COMBINATOIRE

Corrigé des exercices

Exercice 10.1

a. E_1: $\emptyset, \{1\} \Rightarrow a_1 = 2$.
E_2: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1;2\} \to a_2 = 4$.
E_3: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1;2\}, \{1;3\}, \{2;3\}, \{1;2;3\} \Rightarrow a_3 = 8$.
E_4: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1;2\}, \{1;3\}, \{1;4\}, \{2;3\}, \{2;4\}, \{3;4\}, \{1;2;3\},$
$\{1;2;4\}, \{1;3;4\}, \{2;3;4\}, \{1;2;3;4\} \Rightarrow a_4 = 16$.

b. Lorsqu'on connaît E_k, pour passer à E_{k+1}, on doit ajouter les sous-ensembles suivants :
$\{k+1\}, \{1;k+1\}, \{2;k+1\}, \ldots, \{k;k+1\}, \{1;2;k+1\}, \{1;3;k+1\}, \ldots, \{1;k;k+1\},$
$\{2;3;k+1\}, \ldots, \{2;k;k+1\}, \ldots, \{k-1;k;k+1\}$, etc.
En fait, ces sous-ensembles sont les sous-ensembles de E_k auxquels on adjoint $k+1$.
S'il y a a_k éléments dans E_k, il y aura donc $a_k + a_k = 2a_k$ éléments dans E_{k+1}.
Ainsi, on a bien $a_{k+1} = 2a_k$.
Comme $a_1 = 2^1$, $a_2 = 4 = 2^2$, $a_3 = 8 = 2^3$, $a_4 = 16 = 2^4$, etc., on aura
$a_n = 2a_{n-1} = 2^2 a_{n-2} = 2^3 a_{n-3} = \ldots = 2^{n-1} a_1 = 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$.
Ainsi $a_n = 2^n$.

c. On doit chercher le nombre de manières de choisir k éléments parmi les n premiers nombres naturels. Comme on ne considère pas l'ordre des éléments choisis, cela correspond au nombre de combinaisons de k éléments parmi n, que l'on note C_k^n ou $\binom{n}{k}$ et qui vaut $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ où $n! = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.
Pour calculer $\binom{n}{k}$ avec une calculatrice, on presse successivement n $\boxed{2nd}$ $\boxed{8}$ k $\boxed{=}$.
Ainsi il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de E_n qui ont exactement k éléments.

Exercice 10.2

a. $\binom{n}{0}$ correspond au nombre de combinaisons de 0 élément pris parmi n éléments.
$\binom{n}{1}$ correspond au nombre de combinaisons de 1 élément pris parmi n éléments.
$\binom{n}{2}$ correspond au nombre de combinaisons de 2 éléments pris parmi n éléments.

...

$\binom{n}{n-1}$ correspond au nombre de combinaisons de n-1 éléments pris parmi n éléments.
$\binom{n}{n}$ correspond au nombre de combinaisons de n éléments pris parmi n éléments.
Dans tous ces cas, on ne considère pas l'ordre des éléments choisis.
Ainsi $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}$ correspond au nombre total de combinaisons de n'importe combien d'éléments parmi n éléments.
D'après l'exercice précédent, on sait que ce nombre total est 2^n.
On a donc $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$.

b. $\binom{n}{n-k}$ correspond au nombre de combinaisons de n-k éléments parmi n éléments.
Il correspond au nombre de combinaisons des autres éléments, donc k éléments, parmi n éléments, c'est-à-dire $\binom{n}{k}$. Ainsi $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$.
On peut aussi le voir autrement, on a $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Ainsi $\binom{n}{n-k}=$
$=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=\binom{n}{k}$.

