frac{|x-3y+8|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x-y-1|}{\sqrt{10}}$

$\Longrightarrow |x-3y+8| = |3x-y-1|$

On a alors soit $x-3y+8 = 3x-y-1$ ①, soit $x-3y+8 = -(3x-y-1)$ ②.

① $\Longrightarrow 2x+2y-9=0$

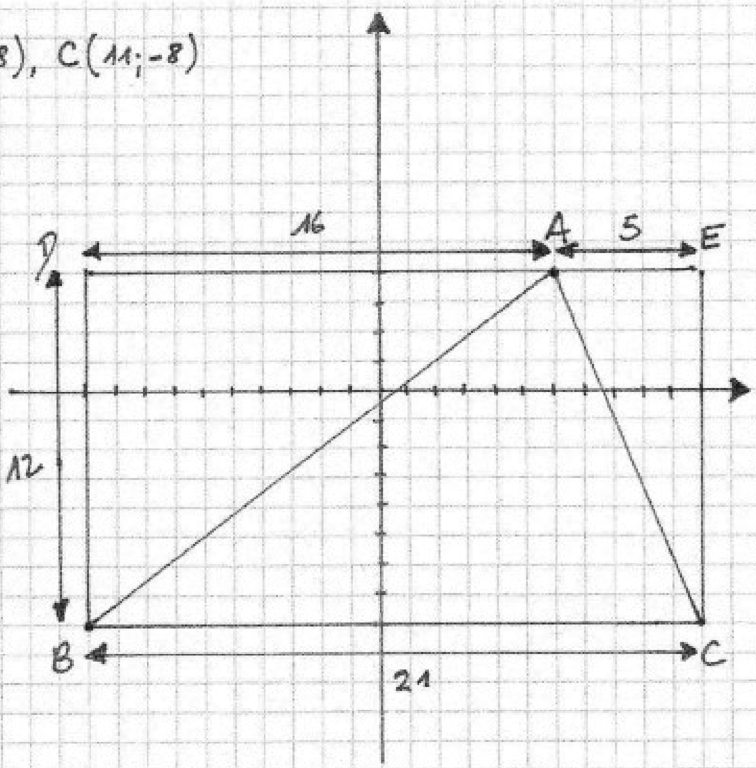
② $\Longrightarrow x-3y+8 = -3x+y+1 \Longrightarrow 4x-4y+7=0$.

Les équations des bissectrices de a et b sont donc :

$$\underline{\underline{2x+2y-9=0 \text{ et } 4x-4y+7=0.}}$$

Exercice 9

$A(6;4)$, $B(-10;-8)$, $C(11;-8)$



On a : aire ABC = aire $BCED$ − aire ACE − aire ABD =

$$= 12\cdot 21 - \frac{5\cdot 12}{2} - \frac{16\cdot 12}{2} = 252 - 30 - 96 = \underline{\underline{126.}}$$

La bissectrice d'un angle est l'ensemble des points à égale distance des 2 côtés de l'angle.
Commençons par chercher les équations des droites cartésiennes des droites passant par A et B (d_{AB}), par B et C (d_{BC}) et par A et C (d_{AC}).

d_{AB} : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}-10\\-8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16\\-12\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$;

ainsi : $3x - 4y + c = 0$;

avec $A(6;4)$: $3\cdot 6 - 4\cdot 4 + c = 0 \Rightarrow 18 - 16 + c = 0 \Rightarrow 2 + c = 0 \Rightarrow c = -2$;

$\Rightarrow d_{AB} : 3x - 4y - 2 = 0.$

d_{BC} : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}11\\-8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-10\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\0\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$;

ainsi : $y + c = 0$;

avec $B(-10;-8)$: $-8 + c = 0 \Rightarrow c = 8$;

$\Rightarrow d_{BC} : y + 8 = 0.$

d_{AC} : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}11\\-8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}$;

ainsi : $12x + 5y + c = 0$;

avec $A(6;4)$: $12\cdot 6 + 5\cdot 4 + c = 0 \Rightarrow 72 + 20 + c = 0 \Rightarrow c = -92$;

$\Rightarrow d_{AC} : 12x + 5y - 92 = 0.$

Les bissectrices b_A de l'angle $\widehat{BAC}$ est l'ensemble des points $P(x;y)$ tels que
$d(P; d_{AB}) = d(P; d_{AC})$.

