Evaluation formative sur les équations et problèmes du deuxième degré

Corrigé

Tous les calculs ayant servi à trouver la solution doivent figurer sur la feuille de donnée.
Toute solution sans fondement mathématique, devinée ou obtenues par essais sera ignorée.
Une présentation soignée est exigée.
Durée : 80 minutes. Points : 60.

Problème 1. **10 points**

On recouvre le stade de foot de "Xamax" avec 7'200 plaques **carrées** d'herbe synthétique. Si chaque plaque avait eu 20 cm de plus en longueur et en largeur, il n'en aurait fallu que 5'000. Quelle est la dimension d'une plaque ?

Problème 2. **10 points**

Une caisse de classe, constituée par des mises de fonds égales de la part de chaque élève, s'élève à Fr 2'160.-. Trois élèves quittent la classe en laissant leur part, le capital de leurs camarades augmente alors de Fr 24.-. Combien y avait-il d'élèves au début de l'année ?

Problème 3. **10 points**

Les 18 étudiants d'une classe assistent à une pièce de théâtre. Le montant à payer est de 600 frs. Sachant que la moitié de cette somme est utilisée pour les places du 1er rang – plus chères de 7,50 que les places du 2ème rang, veuillez déterminer le nombre et le prix des places occupées au 1er rang.

Problème 4. **5 points**

La somme des carrés de 3 nombres consécutifs est 3074. Quels sont ces trois nombres?

Problème 5. **25 points**

a. $\frac{1}{6}x^2 = 10 - \frac{2}{3}x$

b. $\frac{1-8x}{2} - \frac{x^2-7}{4} + 2x = 0$

c. $\sqrt{x-3} + 2x - 16 = 0$

Voir feuilles annexes

d. $x^{10} + 0.99968x^5 - 0.00032 = 0$

e. $\begin{cases} x+y=12 \\ x^2+xy+y^2=109 \end{cases}$

Problème 1

Notons x la longueur du côté d'une plaque.
L'aire d'une plaque vaut x^2 au départ et $(x+20)^2$ ensuite.
On doit ainsi avoir $7200x^2 = 5000(x+20)^2$ (des 2 manières, l'aire totale est la même).

On a:

$7200x^2 = 5000(x+20)^2$	$: 200$
$36x^2 = 25(x+20)^2$	identité remarquable: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$36x^2 = 25(x^2 + 40x + 400)$	Distributivité
$36x^2 = 25x^2 + 1000x + 10'000$	$-25x^2 - 1000x - 10'000$
$11x^2 - 1000x - 10'000 = 0$	

$a = 11$, $b = -1000$, $c = -10'000$, $b^2 - 4ac = (-1000)^2 - 4 \cdot 11 \cdot (-10'000) = 1440'000 > 0$,
$\sqrt{b^2-4ac} = 1200$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{1000+1200}{2 \cdot 11} = \frac{2200}{22} = 100 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{1000-1200}{2 \cdot 11} = \frac{-200}{22} = -9{,}09 < 0 \text{ exclu car } x > 0.$$

La dimension d'une plaque est donc de <u>100 cm = 1m</u>.

Problème 2

Notons x le nb d'élèves au début de l'année. La part de chacun était de $\frac{2160}{x}$.
Après le départ de 3 d'entre eux, il en reste $x-3$ et la part de chacun est de $\frac{2160}{x-3}$.

On doit avoir:

$\frac{2160}{x-3} = \frac{2160}{x} + 24$	$\cdot x(x-3)$
$2160x = 2160(x-3) + 24x(x-3)$	Distributivité
$2160x = 2160x - 6480 + 24x^2 - 72x$	$-2160x$
$0 = 24x^2 - 72x - 6480$	$:24$
$0 = x^2 - 3x - 270$	

$a = 1$, $b = -3$, $c = -270$, $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-270) = 9 + 1080 = 1089 > 0$, $\sqrt{b^2-4ac} = 33$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{3+33}{2 \cdot 1} = \frac{36}{2} = 18$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{3-33}{2 \cdot 1} = \frac{-30}{2} = -15 < 0$ exclu car $x > 0$.

Ainsi le nombre d'élèves au début de l'année était de <u>18</u>.

Problème 3

Notons x le nb de place du 1^{er} rang et y leur prix.

On a : $x \cdot y = \frac{600}{2} = 300$ pour les places de 1^{er} rang

et $(18-x)(y-7{,}5) = \frac{600}{2} = 300$ pour les places de 2^e rang.

On obtient : $xy = 300$ et $18y - 135 - xy + 7{,}5x = 300$.

Par substitution, on trouve $xy = 300$ et $18y - 135 - 300 + 7{,}5x = 300$

$\Rightarrow y = \frac{300}{x}$ et $18y + 7{,}5x = 735 \Rightarrow 18 \cdot \frac{300}{x} + 7{,}5x = 735$

$\Rightarrow 5400 + 7{,}5x^2 = 735x \Rightarrow 7{,}5x^2 - 735x + 5400 = 0$.

$a = 7{,}5$, $b = -735$, $c = 5400$, $b^2 - 4ac = (-735)^2 - 4 \cdot 7{,}5 \cdot 5400 = 540'225 - 162'000 =$

$= 378'225 > 0$, $\sqrt{b^2-4ac} = 615$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{735+615}{2 \cdot 7{,}5} = \frac{1350}{15} = 90 > 18$ élèves exclu

et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{735-615}{2 \cdot 7{,}5} = \frac{120}{15} = 8 \Rightarrow y = \frac{300}{8} = 37{,}5$.

