Chapitre 3

Fonctions réelles et continuité

3.1 Définitions générales

Définition 3.1.

- Soient D et T deux ensembles non vides. Une **fonction** f **de** D **dans** T est une correspondance qui associe à tout élément $x \in D$ un élément $y = f(x) \in T$. On la note par

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow T \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- L'ensemble D est le **domaine de définition** de f. Il sera souvent noté D_f.
- L'élément $y = f(x) \in T$ est **l'image de** x **par** f alors que x est une **pré-image de** y.

- Si D et T sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$, la fonction f est appelée **fonction réelle**.

- L'ensemble

$$\operatorname{Im}(f) := \{y \in T \mid \exists x \in D \text{ avec } y = f(x)\}$$

est appelé l'**image de** D **par** f. On le note aussi $f(D)$.

Définition 3.2 (Fonction injective)**.** Une fonction $f : D \longrightarrow T$ est dite **injective** si tout élément de T a au plus une pré-image.
Autrement dit, si $x_1 \neq x_2$ implique $f(x_1) \neq f(x_2)$ pour tout $x_1, x_2 \in D$.

Définition 3.3 (Fonction surjective)**.** Une fonction $f : D \longrightarrow T$ est dite **surjective** si tout élément de T a au moins une pré-image.
Autrement dit, si pour tout $y \in T$, il existe $x \in D$ avec $y = f(x)$.
Ou encore, si $\operatorname{Im}(f) = T$.

Une fonction injective et surjective est dite **bijective**.

Exemples 3.4 (Quelques exemples)**.**

(1) La fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2$ est injective mais pas surjective car il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 5$. On a alors

$$\operatorname{Im}(f) = \text{ l'ensemble des carrés dans } \mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots\}.$$

(2) La fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2$ n'est pas injective car $f(-6) = f(6) = 36$.

(3) La fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est une fonction réelle. On a $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$. Elle n'est donc pas surjective. En revanche, elle est injective car si $a \neq b$ alors $\sqrt{a} \neq \sqrt{b}$. Par la suite cette fonction sera simplement notée $f(x) = \sqrt{x}$ (sous-entendu : $D_f = \mathbb{R}_+$ et $T = \mathbb{R}$).

(4) La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ est la fonction **identité.** Elle est bijective.

(5) La fonction **signe** est définie par

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On a $D_f = \mathbb{R}$. Elle n'est ni injective ni surjective.

(6) La fonction de **Heaviside** est définie par $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

3.2 Fonctions réelles

Dorénavant, toute fonction $f(x)$ sera réelle.

Quelques propriétés particulières

Une fonction réelle $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite

- *paire* si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
- *impaire* si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
- *périodique* de période T si $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$.
- *bornée* si $f(x) \leq M$ pour un certain $M \in R$ et pour tout $x \in D_f$.
- *croissante* (resp. strictement croissante) si

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leq f(y) \quad (\text{resp. } f(x) < f(y))$$

- *décroissante* (resp. strictement décroissante) si

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant f(y) \quad (\text{resp. } f(x) > f(y))$$

- *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Composition

Soient f, g deux fonctions réelles telles que $\mathrm{Im}(f) \subset D_g$. Alors on peut construire la fonction composée $g \circ f$ définie par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \text{pour tout } x \in D_f.$$

Exemple :

$$g(x) = \sqrt{x} \quad D_g = \mathbb{R}_+ \qquad\qquad f(x) = x^2 \quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$$

Alors

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Graphe d'une fonction

Le graphe d'une fonction $f(x)$ est le sous-ensemble du plan $\mathbb{R}^2$ défini par

$$G_f = \{(x\,,\,f(x)) \mid x \in D_f\}.$$

Fonction réciproque (ou fonction inverse)

Si une fonction

$$f : D \longrightarrow T$$
$$x \mapsto f(x)$$

est **bijective**, on peut définir la fonction réciproque

$$f^{-1} : T \longrightarrow D$$

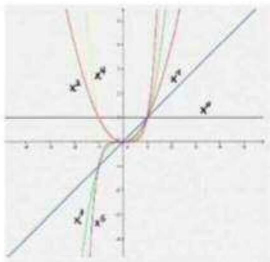
qui associe à tout $y \in T$ l'élément $x \in D$ tel que $f(x) = y$. On a alors

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x = (f \circ f^{-1})(x)$$

pour tout x où les expressions sont définies.

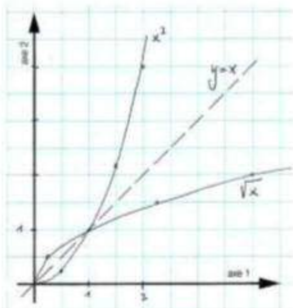
Les graphes de $f(x)$ et $f^{-1}(x)$ sont toujours symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Exemple : si $f(x) = x^2$ alors la fonction est bijective si l'on pose $D_f = R_+$. On peut donc trouver f^{-1} qui n'est rien d'autre que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.



3.3 Quelques fonctions réelles élémentaires

(I) Fonctions puissances : $f(x) = x^q$ pour $q \in \mathbb{Q}$.



