ANALYSE

Corrigé du TE B

Exercice 1

a) On a $f(x) = \frac{u}{v}$ avec $u = 3x$ et $v = x+2$.

Ainsi $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u' = 3$ et $v = 1$.

Donc $f'(x) = \frac{3(x+2) - 3x}{(x+2)^2} = \frac{3x+6-3x}{(x+2)^2} = \underline{\underline{\frac{6}{(x+2)^2}}}$.

b) L'équation de la tangente est de la forme $y = mx + h$, où m est la pente.
Or, ici, la pente est égale à $f'(-4)$.
On a donc $m = f'(-4) = \frac{6}{(-4+2)^2} = \frac{6}{(-2)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

L'équation de la tangente s'écrit donc $y = \frac{3}{2}x + h$.
Pour trouver h, on utilise le point de tangence (point appartenant au graphe de f et à la tangente) : c'est $(-4; f(-4))$.

On a $f(-4) = \frac{3\cdot(-4)}{-4+2} = \frac{-12}{-2} = 6$.

Le point de tangence est donc $(-4; 6)$.
Par substitution dans $y = \frac{3}{2}x + h$, on trouve $6 = \frac{3}{2}\cdot(-4) + h$
$\Rightarrow 6 = -6 + h \Rightarrow h = 12$.

<u>L'équation de la tangente est donc $y = \frac{3}{2}x + 12$.</u>

Exercice 2

a) $y = 2\cos(x)\cdot(x^3+8) = u\cdot v$ avec $u = 2\cos(x)$ et $v = x^3+8$.

$y' = u'v + uv'$ avec $u' = -2\sin(x)$ et $v' = 3x^2$.

Ainsi $\underline{\underline{y' = -2\sin(x)\cdot(x^3+8) + 6x^2\cos(x)}}$.

b) $y = \dfrac{1+\cos(x)}{\sin(x)} = \dfrac{u}{v}$ avec $u = 1+\cos(x)$ et $v = \sin(x)$.

$y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u' = -\sin(x)$ et $v' = \cos(x)$.

Ainsi $y' = \dfrac{-\sin(x)\cdot\sin(x) - (1+\cos(x))\cos(x)}{(\sin(x))^2} =$

$= \dfrac{-\sin^2(x) - 1 - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \dfrac{-(\cos^2(x)+\sin^2(x)) - 1}{\sin^2(x)}$.

Or, on a toujours $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Donc $y' = \dfrac{-1-1}{\sin^2(x)} = \underline{\underline{\dfrac{-2}{\sin^2(x)}}}$.

c) $y = \sin(x^2+5)$, ce qui est une fonction composée.

On a $y' = \cos(x^2+5)\cdot(2x) = \underline{\underline{2x\cdot\cos(x^2+5)}}$.

Exercice 3

On a $y = \dfrac{ax+b}{2x-3}$.

En $x=2$, la tangente est $2x+y-12=0$, i.e $y=-2x+12$.

Le point de tangence (point commun entre le graphe de f et la tangente) est donné par $(2\,;\,t(2))$.

On a $t(2) = -2\cdot 2+12 = -4+12 = 8$.

Le point de tangence est donc $(2;8)$.

Par substitution dans l'équation de la fonction, on trouve : $8 = \dfrac{a\cdot 2+b}{2\cdot 2-3}$

$\Rightarrow 8 = 2a+b$ ①

La pente de la tangente $y=-2x+12 = -2$.

Or, la pente est la dérivée de la fonction calculée ici en $x=2$.

On a $f(x) = \dfrac{ax+b}{2x-3} = \dfrac{u}{v}$ où $u = ax+b$ et $v = 2x-3$.

$f'(x) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ où $u'=a$ et $v'=2$.

Ainsi $f'(x) = \dfrac{a(2x-3)-2(ax+b)}{(2x-3)^2} = \dfrac{2ax-3a-2ax-2b}{(2x-3)^2} = \dfrac{-3a-2b}{(2x-3)^2}$.

On doit avoir $f'(2) = -2 \Rightarrow \dfrac{-3a-2b}{(2\cdot 2-3)^2} = -2 \Rightarrow -3a-2b = -2$ ②.

On a donc 2 équations à 2 inconnues : $\begin{cases} 2a+b = 8 & ① \\ -3a-2b = -2 & ② \end{cases}$

$$\begin{array}{rl} ① \xrightarrow{\cdot 2} & 4a+2b = 16 \\ ② \xrightarrow{\cdot 1} & \underline{-3a-2b = -2 \quad +} \\ & a = 14. \end{array}$$

Avec $a=14$, on a, dans ①, $2\cdot 14+b = 8 \Rightarrow 28+b=8 \Rightarrow b=-20$.

Ainsi on a $\underline{\underline{a=14 \text{ et } b=-20.}}$