Evaluation formative sur les équations du 2e degré, bicarrées et irrationnelles

Toutes les étapes amenant aux résultats doivent figurer dans vos solutions.
Toute solution sans justification sera ignorée.
Recopiez les solutions au stylo sur la feuille de données
Durée : 80 minutes Nombre de points : 50

Problème 1 : Résoudre **26 points**

a. $3x^2 = 75$

b. $\frac{1}{10}x^2 - x = \frac{12}{5}$

c. $\frac{3}{x-3} = \frac{x+2}{8}$

d. $x - \sqrt{x+7} = 5$

e. $x(x-8) - (x+2)^2 = 2x^2 + x + 2$

Voir feuilles annexes

f. $x^4 + 21x^2 - 100 = 0$

g. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

Problème 2 **10 points**

On a acheté un certain nombre de DVD pour 120 euros. Si chacun avait coûté 2 euros de moins on aurait pu en acheter 2 de plus pour le même montant. Combien a-t-on acheté de DVD et à quel prix unitaire?

Problème 3 **7 points**

Quelles sont les dimensions d'un champ rectangulaire dont la diagonale mesure 100 m. et pour lequel la largeur est les $\frac{3}{4}$ de la longueur.

Problème 4 **7 points**

La somme des carrés de trois nombres consécutifs vaut 1589. Quels sont ces trois nombres ?

Problème 1

a. $3x^2=75 \xrightarrow{:3} x^2=25 \xrightarrow{\sqrt{}} \underline{x_1=5 \text{ et } x_2=-5.}$

b. $\frac{1}{10}x^2-x=\frac{12}{5} \xrightarrow{\cdot 10} x^2-10=24 \xrightarrow{-24} x^2-10x-24=0$

$a=1,\ b=-10,\ c=-24,\ b^2-4ac=(-10)^2-4\cdot1\cdot(-24)=100+96=196>0,\ \sqrt{b^2-4ac}=14$

$\Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{10+14}{2\cdot1}=\frac{24}{2}=\underline{12}$ et

$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{10-14}{2\cdot1}=\frac{-4}{2}=\underline{-2}.$

c. $\frac{3}{x-3}=\frac{x+2}{8},\ x\neq3 \xrightarrow{\cdot 8(x-3)} 3\cdot8=(x+2)(x-3) \xrightarrow{D} 24=x^2-3x+2x-6$

$\Rightarrow 24=x^2-x-6 \xrightarrow{-24} x^2-x-30=0$

$a=1,\ b=-1,\ c=-30,\ b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-30)=1+120=121>0,\ \sqrt{b^2-4ac}=11$

$\Rightarrow x_1=\frac{1+11}{2\cdot1}=\frac{12}{2}=\underline{6}$ et $x_2=\frac{1-11}{2\cdot1}=\frac{-10}{2}=\underline{-5}$ $\quad(6\neq3$ et $-5\neq3)$.

d. $x-\sqrt{x+7}=5$ | $+\sqrt{x+7}-5$

$x-5=\sqrt{x+7}$ | $(\ \ )^2$

$(x-5)^2=x+7$ | identité remarquable: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$x^2-10x+25=x+7$ | $-x-7$

$x^2-11x+18=0$

$a=1,\ b=-11,\ c=18,\ b^2-4ac=(-11)^2-4\cdot1\cdot18=121-72=49>0,\ \sqrt{b^2-4ac}=7$

$\Rightarrow x_1=\frac{11+7}{2\cdot1}=\frac{18}{2}=9$ et $x_2=\frac{11-7}{2\cdot1}=\frac{4}{2}=2$

vérification: $x_1=9 \Rightarrow 9-\sqrt{9+7}=9-4=5$ OK

$x_2=2 \Rightarrow 2-\sqrt{2+7}=2-3=-1\neq5$ KO $\Rightarrow$ unique solution: $\underline{x=9.}$

e. $x(x-8)-(x+2)^2=2x^2+x+2$ | identité remarquable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$x(x-8)-(x^2+4x+4)=2x^2+x+2$ | distributivité

$x^2-8x-x^2-4x-4=2x^2+x+2$ | réduction

$-12x-4=2x^2+x+2$ | $+12x+4$

$0=2x^2+13x+6$

$a=2,\ b=13,\ c=6,\ b^2-4ac=13^2-4\cdot2\cdot6=169-48=121>0,\ \sqrt{b^2-4ac}=11$

$\Rightarrow x_1=\frac{-13+11}{2\cdot2}=\frac{-2}{4}=\underline{-\frac{1}{2}}$ et $x_2=\frac{-13-11}{2\cdot2}=\frac{-24}{4}=\underline{-6.}$

f. $x^4+21x^2-100=0$: on pose $u=x^2$ et on a $u^2=(x^2)^2=x^4$

$\Rightarrow$ l'équation s'écrit $u^2+21u-100=0$

$a=1,\ b=21,\ c=-100,\ b^2-4ac=21^2-4\cdot1\cdot(-100)=441+400=841>0,\ \sqrt{b^2-4ac}=29$