On a $D_f = \mathbb{R}$ si $q \in \mathbb{N}$ alors que $D_f = \mathbb{R}^*$ si $q \in \mathbb{Z}_-$.

(II) Fonctions polynômiales :

$$y = f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad a_k \in \mathbb{R}, a_n \neq 0.$$

$D_f = \mathbb{R}$
Soit $P(x)$ un polynôme (réel) et x_0 une racine de $P(x)$. Le plus grand entier m tel que $(x - x_0)^m$ divise $P(x)$ est appelé la multiplicité de x_0 par rapport à P. On note alors

$$m = mult_P(x_0).$$

(III) Fonctions rationnelles

$$y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad D_f = \mathbb{R}\backslash\{x_k \mid Q(x_k) = 0\}.$$

Si $Q(x_k) = 0$ et $mult_Q(x_k) > mult_P(x_k)$, alors les droites $x = x_k$ sont des asymptotes verticales.

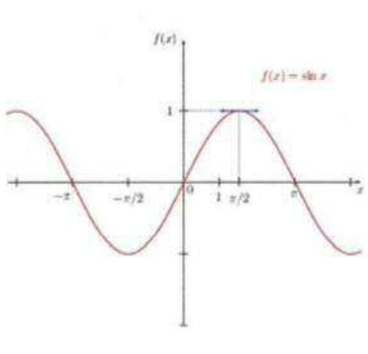
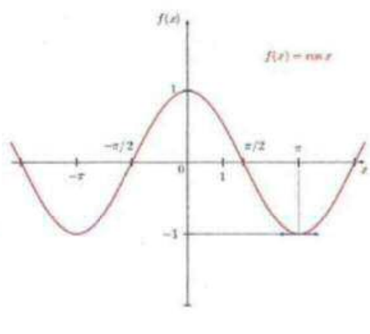
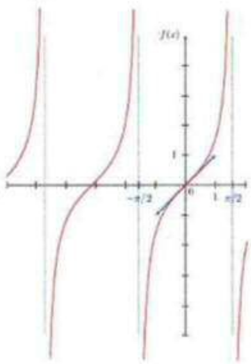
(IV) Fonctions irrationnelles : polynômes + racines
Exemple :

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt[3]{x^2+4}}{\sqrt{x^2 + 3x - \sqrt[3]{x/2}}}.$$

(V) Fonctions trigonométriques

$$\begin{array}{lll} f(x) = & \sin x & \text{impaire, périodique de période } T = 2\pi\text{, bornée} \\ & \cos x & \text{paire, périodique de période } T = 2\pi\text{, bornée} \\ & \tan x & \text{impaire, périodique de période } T = \pi\text{, non bornée} \\ & & D_f = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\} \end{array}$$

On a les relations suivantes : $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

(VI) Fonctions trigonométriques inverses
Pour inverser les fonctions trigonométriques, il faut se restreindre à un intervalle sur lequel elles sont monotones. On choisit les intervalles suivants :

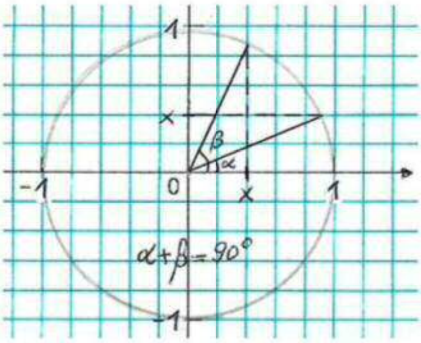
$$\begin{array}{rcll} \sin x : & \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1\,;\,1] \\ \cos x : & [0\,;\,\pi] & \longrightarrow & [-1\,;\,1] \\ \tan x : & \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

On définit alors

$$\begin{array}{llll} \arcsin : & [-1;1] & \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] & \text{par} \quad \arcsin(x) = \sin^{-1}(x) \\ \arccos : & [-1;1] & \longrightarrow [0;\pi] & \text{par} \quad \arccos(x) = \cos^{-1}(x) \\ \arctan : & \mathbb{R} & \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[& \text{par} \quad \arctan(x) = \tan^{-1}(x) \end{array}$$

ATTENTION :
on a $\arcsin(\sin x) = x$ uniquement pour $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
Et $\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1;1]$.

On a $\boxed{\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}}$ pour tout $x \in [-1; 1]$.



(VII) Fonctions exponentielles

Soit $a > 0$ un nombre réel. On cherche à définir la fonction $\boxed{f(x) = a^x}$.

(A) Si $x = q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, on pose

$$f(q) = a^q := a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

(B) Pour prolonger cette fonction à $\mathbb{R}$, il faut pouvoir définir le terme a^r quand r est réel non rationnel. On le fait en prolongeant $f(x)$ par continuité : on sait qu'il existe pour tout $r \in \mathbb{R}$ une suite rationnelle $\{q_n\}$ qui converg vers r. On a donc $\lim_{n\to\infty} q_n = r$. On pose alors

$$a^r := \lim_{n\to\infty} a^{q_n}.$$

<u>Propriétés des fonctions $f(x) = a^x$</u>

(1) $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. C'est une fonction strictement positive.