Par la 2e égalité, on a $\binom{n-1}{k-1}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ et
$\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$. Ainsi $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}=$
$$=\frac{k\cdot(n-1)!+(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!}=\frac{k\cdot(n-1)!+n(n-1)!-k(n-1)!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}.$$

c. Dans le triangle de Pascal (voir Formulaires et Tables, p. 8), un terme est la somme du terme au-dessus à gauche et du terme directement au-dessus.
Comme le tout premier terme est 1, il correspond à $\binom{0}{0}=\frac{0!}{0!(0-0)!}=\frac{1}{1\cdot 1}=1$ ($0!=1$ par définition). Le premier terme est donc $\binom{0}{0}$.
Tous les termes de la 1e colonne valent 1. Ils correspondent à $\binom{n}{0}$, puisque $\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=1$.
Tous les termes de la diagonale partant du 1er terme valent 1. Ils correspondent à $\binom{n}{n}$, puisque $\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{n!}{n!}=1$.
Tous les autres termes ("à l'intérieur" du triangle de Pascal), chacun est la somme de celui en-dessus à gauche et celui directement en-dessus.
Comme, d'après b, $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$, cela correspond bien à ce qu'on veut.

Ainsi le triangle de Pascal contient bien les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$.

d. A prouver : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Ancrage : $n=1$: $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = \binom{1}{0} a^0 b^{1-0} + \binom{1}{1} a^1 b^{1-1} = 1 \cdot 1 \cdot b + 1 \cdot 1 \cdot a = b + a =$
$= (a+b)^1$.

Hypothèse de récurrence : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ vraie pour n.

Pour $n+1$: $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) \underset{\text{hyp. de réc.}}{=} (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) =$

$$= a\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \quad \ell = k+1 \Rightarrow k = \ell - 1 \Rightarrow -k = 1 - \ell$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} a^\ell b^{n+1-\ell} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell-1} a^\ell b^{n+1-\ell} + \binom{n}{n+1-1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell-1} a^\ell b^{n+1-\ell} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} \cdot b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \overset{k=\ell}{=}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell-1} a^\ell b^{n+1-\ell} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} a^\ell b^{n+1-\ell} + \binom{n}{n} a^{n+1} \cdot b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \left(\binom{n}{\ell-1} + \binom{n}{\ell}\right) a^\ell b^{n+1-\ell} + \binom{n}{n} a^{n+1} \cdot b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}.$$

D'après b., on a $\binom{m}{\ell} = \binom{m-1}{\ell-1} + \binom{m-1}{\ell}$. En posant $m-1 = n \Rightarrow m = n+1$, on obtient $\binom{n+1}{\ell} = \binom{n}{\ell-1} + \binom{n}{\ell}$.

Ainsi $(a+b)^{n+1} = \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+1}{\ell} a^\ell b^{n+1-\ell} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}$.

On a en outre $\binom{m}{m} = \frac{m!}{m!(m-m)!} = \frac{m!}{m! \cdot 0!} = \frac{m!}{m! \cdot 1} = \frac{m!}{m!} = 1$.

Ainsi $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$. De même $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$.

Par conséquent $(a+b)^{n+1} = \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+1}{\ell} a^\ell b^{n+1-\ell} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} =$
$= \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} a^\ell b^{n+1-\ell}$.

CQFD.

Exercice 10.3.

a. ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

7 possibilités   6   5   4   3   2   1 possibilité

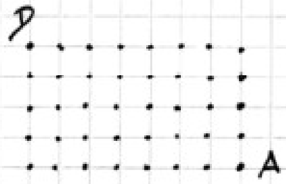
$\Rightarrow$ le nombre de possibilités est $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$.

b. Si la table est ronde, on a le même nombre de possibilités que dans a., sauf que, si une disposition est fixée, déplacer tout le monde d'un cran dans le même sens ne change pas la disposition. On doit donc diviser le nombre de possibilités de a. par 7 : $5040 : 7 = 720$.

Ainsi le nombre de possibilités est ici 720.

Exercice 10.4

On a la situation suivante :



Les parcours de longueur minimale sont ceux qui passent par les points marqués.
Leur nombre correspond au nombre de possibilités de mettre 7 carrés horizontaux sur 11 ou 4 carrés verticaux sur 11.