$\Rightarrow u_1=\frac{-21+29}{2\cdot1}=\frac{8}{2}=4$ et $u_2=\frac{-21-29}{2\cdot1}=\frac{-50}{2}=-25$

Avec $u = x^2$, $u_1 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow$ $\underline{x = 2 \text{ et } x = -2.}$

Avec $u = x^2$, $u_2 = -25 \Rightarrow x^2 = -25$ impossible.

g. $x + 3y = 5 \Rightarrow x = 5 - 3y$

$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow (5 - 3y)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow 25 - 30y + 9y^2 + y^2 = 25$

$\Rightarrow -30y + 10y^2 = 0 \Rightarrow -3y + y^2 = 0 \Rightarrow y(y-3) = 0$

$\Rightarrow$ soit $y = 0$, soit $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

Avec $y = 0$, $x = 5 - 3.0 = 5$. Avec $y = 3$, $x = 5 - 3.3 = -4$.

Les couples de solutions sont donc $\underline{x = 5, y = 0 \text{ et } x = -4, y = 3.}$

Problème 2

Notons x le nb de DVD achetés et y le prix unitaire.

On peut établir le tableau suivant :

nb	prix	total
x	y	$xy = 120$
$x+2$	$y-2$	$(x+2)(y-2) = 120$

$(x+2)(y-2) = 120 \Rightarrow xy - 2x + 2y - 4 = 120$

Avec $xy = 120$, on obtient $120 - 2x + 2y - 4 = 120 \Rightarrow -2x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow x - y + 2 = 0$

Avec $xy = 120 \Rightarrow y = \frac{120}{x}$, on obtient $x - \frac{120}{x} + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 120 + 2x = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 120 = 0$

$a = 1, b = 2, c = -120$, $b^2 - 4ac = 2^2 - 4.1.(-120) = 4 + 480 = 484 > 0$, $\sqrt{b^2 - 4ac} = 22$

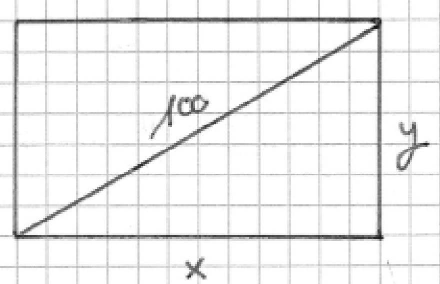
$\Rightarrow x_1 = \frac{-2+22}{2.1} = \frac{20}{2} = 10$ et $x_2 = \frac{-2-22}{2.1} = \frac{-24}{2} = -12 < 0$ exclu

Avec $x_1 = 10$, on a $y_1 = \frac{120}{10} = 12.-$

Ainsi on a acheté <u>10 DVD à 12.- la pièce</u>

Problème 3

On a la situation suivante:



Par le théorème de Pythagore, on a $x^2+y^2=100^2=10'000$.

De plus, on a $y=\frac{3}{4}x$.

On obtient $x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2=10'000 \Rightarrow x^2+\frac{9}{16}x^2=10'000 \Rightarrow \frac{25}{16}x^2=10'000$

$\Rightarrow x^2=10'000:\frac{25}{16}=10'000\cdot\frac{16}{25}=6400 \Rightarrow x=\sqrt{6400}=80 \quad (x>0)$

$\Rightarrow y=\frac{3}{4}x=\frac{3}{4}\cdot 80=60.$

Les dimensions du champ rectangulaire sont donc <u>80m sur 60m</u>.

Problème 4

Notons x le plus petit de ces nombres. Les autres sont $x+1$ et $x+2$.

On doit avoir $x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=1589$

$\Rightarrow x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=1589 \Rightarrow 3x^2+6x+5=1589$

$\Rightarrow 3x^2+6x-1584=0 \Rightarrow x^2+2x-528=0$

$a=1,\ b=2,\ c=-528,\ b^2-4ac=2^2-4\cdot1\cdot(-528)=4+2112=2116>0,\ \sqrt{b^2-4ac}=46$

$\Rightarrow x_1=\frac{-2+46}{2\cdot1}=\frac{44}{2}=22$ et $x_2=\frac{-2-46}{2}=\frac{-48}{2}=-24.$

Les nombres sont donc <u>22, 23, 24 ou −24, −23, −22.</u>