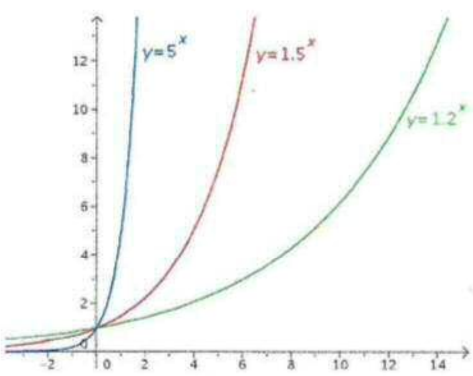
(2) $f(0) = 1$ et $f(1) = a$.

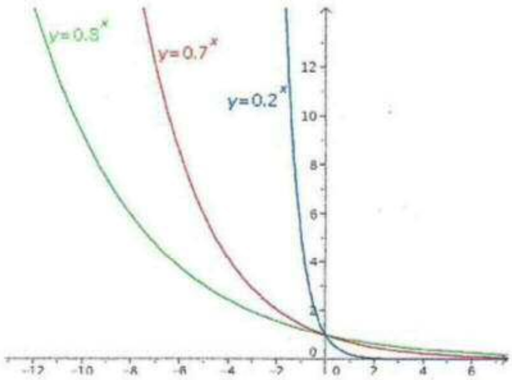
(3) $f(rx) = a^{rx} = (a^x)^r = f(x)^r$. En particulier, $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

(4) $f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$

(5) Si $a > 1$, alors $f(x) = a^x$ est <u>strictement croissante</u>.
Si $0 < a < 1$, alors $f(x) = a^x$ est <u>strictement décroissante</u>.

Graphes des fonctions exponentielles :





Remarque 3.5. Si $a = e$, on retrouve la fonction e^x définie au chapitre 2.

(VIII) Fonctions logarithmes

La fonction $f(x) = a^x$ est strictement monotone (si $a \neq 1$ ce que l'on suppose dès à présent). Elle a donc une fonction inverse et on définit :

$$\log_a y = f^{-1}(y) \qquad \forall y > 0.$$

L'ensemble de définition de $\log_a$ est donc $D_f = \mathbb{R}_+^*$. On a l'équivalence suivante :

$$\boxed{\log_a y = x \iff y = a^x} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}_+^*$$

Par définition on a les relations suivantes :

$$a^{\log_a y} = y \qquad \forall y > 0 \qquad \text{et} \qquad \log_a a^x = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propriétés des fonctions $\log_a x$

(1) la fonction $\log_a x$ n'est définie que pour $x > 0$.

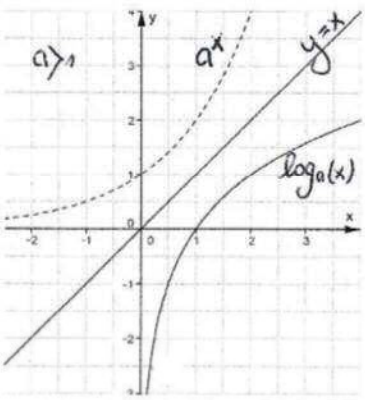
(2) $\log_a 1 = 0$ et $\log_a a = 1$.

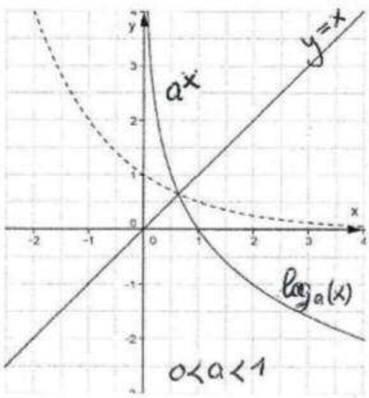
(3) $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$ pour tout $x > 0$ et tout $r \in \mathbb{R}$. En particulier $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$.

(4) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ pour tout $x, y > 0$.

(5) Si $a > 1$, alors $\log_a x$ est strictement croissante.
Si $0 < a < 1$, alors $\log_a x$ est strictement décroissante.

Graphes des fonctions logarithmes :





Définition 3.6 (Logarithme naturel)**.** On pose

$$\boxed{\ln(x) := \log_e x}$$

Changement de bases

Si $L = \log_a x$ alors $a^L = x$ et

$$\ln(x) = \ln(a^L) = L \ln(a)$$

$\implies L = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. Ainsi

$$\boxed{\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.}$$

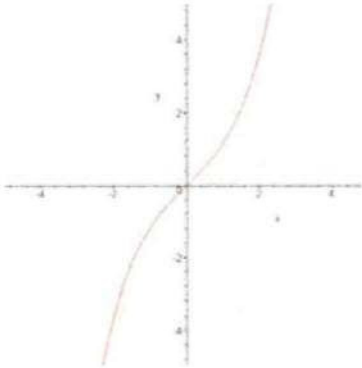
On a

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^k}{k!}.$$

(IX) Fonctions hyperboliques

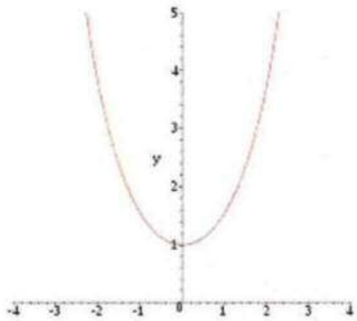
Sinus hyperbolique :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{(fonction impaire)}$$