Ainsi le nombre de parcours est $\binom{11}{4}=\binom{11}{7}=330$.

Exercice 10.5

a. $\_\ \_\ \_\ \_\ \_$

5 possibilités   4   3   2   1 possibilité

$\Rightarrow$ nb de manières différentes $= 5! = 120$.

b. On commence par choisir 5 boules parmi 12 sans tenir compte de l'ordre. On a $\binom{12}{5}$ manières de le faire. On les place ensuite dans les 5 boîtes et on a $5!$ manières de les placer (voir a.).
Ainsi le nombre de manières différentes est $\binom{12}{5} \cdot 5! = 792 \cdot 120 = 95'040$.

c. $\_\ \_\ \_\ \_\ \_$

2 possibilités : blanche ou noire   2   2   2   2 possibilités

$\Rightarrow$ nb de manières différentes $= 2^5 = 32$.

d. On aura dans les 20 boîtes 7 boules blanches, 10 boules noires et 3 boîtes vides $(7+10+3=20)$.
Le nombre de manières différentes correspond au nombre de permutations de 7 boules blanches, 10 boules noires et 3 boîtes vides (permutations avec répétition) et vaut donc

$$\frac{20!}{7! \cdot 10! \cdot 3!} = 22'170'270.$$

e. Si on avait 9 boules blanches au lieu de 6 à disposition, le nombre de manières différentes serait 2^9 (comme en c.).
Comme on n'a que 6 boules, on doit retirer à 2^9 le nombre de possibilités avec 7, 8 et 9 boules blanches : pour 9 boules blanches, on a 1 possibilité (9 boules blanches dans les 9 boîtes) ; pour 8 boules blanches, on a 9 possibilités (qui correspond à $\binom{9}{8}$, nombre de manières de mettre 8 boules blanches parmi 9) ; pour 7 boules blanches, on a $\binom{9}{7}$ possibilités (nombre de manières de mettre 7 boules blanches parmi 9) ; on a $\binom{9}{7} = 36$.
Le nombre de manières différentes est donc $2^9 - 1 - 9 - 36 = 466$.

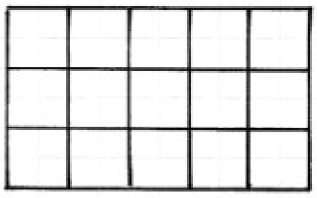
f. Si les 2 boîtes médianes contiennent chacune une boule blanche, il nous reste à placer 8 boules blanches et 10 boules noires dans les 18 boîtes restantes.
Le nombre de manières différentes est alors $\binom{18}{8} = \binom{18}{10} = 43'758$.

Exercice 10.6

Il s'agit de trouver le nombre de permutations de 8 éléments sachant qu'on a 3 sortes de pavillons (4 rouges, 3 blancs, 1 bleu).
Le nombre est égal à $\frac{8!}{4!\,3!\,1!} = 280$.

Exercice 10.7

On a la grille suivante:



a. S'il doit y avoir 1 jeton rouge par colonne, on a 3 possibilités de le placer dans chaque colonne, donc, au total, $3^5 = 243$ possibilités.

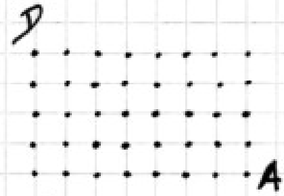
b. S'il doit y avoir 1 jeton de chaque couleur par colonne, pour un ordre de couleurs fixé, on a, comme en a., 243 possibilités. En outre, il y a $5!$ ordres de couleurs (5 possibilités dans la 1^e colonne, 4 dans la 2^e, etc.). Ainsi, au total, il y a $243 \cdot 5! = 243 \cdot 120 = 29'160$ possibilités.

c. Cela correspond à choisir 5 cases au hasard parmi les 15. Il y a donc $\binom{15}{5} = 3003$ possibilités.

d. Pour un ordre fixé de couleurs, on a, comme en c., 3003 possibilités. En outre, il y a $5!$ manières de placer les 5 couleurs parmi les cases choisies. Ainsi, au total, il y a $3003 \cdot 5! = 3003 \cdot 120 = 360'360$ possibilités.

