

# Chapitre 3

## Variables aléatoires

### Sommaire

1. Introduction.....	3
2. Variables aléatoires discrètes.....	4
2.1. Définition.....	4
2.2. Loi de probabilité.....	4
2.3. Fonction de répartition.....	5
3. Variables aléatoires continues.....	7
3.1. Définition.....	7
3.2. Fonction densité de probabilité.....	7
3.3. Fonction de répartition.....	8
4. Espérance et variance.....	11
4.1. Espérance mathématique.....	11
4.1.1. Variables aléatoires discrètes.....	12
4.1.2. Variables aléatoires continues.....	12
4.1.3. Propriétés de l'espérance.....	13
4.2. Variance.....	14
4.2.1. Variables aléatoires discrètes.....	14
4.2.2. Variables aléatoires continues.....	15
4.2.3. Propriétés de la variance.....	15
5. Couples de variables aléatoires.....	15

5.1. Loi jointe.....	15
5.2. Indépendance entre variables aléatoires.....	17
5.3. Covariance et corrélation.....	18
5.4. Opérations sur les variables aléatoires.....	19
5.5. Généralisation à $n$ variables aléatoires.....	20

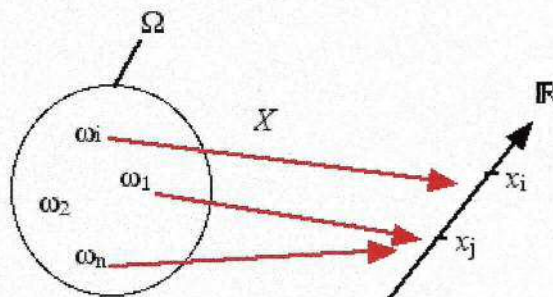
## 1. Introduction

Dans la plupart des **phénomènes aléatoires**, le résultat d'une **épreuve** peut se traduire par une « grandeur » mathématique, très souvent représentée par un nombre entier ou un nombre réel. La notion mathématique qui représente efficacement ce genre de situation concrète est celle de **variable aléatoire** (notée également v.a.). Ainsi le temps de désintégration d'un atome radioactif, le pourcentage de réponses « oui » à une question posée dans un sondage ou le nombre d'enfants d'un couple sont des exemples de variables aléatoires.

**Remarque :** On se limitera ici au cas des variables aléatoires **réelles** (les entiers faisant bien sûr partie des réels).

Etant donné un **espace probabilisé** d'espace fondamental  $\Omega$  et de mesure de probabilité  $P$ , on appelle **variable aléatoire** sur cet espace, toute **application**  $X$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\rightarrow X(\omega) \end{aligned}$$



A chaque évènement élémentaire  $\omega$  de  $\Omega$  correspond un nombre réel  $x$  associé à la variable aléatoire  $X$ . Comme l'indique le graphe, il n'y a pas obligatoirement autant de valeurs possibles prises par la variable aléatoire  $X$  que d'évènements élémentaires. La valeur  $x$  correspond à la **réalisation** de la variable  $X$  pour l'évènement élémentaire  $\omega$ .

### Exemple :

Si l'on considère la constitution d'une fratrie de deux enfants, l'espace fondamental est constitué des évènements élémentaires suivant :

$$\Omega = \{GG, GF, FG, FF\}$$

Les valeurs possibles prises par la variable aléatoire  $X$ , « nombres de fille dans la famille » sont :  $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

## 2 Variables aléatoires discrètes

### 2.1 Définition

Une variable aléatoire est dite **discrète** si elle ne prend que des **valeurs discontinues** dans un intervalle donné (borné ou non borné). L'ensemble des nombres entiers est discret. En règle générale, toutes les variables qui résultent d'un **dénombrement** ou d'une **numération** sont de type discrètes.

#### Exemples :

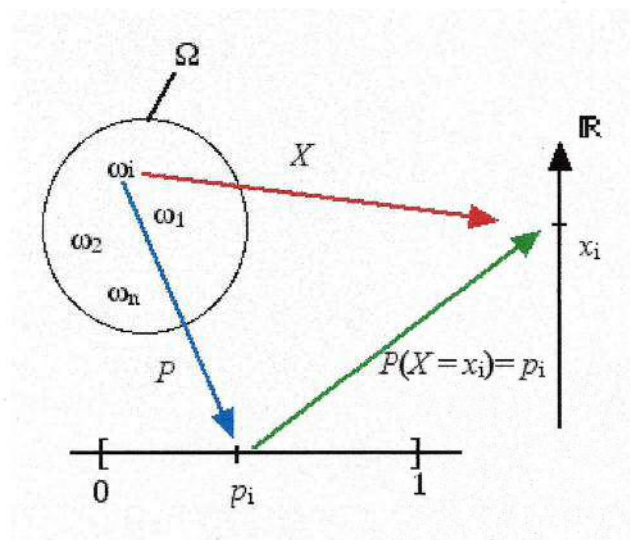
Les variables aléatoires,

- le nombre de petits par porté pour une espèce animale donnée (chat, marmotte, etc),
- le nombre de bactéries dans 100 ml de préparation,
- le nombre de mutations dans une séquence d'ADN de 10 kb,
- etc...

sont des **variables aléatoires discrètes**.

### 2.2 Loi de probabilité

Une variable aléatoire est caractérisée par l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre et par l'expression mathématique de la probabilité de ces valeurs. Cette expression s'appelle **la loi de probabilité** (ou **distribution de probabilité**) de la variable aléatoire.



La loi de probabilité d'une **variable aléatoire discrète** est entièrement déterminée par les probabilités  $p_i$  des évènements  $\{X = x_i\}$ ,  $x_i$  parcourant l'univers image  $X(\Omega)$ . La **loi de probabilité** est donnée par les  $(x_i, p_i)_i$ .