Cosinus hyperbolique :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{(fonction paire)}$$

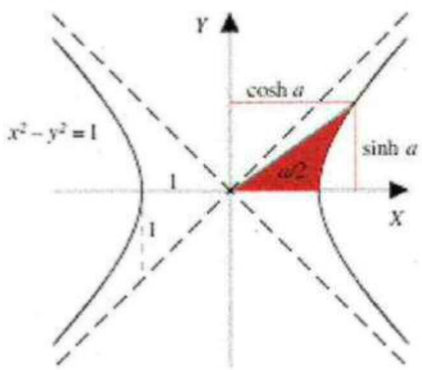


On a la relation suivante :

$$\boxed{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.}$$

Ces 2 fonctions permettent de paramétriser les hyperboles :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \begin{cases} x = \pm a\cosh(t) \\ y = b\sinh(t) \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

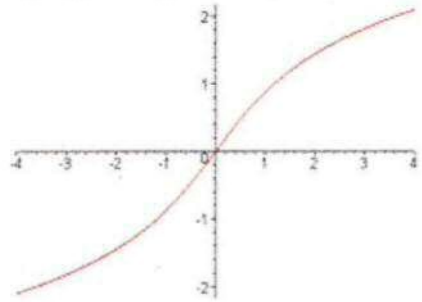


Somme :

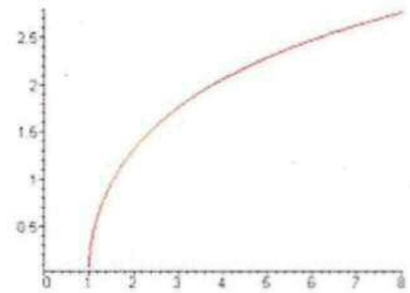
$$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b$$
$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b.$$

(X) Fonctions hyperboliques inverses

- Pour le sinus hyperbolique, pas de problème, on note $\operatorname{arcsinh}(x)$ la fonction inverse. $(D = \mathbb{R})$



- Pour le cosinus hyperbolique, on se restreint à l'intervalle $\mathbb{R}_+$ sur lequel la fonction $f(x) = \cosh(x)$ est monotone. On note alors $\operatorname{arccosh}(x)$ la fonction inverse, définie sur $[1; \infty[$ et dont l'image est $\mathbb{R}_+$.



Calcul explicite

Soit $y = \operatorname{arcsinh}(x)$. Alors

$$y = \operatorname{arcsinh}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \sinh(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \quad \Longleftrightarrow \quad e^y - e^{-y} = 2x.$$

On pose $u = e^y$ et après avoir multiplié par u, on obtient

$$u^2 - 1 = 2xu \Longleftrightarrow u^2 - 2xu - 1 = 0 \Longleftrightarrow u = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

Le signe $-$ est impossible car $u = e^y > 0$. Donc $u = x + \sqrt{x^2+1}$ et

$$y = \ln(u) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

On a ainsi démontré que

$$\boxed{\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad x \in \mathbb{R}.}$$

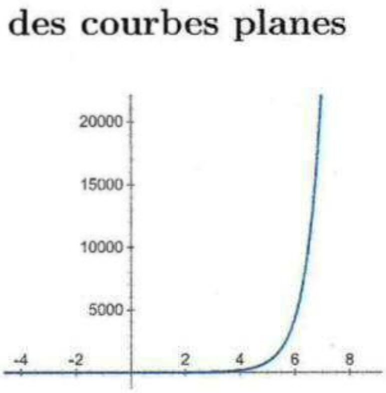
De même, on peut démontrer que

$$\boxed{\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad x \geqslant 1.}$$

3.4 Représentation des courbes planes

1) Explicite : $y = f(x)$.

   Exemple : $y = \dfrac{e^{2x}}{1+x^2}$.

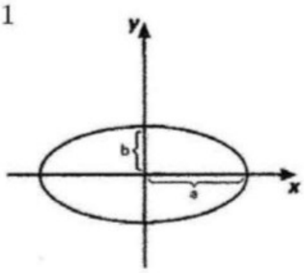


2) Implicite : $F(x; y) = 0$.

   Exemples :

   1) Cercle de centre $C(a; b)$ et de rayon R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

   2) Ellipse : $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$



   Attention : Courbe $\neq$ fonction.

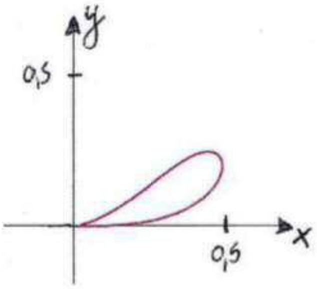
   Fonction : à un $x \in D$ correspond un seul y $\longleftrightarrow$

   Courbe : il peut y avoir plusieurs y pour un x donné.

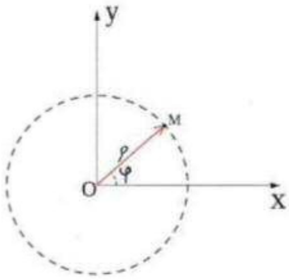
3) Représentation paramétrique : x et y sont donnés en fonction d'un paramètre $t \in I \subset \mathbb{R}$.