Exercice 108

On a la situation suivante :



Un parcours comportant 11 unités doit forcément passer par des points dessinés ci-dessus.
Le nombre de parcours possibles correspond au nombre de manières de mettre 7 carrés horizontaux sur 11 ou 4 carrés verticaux sur 11.
Ainsi le nombre de parcours possibles est $\binom{11}{4} = \binom{11}{7} = 330$.

Exercice 10.9

a. Pour un ordre des lettres fixés, on a le choix de 2 voyelles parmi 5 et de 3 consonnes parmi 21, soit $\binom{5}{2} \cdot \binom{21}{3} = 13'300$ possibilités.
En outre, on a $5! = 120$ ordres possibles des 5 lettres.
On a donc, au total, $13'300 \cdot 120 = 1'596'000$ possibilités.

b. les mots doivent contenir la lettre B et 2 voyelles différentes et 3 consonnes différentes (dont 2 consonnes différentes de B).
Pour un ordre des lettres fixés, on a le choix de 2 voyelles parmi 5 et de 2 consonnes parmi 20, soit $\binom{5}{2} \cdot \binom{20}{2} = 1900$ possibilités.
En outre, on a $5! = 120$ ordres possibles des 5 lettres.
On a donc, au total, $1900 \cdot 120 = 228'000$ possibilités.

Exercice 10.10

a. Il y a 36 cartes et chaque joueur en reçoit 9. Il y a donc $\binom{36}{9} = 94'143'280$ possibilités (on ne tient pas compte de l'ordre).

b. Pour le 1^{er} joueur, il y a $\binom{36}{9} = 94'143'280$ possibilités (voir a.). Pour le 2^e joueur, il reçoit 9 cartes parmi les 27 restantes ; il y a donc $\binom{27}{9} = 4'686'825$ possibilités. Pour le 3^e joueur, il reçoit 9 cartes parmi les 18 restantes ; il y a donc $\binom{18}{9} = 48'620$ possibilités. Pour le 4^e joueur, il reçoit 9 cartes parmi les 9 restantes ; il y a donc $\binom{9}{9} = 1$ possibilité.
Comme l'ordre de distribution des cartes est fixé, au total, on a ainsi
$\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9} \cong 21'452'752'270'800'000'000 \cong 2{,}145 \cdot 10^{19}$ possibilités.

c. Si le joueur N reçoit les 4 valets, il y a $\binom{32}{5}$ possibilités pour les 5 autres cartes qu'il reçoit.
Pour les 3 autres joueurs, les possibilités sont $\binom{27}{9}$, $\binom{18}{9}$ et $\binom{9}{9}$.
Au total, il y a donc $\binom{32}{5} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9} \cong 45'888'240'140'000'000 \cong 4{,}589 \cdot 10^{16}$ possibilités.

d. Le nombre total de possibilités de tirer 5 cartes sur 36 est $\binom{36}{5} = 376'992$.
Le nombre total de possibilités de tirer 5 cartes sans aucun as est $\binom{32}{5} = 201'376$.
Le nombre total de possibilités de tirer 5 cartes contenant au moins un as est
$\binom{36}{5} - \binom{32}{5} = 376'992 - 201'376 = 175'616$.

Exercice 10.11

Pour un match, on a 3 possibilités.
Ainsi, pour 13 matchs, on a $3^{13} = 1'594'323$ possibilités.