Ainsi : $\dfrac{|3x-4y-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{|12x+5y-92|}{\sqrt{12^2+5^2}} \Rightarrow \dfrac{|3x-4y-2|}{5} = \dfrac{|12x+5y-92|}{13}$.

Donc, soit $\dfrac{3x-4y-2}{5} = \dfrac{12x+5y-92}{13}$ (1),

soit $\dfrac{3x-4y-2}{5} = -\dfrac{12x+5y-92}{13}$ (2).

(1) $\Rightarrow$ $39x-52y-26 = 60x+25y-460 \Rightarrow 21x+77y-434=0$.

(2) $\Rightarrow$ $39x-52y-26 = -60x-25y+460 \Rightarrow 99x-27y-486=0 \Rightarrow 33x-9y-162=0$

$\Rightarrow 11x-3y-54=0$

Cherchons où ces bissectrices coupent la droite $d_{BC}: y+8=0$.

$y+8=0 \Rightarrow y=-8$.

Dans $21x+77y-434=0$: $21x+77\cdot(-8)-434=0 \Rightarrow 21x-616-434=0 \Rightarrow 21x=1050$

$\Rightarrow x=50$;

cela nous donne le point $(50;-8)$; mais il n'appartient pas au segment BC; c'est donc la bissectrice extérieure au triangle.

Dans $11x-3y-54=0$: $11x-3\cdot(-8)-54=0 \Rightarrow 11x+24-54=0 \Rightarrow 11x-30=0$

$\Rightarrow 11x=30 \Rightarrow x=\dfrac{30}{11}$;

cela nous donne le point $\left(\dfrac{30}{11};-8\right)$; il appartient au segment BC.

Par conséquent, la bissectrice de l'angle $\widehat{DAC}$ est $\underline{\underline{b_A : 11x-3y-54=0.}}$

La bissectrice b_B de l'angle $\widehat{ABC}$ est l'ensemble des points $P(x;y)$ tels que

$d(P;d_{AB}) = d(P;d_{BC})$.

Ainsi : $\dfrac{|3x-4y-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{|y+8|}{\sqrt{1^2}} \Rightarrow \dfrac{|3x-4y-2|}{5} = |y+8|$.

Donc soit $\dfrac{3x-4y-2}{5} = y+8$ (1),

soit $\dfrac{3x-4y-2}{5} = -(y+8)$ (2).

(1) $\Rightarrow$ $3x-4y-2 = 5y+40 \Rightarrow 3x-9y-42=0 \Rightarrow x-3y-14=0$.

(2) $\Rightarrow$ $3x-4y-2 = -5y-40 \Rightarrow 3x+y+38=0$.

Cherchons où ces bissectrices coupent la droite $d_{AC}: 12x+5y-92=0$

Avec $x-3y-14=0$:

$$\left.\begin{array}{l} x-3y-14=0 \xrightarrow{\cdot 5} 5x-15y-70=0 \\ 12x+5y-92=0 \xrightarrow{\cdot 3} 36x+15y-276=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 41x-346=0$$

$\Rightarrow x=\dfrac{346}{41} \cong 8{,}44$;

avec $x=\dfrac{346}{41}$: $3y = x-14 = \dfrac{346}{41}-14 = -\dfrac{228}{41} \Rightarrow y = -\dfrac{76}{41} \cong -1{,}85$;

cela nous donne le point $\left(\dfrac{346}{41};-\dfrac{76}{41}\right) \cong (8{,}44;-1{,}85)$ qui appartient bien au segment AC.

Par conséquent la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ est $\underline{b_B : x-3y-14=0.}$

La bissectrice b_C de l'angle $\widehat{ACB}$ est l'ensemble des points $P(x;y)$ tels que

$d(P; d_{AC}) = d(P; d_{BC})$.

Ainsi: $\dfrac{|12x+5y-92|}{\sqrt{12^2+5^2}} = \dfrac{|y+8|}{\sqrt{1^2}} \implies \dfrac{|12x+5y-92|}{13} = |y+8|$.