   Exemple :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases} \qquad t \neq -1.$$



4) Représentation polaire :

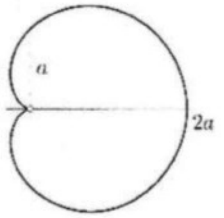


A un point $P(x;y)$ correspond un couple $(\rho\,;\,\varphi)$ où ρ est la distance de P à l'origine et φ l'angle entre Ox et OP.
On a les règles de transformations suivantes :

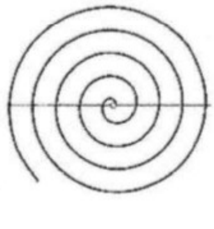
$$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}\right.$$

Une courbe peut alors être donnée sous forme polaire, c'est-à-dire à l'aide d'une équation reliant ρ et φ.

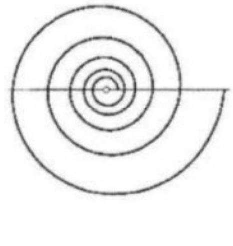
Exemples :
A) Cardioïde : $\rho = a(1+\cos\varphi) \quad a > 0 \qquad \varphi \in [0\,;\,2\pi]$.



B) Spirale d'Archimède : $\rho = a\varphi$ $(a > 0)$ $\varphi \in [0;\infty[$



C) Spirale logarithmique : $\rho = e^{m\varphi}$, $\varphi \in]-\infty;\infty[$. Le point 0 est un point asymptote.



5) On peut combiner 3) et 4) pour avoir

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases}$$

3.5 Valeur limite d'une fonction à l'infini

On cherche à définir $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

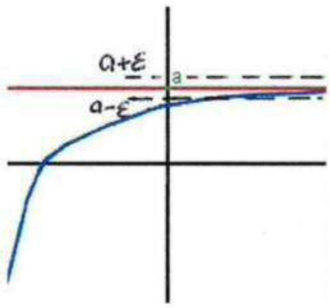
Définition 3.7. On dira que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$$

si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $M_\epsilon \in \mathbb{R}$ tel que

$$|f(x) - a| < \epsilon \qquad \text{pour tout } x > M_\epsilon \ .$$

Dès que x est + grand que M_ϵ alors $f(x)$ est compris dans une bande de largeur 2ϵ autour de a. Et ceci pour n'importe quel ϵ aussi petit soit-il.



- idem pour la limite en $-\infty$.

Définition 3.8 (Limite impropre)**.** On dira que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad (\text{resp. } -\infty)$$

si pour tout $r \in \mathbb{R}$, il existe $M_r \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) > r \qquad (resp. f(x) < r) \qquad \text{pour tout } x > M_r$$

Exemples 3.9.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^q}$, $q \in \mathbb{Q}_+^*$. Alors

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

2)

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{x^m}{x^n}\left(\frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \ldots \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}}{b_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}}\right).$$

Si $x \longrightarrow \infty$ alors $\frac{a_{m-1}}{x} \longrightarrow 0$, $\frac{a_1}{x^{m-1}} \longrightarrow 0$, etc...
Il reste

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^m}{x^n} \cdot \frac{a_m}{b_n}.$$

Si $m = n$, alors $= \frac{a_m}{b_n} = c$ (asymptote horizontale $y = c$)
Si $m < n$ alors $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ (asymptote horizontale $y = 0$)
sinon on a $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

3) $f(x) = \sin x$. La limite en $x \to \infty$ n'existe pas. Même impropre. Idem pour $\cos x$.

4)

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{x^6} \sin^2(x).$$

Alors $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$.

5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

3.6 Valeurs limites en un point et continuité

3.6.1 Définitions

Limite

Définition 1

Soit $f(x)$ une fonction et x_0 un point fixé. On dit que f admet le nombre L pour limite au point x_0 si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta_\epsilon > 0$ avec

$$|f(x) - L| < \epsilon \qquad \text{dès que} \quad 0 < |x_0 - x| < \delta_\epsilon.$$

On note alors $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

Remarque : Dans la définition, il n'est pas nécessaire que $x_0 \in D_f$. En revanche il faut qu'il existe $\delta > 0$ avec $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[\subset D_f \cup \{x_0\}$.

Définition 2

On dit que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ si **pour toute suite** $\{\xi_n\}$ telle que

(i) $\xi_n \neq x_0$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$,

on a

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = L.$$

Proposition 3.10. *Les 2 définitions ci-dessus sont équivalentes.*

Notation 3.11. Au lieu de $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ on peut écrire $\boxed{\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = L.}$

(Ici encore $h \to 0$ mais $h \neq 0$.)

Définition 3.12. Limite à gauche et limite à droite On peut définir aussi la *limite à gauche* qui est notée $\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x)}$ et la *limite à droite* qui est notée $\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x).}$

Exemple 3.13. Considérons la fonction $f(x)$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 2 \\ 2 \text{ si } x = 2 \\ 3 \text{ si } x > 2 \end{cases}$

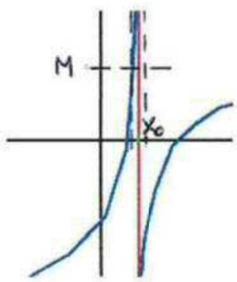
Dans cet exemple, on a $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$ et $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$. Mais la limite $\lim_{x \to 2} f(x)$ n'existe pas.