Exercice 10.12

On a les possibilités suivantes : J = boule jaune, V = boule verte

tiroir bleu	tiroir jaune	tiroir gris	permutations entre les tiroirs	
JJV	V	∅	6	
JVV	J	∅	6	
JJ	VV	∅	6	
JV	JV	∅	6	
JJ	V	V	3	(les 2 V sont identiques)
VV	J	J	3	(les 2 J sont identiques)
JV	J	V	6	
JJVV	∅	∅	3	

Au total, on a donc $6+6+6+6+3+3+6+3 = 39$ possibilités.

Exercice 10.13

Il s'agit de permutations avec répétitions.
Tout d'abord, on a les 3 blocs qu'on permute de tous les façons : $3! = 6$.
Ensuite, à l'intérieur des 3 blocs de livres, on a respectivement $5!$, $4!$ et $3!$ permutations possibles : au total, $5! \cdot 4! \cdot 3!$.
Ainsi, tout ensemble, il y a $6 \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! = 103'680$ possibilités.

Exercice 10.14

a. On permute 4 lettres : le nombre de possibilités est $4! = 24$.

b. On permute 6 lettres dont 3 sont identiques : le nombre de possibilité est $\frac{6!}{3!} = 120$.

c. On permute 13 lettres dont le S apparait 2 fois, le O 3 fois, le I 2 fois : le nombre de possibilités est $\frac{13!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 259'459'200$.

Exercice 10.15

Il y a 26 possibilités pour la 1e lettre, 25 possibilités pour la 2e lettre (elle doit être différente de la 1e), 9 possibilités pour le 1e chiffre (il doit être différent de zéro) et 10 possibilités pour chaque autre chiffre.

Au total, il y a donc $26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 585'000$ possibilités.

Exercice 10.16

Pour le 1e des 4 chiffres, on a 9 possibilités (il n'est pas zéro).
Pour le 2e des 4 chiffres, on a 9 possibilités (les 10 possibilités de 0 à 9, moins celle du 1e chiffre).
Pour le 3e des 4 chiffres, on a 8 possibilités.
Pour le 4e des 4 chiffres, on a 7 possibilités.
Au total, on a $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ possibilités.

Exercice 10.17

a. Si on remet la carte tirée dans le paquet à chaque fois, on a pour chaque tirage d'une carte 52 possibilités. Au total, on a donc $52^3 = 140'608$ possibilités.

b. Si on ne remet pas la carte tirée dans le paquet, comme on tient compte de l'ordre, on a le nombre d'arrangements de 3 cartes parmi 52 : $A_3^{52} = 132'600$ possibilités
(à la calculatrice 52 $\boxed{\text{2nd}}\boxed{9}$ 3 $\boxed{=}$).

Exercice 10.18

a. Pour la 1^e place, on a 5 possibilités. Pour la 2^e, 4 ; pour la 3^e ; 3 ; etc.
Ainsi on a $5! = 120$ possibilités.

b. Pour les 2 filles, on a $2! = 2$ possibilités.
Pour les 3 garçons, on a $3! = 6$ possibilités.
Pour placer les 2 groupes (filles et garçons), on a 2 possibilité.
Au total, on a donc $2 \cdot 6 \cdot 2 = 24$ possibilités.

c. Pour les 2 filles, on a $2! = 2$ possibilités.
Pour placer les 2 filles et les 3 garçons (4 éléments), on a $4! = 24$ possibilités.
Au total, on a donc $2 \cdot 24 = 48$ possibilités.

Exercice 10.19

a. Les 3 Américains ont $3! = 6$ possibilités de se placer entre eux.

Les 4 Français ont $4! = 24$ possibilités de se placer entre eux.

Les 4 Danois ont $4! = 24$ possibilités de se placer entre eux.

Les 2 Italiens ont $2! = 2$ possibilités de se placer entre eux.

Les 4 groupes ont $4!$ possibilités de se placer entre eux.