Donc, soit $\dfrac{12x+5y-92}{13} = y+8$ ①,

soit $\dfrac{12x+5y-92}{13} = -(y+8)$ ②.

① $\implies 12x+5y-92 = 13y+104 \implies 12x-8y-196=0 \implies 3x-2y-49=0$.

② $\implies 12x+5y-92 = -13y-104 \implies 12x+18y+12=0 \implies 2x+3y+2=0$.

Cherchons où les bissectrices coupent la droite d_{AB} : $3x-4y-2=0$.

Avec $3x-2y-49=0$: $\left.\begin{array}{l} 3x-2y-49=0 \\ 3x-4y-2=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{-} 2y-47=0 \implies 2y=47 \implies y=\dfrac{47}{2}$;

avec $y=\dfrac{47}{2}$, $3x = 2y+49 = 2\,\dfrac{47}{2} + 49 = 47+49 = 96$;

cela nous donne le point $(96; -\frac{47}{2})$; mais il n'appartient pas au segment AB; c'est donc la bissectrice extérieure au triangle.

Avec $2x+3y+2=0$: $\left.\begin{array}{l} 2x+3y+2=0 \xrightarrow{\cdot 4} 8x+12y+8=0 \\ 3x-4y-2=0 \xrightarrow{\cdot 3} 9x-12y-6=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} 17x+2=0 \implies x=-\dfrac{2}{17}$;

avec $x=-\dfrac{2}{17}$, $3y = -2x-2 = -2\left(-\dfrac{2}{17}\right)-2 = \dfrac{4}{17}-2 = -\dfrac{30}{17} \implies y = \dfrac{-10}{17}$;

cela nous donne le point $\left(-\frac{2}{17}; -\frac{10}{17}\right)$; il appartient au segment AB.

Par conséquent, la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ est $\underline{b_C : 2x+3y+2=0.}$

Le centre du cercle inscrit est donné par l'intersection des 3 bissectrices.

Les bissectrices sont : $b_A : 11x-3y-54=0$,

$b_B : x-3y-14=0$,

$b_C : 2x+3y+2=0$.

Cherchons l'intersection de b_A et b_B et vérifions qu'elle appartient à b_C :

$\left.\begin{array}{l} b_A : 11x-3y-54=0 \\ b_B : x-3y-14=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{-} 10x-40=0 \implies x=4$;

avec $x=4$, $3y = x-14 = 4-14 = -10 \implies y = -\dfrac{10}{3}$;

on obtient donc le point $(4; -\frac{10}{3})$;

en le substituant dans b_C, on a $2\cdot 4 + 3\cdot\left(\frac{-10}{3}\right) + 2 = 8-10+2 = 0$.

Ainsi le centre du cercle inscrit est $\underline{\left(4; -\frac{10}{3}\right)}$.

Le rayon r du cercle inscrit est donné par $r = d(K; d_{AB}) = d(K; d_{BC}) =$
$= d(K; d_{AC})$ où $K\left(4; -\frac{10}{3}\right)$ est le centre du cercle inscrit.

On a: $d(K; d_{AB}) = \dfrac{\left|3 \cdot 4 - 4 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) - 2\right|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{\left|12 + \frac{40}{3} - 2\right|}{5} = \frac{1}{5}\left(10 + \frac{40}{3}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{70}{3} = \frac{14}{3}$;

$d(K; d_{BC}) = \dfrac{\left|-\frac{10}{3} + 8\right|}{\sqrt{1^2}} = -\frac{10}{3} + 8 = \frac{14}{3}$;

$d(K; d_{AC}) = \dfrac{\left|12 \cdot 4 + 5\left(-\frac{10}{3}\right) - 92\right|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \dfrac{\left|48 - \frac{50}{3} - 92\right|}{13} = \frac{1}{13}\left|-44 - \frac{50}{3}\right| = \frac{1}{13}\left|-\frac{182}{3}\right| =$

$= \frac{1}{13} \cdot \frac{182}{3} = \frac{14}{3}$.

Le rayon du cercle inscrit est donc $\frac{14}{3}$.