Définition 3.14 (Limite impropre)**.** Limite à droite : On dira que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

si pour tout $M > 0$, il existe $\delta_M > 0$ tel que

$$f(x) > M \qquad \text{pour tout} \quad x \in \left]x_0 \,;\, x_0 + \delta_M\right[$$



Définition analogue pour $-\infty$ et pour la limite à gauche.

Exemples 3.15.

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Alors $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$.

- $f(x) = \frac{}{x-2}$. Alors

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

3.6.2 Propriétés des limites

Théorème 3.16 (Théorème des gendarmes). *Soient $f(x), \phi(x), \psi(x)$ des fonctions réelles, x_0 un point fixé et $\delta > 0$. Si pour tout $x \in D_f \cap D_\phi \cap D_\psi$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta$ on a*

$$\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

et si

$$\lim_{x \to x_0} \phi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = a$$

alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

La démonstration est similaire à celle faite pour les suites.

Proposition 3.17. *Supposons $f(x) = g(x)h(x)$. Si*

(i) $h(x)$ est borné sur un voisinage de x_0

(ii) et si $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION :
Par hypothèse sur $h(x)$, on a $|h(x)| \leq M$ dès que $|x - x_0| < \delta$.
Soit $\epsilon > 0$ et soit $\delta = \delta_{\epsilon/M}$ tel que $g(x) < \epsilon/M$ dès que $|x - x_0| < \delta$. Un tel δ existe car $g(x) \xrightarrow{x \to x_0} 0$.
Mais alors

$$|f(x)| = |g(x)| \cdot |h(x)| \leq \frac{\epsilon}{M} \cdot M \leq \epsilon$$

ce qui montre que $f(x)$ tend vers 0. □

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x} \sin x$. Alors $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Soient $f(x)$ et $g(x)$ 2 fonctions telles que

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$

(ii) $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$.

Alors

1) $\lim_{x \to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha a + \beta b$ (linéarité de la limite)

2) $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = ab$

3)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \qquad \text{si } b \neq 0.$$

Cas indéterminés :

$$\frac{\infty}{\infty}; \quad \frac{0}{0}; \quad 0 \cdot \infty; \quad \infty + (-\infty)$$

3.6.3 Exemples

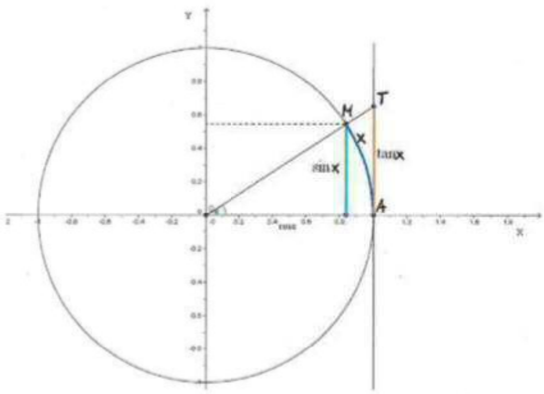
1. Calculons $A = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x}-1} \qquad \left(= \dfrac{0}{0}\right)$

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(3x+1-4)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{3(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{3x+1}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

2. $A = x + 2 - \sqrt{x^2+4} \xrightarrow{x\to\infty} ?$

$$\begin{aligned} A &= (x+2-\sqrt{x^2+4}) \cdot \frac{x+2+\sqrt{x^2+4}}{x+2+\sqrt{x^2+4}} \\ &= \frac{x^2+4x+4-(x^2+4)}{x+2+\sqrt{x^2+4}} = \frac{4x}{x+2+x\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} \\ &= \frac{4}{1+\frac{2}{x}+\sqrt{1+4/x^2}} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

3. Que vaut la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} \qquad \left(= \dfrac{0}{0}\right)$.



On a

$$\Delta\, OAM < \text{secteur } OAM < \Delta\, OAT.$$

Donc

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{x}{2} \cdot 1^2 < \frac{1 \cdot \tan x}{2}$$

ce qui donne

$$\sin x < x < \tan x$$

et en divisant par $\sin x$ on obtient

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Par le théorème des gendarmes, on a

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Plus généralement

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin px}{x} = \lim_{x\to 0} p \cdot \frac{\sin px}{px} = p.$$

4. Calculons
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sin 2x}\right)\sin x = \text{"}(\infty+\infty)\cdot 0\text{"}.$$

On a
$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sin 2x}\right)\sin x &= \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}+\frac{\sin x}{2\sin x\cos x}\\ &= \sqrt[3]{x^2}\,\frac{\sin x}{x}+\frac{1}{2\cos x}\end{aligned}$$

et la limite vaut alors $0\cdot 1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Composition

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions telles que $\mathrm{Im}(f)\subset D_g$. Si
- $\lim_{x\to x_0} f(x)=c$ et
- $\lim_{u\to c} g(u)=L$,

alors
$$\lim_{x\to x_0} g(f(x))=L.$$

Applications :