Au total, on a donc $3! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 4! = 6 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 2 \cdot 24 = 165'888$ possibilités

b. Comme il y a 4 groupes, toute rotation de ces 4 groupes redonnera une structure déjà comptée. Ici, on aura donc ici $\frac{165'888}{4} = 41'472$ possibilités.

Exercice 10.20

Cela correspond au nombre de possibilités de choisir 3 hommes parmi 7 (l'ordre ne compte pas) multiplié par le nombre de possibilités de choisir 2 femmes parmi 5.
On a donc $\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = 350$ possibilités.

Exercice 10.21

a. Cela correspond au nombre de possibilités de choisir 8 questions parmi 10 (l'ordre ne compte pas). Il y a donc $\binom{10}{8} = 45$ possibilités.

b. S'il doit répondre aux 3 premières questions, il doit répondre à 5 questions parmi les 7 restantes. Il y a donc $\binom{7}{5} = 21$ possibilités.

c. S'il répond aux 5 premières questions, il doit répondre à 3 questions parmi les 5 dernières. Il y a alors $\binom{5}{3} = 20$ possibilités.

S'il répond à questions parmi les 5 premières, il a 5 possibilités à ce niveau-là. En outre il doit répondre à 4 questions parmi les 5 dernières. À nouveau 5 possibilités. Au total, ici, $5 \cdot 5 = 25$ possibilités.

Finalement, le nombre de possibilités s'il répond à au moins 4 des 5 premières questions est $20 + 25 = 45$.

Exercice 10.22

a. Cela correspond au nombre de possibilités de choisir 5 personnes parmi 40 (25 dames + 15 messieurs). Il y a donc $\binom{40}{5} = 658'000$ possibilités.

b. Cela correspond à choisir 3 dames parmi les 25 et, donc, 2 hommes parmi les 15. Il y a donc $\binom{25}{3}\cdot\binom{15}{2} = 241'500$ possibilités.

c. Avec 3 dames : $\binom{25}{3}\cdot\binom{15}{2} = 241'500$ possibilités (voir b.).

Avec 4 dames : $\binom{25}{4}\cdot\binom{15}{1} = 189'750$ possibilités.

Avec 5 dames : $\binom{25}{5}\cdot\binom{15}{0} = 53'130$ possibilités.

Au total, il y a donc $241'500 + 189'750 + 53'130 = 484'380$ possibilités.

d. Par définition, la probabilité est le rapport du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles.

Le nombre de cas possibles est $658'000$ (voir a.).

Le nombre de cas favorables est le nombre de possibilité qu'il y ait au moins une dame au sein du comité. Elle est égal au nombre de cas possibles moins le nombre de possibilités qu'il n'y ait aucune dame au seins du comité. Elle vaut donc $658'000 - \binom{25}{0}\cdot\binom{15}{5} = 658'000 - 3003 = 654'997$.

Ainsi le nombre de cas favorables est $654'997$.

La probabilité cherchée est donc $\frac{654'997}{658'000} = 0,99544 = 99,544\ \%$.

Exercice 10.23

a. Cela correspond au nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 12. Il y a donc $\binom{12}{4} = 495$ possibilités.

b. Le nombre de possibilités avec un seul des lycéens est le nombre de combinaisons de 3 éléments parmi 11. Comme il y a 2 lycéens différents, le nombre de possibilités est ici $\binom{11}{3} \cdot 2 = 120 \cdot 2 = 240$.

Le nombre de possibilités sans aucun des 2 lycéens est $\binom{10}{4} = 210$ (combinaisons de 4 éléments parmi 10).

Au total, on a ici $240 + 210 = 450$ possibilités.

c. Si la délégation contient les 2 jumeaux, il y a $\binom{10}{2} = 45$ possibilités pour les 2 autres délégués (combinaisons de 2 éléments parmi 10).

Si, en plus, on considère les possibilités où les jumeaux n'appartiennent pas aux délégués, on y ajoute $\binom{10}{4} = 210$ possibilités et on obtient $210 + 45 = 255$ possibilités.