<u>Le nb de places du 1^{er} rang est donc de 8 et leur prix est de 37,50 frs.</u>

Problème 4

Notons x le plus petit des 3 nombres. Les 2 autres sont $x+1$ et $x+2$.

On doit avoir $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 3074$

$\Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 3074 \Rightarrow 3x^2 + 6x + 5 = 3074$

$\Rightarrow 3x^2 + 6x - 3069 = 0$

$a = 3$, $b = 6$, $c = -3069$, $b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3069) = 36 + 36'828 = 36'864 > 0$,

$\sqrt{b^2-4ac} = 192$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-6+192}{2 \cdot 3} = \frac{186}{6} = 31$ et

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2} = \frac{-6-192}{2 \cdot 3} = \frac{-198}{6} = -33$.

Les 3 nombres sont donc <u>31, 32, 33 ou −33, −32, −31.</u>

Problème 5

a. $\frac{1}{6}x^2 = 10 - \frac{2}{3}x \xrightarrow{\cdot 6} x^2 = 60 - 4x \longrightarrow x^2 + 4x - 60 = 0$

$a = 1, b = 4, c = -60, b^2 - 4ac = 4^2 - 4.1.(-60) = 16 + 240 = 256 > 0, \sqrt{b^2-4ac} = 16$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-4+16}{2.1} = \frac{12}{2} = \underline{6}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-4-16}{2.1} = \frac{-20}{2} = \underline{-10.}$

b. $\frac{1-8x}{2} - \frac{x^2-7}{4} + 2x = 0 \xrightarrow{\cdot 4} 2 - 16x - (x^2 - 7) + 8x = 0$

$\longrightarrow 2 - 16x - x^2 + 7 + 8x = 0 \longrightarrow -x^2 - 8x + 9 = 0 \longrightarrow x^2 + 8x - 9 = 0$

$a = 1, b = 8, c = -9, b^2 - 4ac = 8^2 - 4.1.(-9) = 64 + 36 = 100 > 0, \sqrt{b^2-4ac} = 10$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-8+10}{2} = \underline{1}$ et $x_2 = \frac{-8-10}{2} = \underline{-9.}$

c. $\sqrt{x-3} + 2x - 16 = 0 \longrightarrow \sqrt{x-3} = 16 - 2x \longrightarrow x - 3 = (16 - 2x)^2$

$\longrightarrow x - 3 = 256 - 64x + 4x^2 \longrightarrow 4x^2 - 65x + 259 = 0$

$a = 4, b = -65, c = 259, b^2 - 4ac = (-65)^2 - 4.4.259 = 81 > 0, \sqrt{b^2-4ac} = 9$

$\longrightarrow x_1 = \frac{65+9}{2.4} = \frac{74}{8} = 9{,}25$ et $x_2 = \frac{65-9}{2.4} = \frac{56}{8} = 7.$

vérification: $x = 9{,}25 \longrightarrow \sqrt{9{,}25-3} + 2.9{,}25 - 16 = 2{,}5 + 18{,}5 - 16 = 5 \neq 0$ KO

$x = 7 \longrightarrow \sqrt{7-4} + 2.7 - 16 = 2 + 14 - 16 = 0$ ok $\Rightarrow \underline{x = 7.}$

d. $x^{10} + 0{,}99968x^5 - 0{,}00032 = 0$: on pose $u = x^5$ et on a $u^2 = (x^5)^2 = x^{10}$

$\Rightarrow u^2 + 0{,}99968u - 0{,}00032 = 0$

$a = 1, b = 0{,}99968, c = -0{,}00032, b^2 - 4ac = 0{,}99968^2 - 4.1.(-0{,}00032) = 1{,}000640102 > 0,$

$\sqrt{b^2-4ac} = 1{,}00032$

$\Rightarrow u_1 = \frac{-0{,}99968 + 1{,}00032}{2.1} = \frac{0{,}00064}{2} = 0{,}00032$ et

$u_2 = \frac{-0{,}99968 - 1{,}00032}{2.1} = \frac{-2}{2} = -1.$

Avec $u_1 = 0{,}00032$, on a $x = \sqrt[5]{u_1} = \sqrt[5]{0{,}00032} = \underline{0{,}2}$, et, avec $u_2 = -1$, on a $x = \sqrt[5]{-1} = \underline{-1.}$

e. $x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x$

$x^2 + xy + y^2 = 109 \Rightarrow x^2 + x(12 - x) + (12 - x)^2 = 109$

$\Rightarrow x^2 + 12x - x^2 + 144 - 24x + x^2 = 109 \Rightarrow x^2 - 12x + 144 = 109 \Rightarrow x^2 - 12x + 35 = 0$

$a = 1, b = -12, c = 35, b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4.1.35 = 144 - 140 = 4 > 0, \sqrt{b^2-4ac} = 2$

$\Rightarrow x_1 = \frac{12+2}{2} = 7$ et $x_2 = \frac{12-2}{2} = 5$

$x_1 = 7 \Rightarrow y_1 = 12 - 7 = 5$ et $x_2 = 5 \Rightarrow y_2 = 12 - 5 = 7.$

Les solutions sont donc $\underline{x = 7, y = 5 \text{ et } x = 5, y = 7.}$