(1) Que vaut
$$A=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)}{x^2}\qquad \left(=\frac{0}{0}\right)?$$

On a $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ et donc
$$\begin{aligned}A=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot 2\cdot \sin^2 x/2}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin(x/2))^2}{(x/2)^2}\\ &\overset{u=x/2}{=}\lim_{u\to 0}\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2\\ &= \left(\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\right)^2=1.\end{aligned}$$

Donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)}{x^2}=1$$

On écrit que pour $x\approx 0$ on a $1-\cos x\approx\frac{x^2}{2}$.
Plus généralement on dit que
$$\boxed{f(x)\approx g(x)\ \text{ en } x_0\qquad \text{si } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.}$$

(2)
$$h(x)=\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}=\frac{\sin(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}.$$

On pose $u=1-\cos x$. Et $u\longrightarrow 0$ si $x\longrightarrow 0$. Donc
$$\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

3.7 Continuité

Définition 1

Soit $f(x)$ une fonction et $x_0 \in D_f$. On dit que f est continue au point x_0 si

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

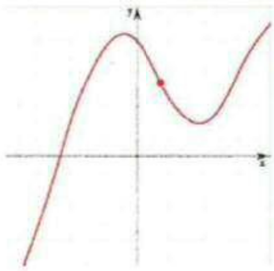
Définition 2

Soit $f(x)$ une fonction et $x_0 \in D_f$. On dit que f est continue au point x_0 si pour toute suite $\{\xi_n\}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$, on a

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f(\xi_n).$$

Une fonction continue commute avec l'opérateur limite.
Ces 2 définitions sont équivalentes.

Définition 3.18. On dit que $f(x)$ est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point $x_0 \in I$. On note alors $f(x) \in C^0(I)$.



Théorème 3.19. *Soient f et g deux fonctions continues sur I. Alors*

(1) $\alpha f + \beta g$ est continue sur I pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

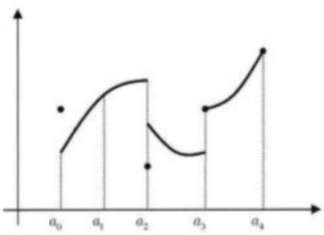
(2) fg est continue sur I.

(3) $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $I' = I \backslash \{x \,|\, g(x) = 0\}$.

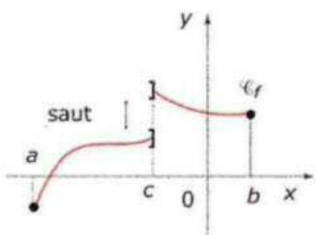
(4) Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Trois types de discontinuité

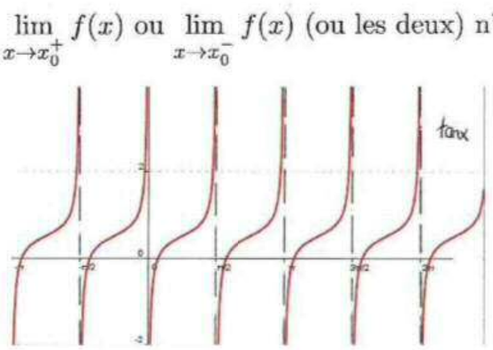
Type I La limite $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe mais n'est pas égale à $f(x_0)$.



Type II $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.



Type III une des limites $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ou $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ (ou les deux) n'existe pas.



Théorème 3.20. *Soit $f(x)$ une fonction bijective et continue sur l'intervalle I. Alors sa fonction réciproque $f^{-1}(x)$ est continue sur l'intervalle $f(I)$*

3.7.1 Exemples

1. La fonction $f(x) = x$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   Corollaire : toute fonction polynômiale et rationnelle est continue sur son domaine de définition.

2. La fonction $f(x) = \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$:
   Démonstration : On a
   $$|\sin(x+h) - \sin x| = \left|2\sin(h/2)\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\right| \leq 2 \cdot \left|\frac{h}{2}\right| \leq |h|.$$
   Donc $\lim_{h \to 0} \sin(x+h) = \sin x$. □

   De même, on montre que $\cos x$ et $\tan x$ sont continues sur leurs domaines de définition.

3. La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x_0 > 0$. Alors $\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \dfrac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$ et donc
   $$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}}$$
   ce qui montre que si $x \longrightarrow x_0$ alors $\sqrt{x} \longrightarrow \sqrt{x_0}$.
   La fonction $\sqrt{x}$ est également continue à droite en $x = 0$.

   On montre de même que la fonction $f(x) = x^q$ est continue sur son domaine de définition pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

4. La fonction $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   Démonstration : On doit montrer que $\lim_{h \to 0} e^{x+h} = e^x$ c'est-à-dire que
   $$\lim_{h \to 0} \left(e^{x+h} - e^x\right) = 0.$$
   Mais comme
   $$|e^{x+h} - e^x| = |e^x e^h - e^x| = e^x |e^h - 1|$$
   il suffit de montrer que $\lim_{h \to 0} e^h = 1$, c'est-à-dire que e^x est continue en $x = 0$.

Si $|h| < 1$, on a

$$\begin{aligned} e^h &= 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \dots \qquad \text{et donc} \\ |e^h - 1| &= \left|h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3!} + \dots\right| \\ &\leq |h| \left(1 + \frac{|h|}{2} + \frac{|h|^2}{3!} + \frac{|h|^3}{4!} + \dots\right) \\ &\leq |h| \left(1 + \frac{|h|}{2} + \left(\frac{|h|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|h|}{2}\right)^3 + \dots\right) \\ &= |h| \frac{1}{1 - \frac{|h|}{2}} = \frac{2|h|}{2 - |h|} \leq 2|h|. \end{aligned}$$

En conséquence, si $h \to 0$ on a $|e^h - 1| \longrightarrow 0$ ce qui montre que $\lim\limits_{h \to 0} e^h = 1$. □

Corollaire : Les fonctions a^x sont continues sur $\mathbb{R}$ car $a^x = e^{x \ln a}$.
Corollaire : Les fonctions $\log_a x$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

3.7.2 Prolongement par continuité

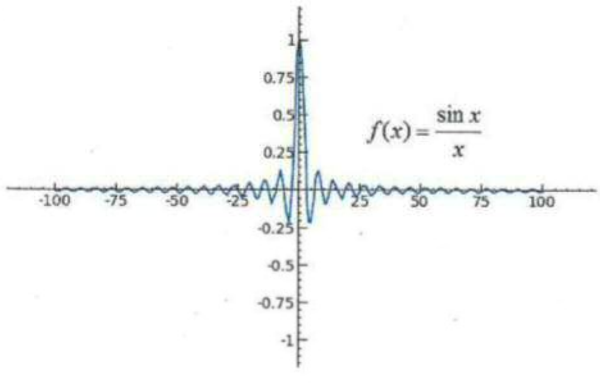
Soit $f(x)$ une fonction et $x_0 \notin D_f$. Supposons que la limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ existe. On peut alors définir une fonction $\tilde{f}(x)$ en posant

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) &= f(x) \qquad \text{si} \quad x \neq x_0 \\ \tilde{f}(x_0) &= a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x). \end{cases}$$

On appelle $\tilde{f}$ le **prolongement par continuité de** f au point x_0. On a cette fois $x_0 \in D_{\tilde{f}}$.

Remarque : En général, la nouvelle fonction sera encore notée f par un abus de notation.

Exemples :
1) La fonction $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ indéfinie en zéro peut être prolongée par continuité en posant $f(0) = 1$ car on vient de voir que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$



2) Soit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{si} \quad x \neq 1, x \geqslant 0 \\ c & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Trouver c pour que f soit continue en 1.

Solution : On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{(x^3-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1) = 6.\end{aligned}$$

Il faut poser $c = 6$ et on peut alors écrire

$$\tilde{f}(x) = (x^2+x+1)(\sqrt{x}+1) \qquad D_{\tilde{f}} = \mathbb{R}_+.$$

Théorème 3.21. *Toutes les fonctions élémentaires définies au paragraphe §3.3 sont continues sur D_f.*

3.7.3 Propriétés des fonctions continues

Théorème de Bolzano :
Soit $f(x)$ une fonction continue sur l'intervalle $I = [a;b]$ avec $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Alors il existe un $x_0 \in I$ avec $f(x_0) = 0$.

Corollaire : Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue avec $f(a) = c_1$ et $f(b) = c_2$, alors pour tout c compris entre c_1 et c_2, il existe $x_0 \in [a;b]$ avec $f(x_0) = c$.

Théorème 3.22. *Soit $f(x)$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $I = [a;b]$. Alors $f(x)$ atteint son maximum et son minimum sur I, c'est-à-dire qu'il existe $x_m, x_M \in I$ avec*

$$f(x_M) \geqslant f(x) \quad \forall x \in I \qquad \text{et} \qquad f(x_m) \leq f(x) \quad \forall x \in I.$$

ATTENTION : ce résultat est faux si I est ouvert. Exemple : $f(x) = x$ et $I =]0;1[$.

Théorème 3.23. *Soit $f(x)$ une fonction continue sur I. Alors*

$$\boxed{f \quad \text{est injective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \quad \text{est strictement monotone.}}$$

DÉMONSTRATION :
$\Longleftarrow$ il est clair que, pour une fonction strictement monotone, $x \neq y$ implique $f(x) \neq f(y)$

$\Longrightarrow$ On montre la contraposée : Supposons f non strictement monotone. Alors il existe $x_1 < x_2 < x_3$ avec $f(x_1) < f(x_2)$ et $f(x_2) \geqslant f(x_3)$ (ou le contraire mais la preuve est la même). Si $f(x_2) = f(x_3)$ alors f n'est pas injective et c'est terminé.
On peut donc supposer $f(x_2) > f(x_3)$. Mais alors il existe c avec $f(x_1) < c < f(x_2)$ et $f(x_2) > c > f(x_3)$. Par le corollaire précédent, il existe dont $\xi_1 \in [x_1; x_2[$ et $\xi_2 \in]x_2; x_3]$ avec $f(\xi_1) = c$ et $f(\xi_2) = c$. Donc f n'est pas injective. □

Contre-exemples : l'hypothèse de continuité est essentielle :