**Remarque :** Afin de simplifier l'écriture, nous noterons pour la suite du cours :  
 $P(\{X = x_i\})$  équivalent à  $P(X=x_i)$  ou  $p_i$

**Exemple :**

Dans le cas de la constitution d'une fratrie de deux enfants, si l'on fait l'hypothèse que la probabilité d'avoir un garçon est égale à celle d'avoir une fille (1/2), alors la distribution de probabilité ou **loi de probabilité du nombre de filles** dans une fratrie de deux enfants est :

Ensemble des évènements possibles $\Omega$	Valeurs de la variable aléatoire $X$	Probabilités associées à la variable $X$ $P(X=x_i)$ ou $p_i$
G et G	0	1/4
F et G ou G et F	1	1/2
F et F	2	1/4

Si  $P(F)=P(G)=1/2$ , alors

(1)  $P[(F \cap G) \cup (G \cap F)] = P(F \cap G) + P(G \cap F)$   
 avec  $(F \cap G) \cap (G \cap F) = \emptyset$  évènements incompatibles

Propriétés d'additivité

(2)  $P(F \cap G) = P(F)P(G)$   
 d'où  $P[(F \cap G) \cup (G \cap F)] = P(X=1) = (1/2 \times 1/2) + (1/2 \times 1/2) = 1/2$

Propriété d'indépendance

**Remarque :** Une loi de probabilité n'est établie que si  $\sum_i p_i = 1$ , la somme étant étendue à tous les indices  $i$ .

2.3 Fonction de répartition

On appelle **fonction de répartition** d'une variable aléatoire  $X$ , la fonction  $F_X$  telle que :

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow F_X(t) = P(X < t)$$

Concrètement la fonction de répartition correspond à la **distribution des probabilités cumulées**. Le plateau atteint par la fonction de répartition correspond à la valeur de probabilité 1 car  $\sum_i p_i = 1$ .

L'importance pratique de la fonction de répartition est qu'elle permet de calculer la probabilité de tout intervalle dans  $\mathbb{R}$ .

Les **propriétés** associées à la fonction de répartition sont les suivantes :

Soit  $F_X$  la fonction de répartition d'une **variable aléatoire discrète**  $X$  alors :

(P<sub>1</sub>)  $\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 \leq F_X(t) \leq 1$

(P<sub>2</sub>)  $F_X$  est croissante sur  $\mathbb{R}$

(P<sub>3</sub>)  $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$

(P<sub>4</sub>) si  $a \leq b$   $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$

**Voici pourquoi :**

(P<sub>1</sub>) résulte de la définition d'une probabilité

(P<sub>2</sub>) si  $a \leq b$ , alors  $\{X < a\} \subset \{X < b\}$  donc  $P(X < a) \leq P(X < b)$  voir [inclusion](#)

(P<sub>3</sub>) même raison que pour P<sub>1</sub>

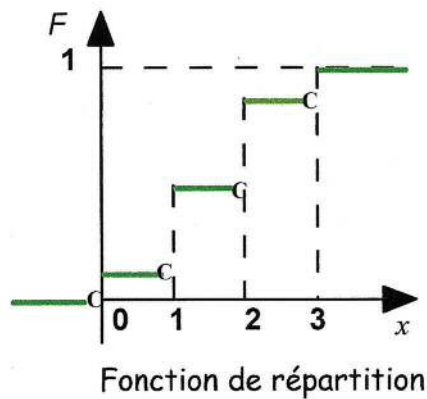
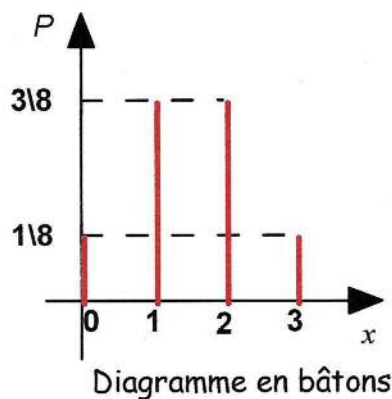
(P<sub>4</sub>)  $\{X < b\} = \{a \leq X \leq b\} \cup \{X < a\}$  ainsi  $F_X(b) = P(a \leq X \leq b) + F_X(a)$

### Exemple :

On considère l'évènement  $\omega$  « lancer de 3 pièces ». On introduit une variable aléatoire  $X$  définie par  $X(\omega)$  « nombre de piles de l'évènement  $\omega$  ». La loi de probabilité de  $X$  est :

Nombre de piles	$P(X = x_i)$	$F_X$
0	1/8	1/8
1	3/8	4/8
2	3/8	7/8
3	1/8	1

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, on utilise un [diagramme en bâtons](#) pour visualiser la **distribution de probabilités** et une fonction en escalier pour **la fonction de répartition**.



### 3 Variables aléatoires continues

#### 3.1. Définition

Une variable aléatoire est dite **continue** si elle peut prendre **toutes les valeurs** dans un intervalle donné (borné ou non borné). En règle générale, toutes les variables qui résultent d'une **mesure** sont de type continu.

#### Exemples :

Les variables aléatoires,

- le masse corporelle des individus pour une espèce animale donnée,
- taux de glucose dans le sang,
- etc.

sont des **variables aléatoires continues**.

#### 3.2. Fonction densité de probabilité

Dans le cas d'une **variable aléatoire continue**, la loi de probabilité associe une probabilité à chaque ensemble de valeurs définies **dans un intervalle donné**. En effet, pour une variable aléatoire continue, la probabilité associée à l'évènement  $\{X = a\}$  est nulle, car il est impossible d'observer exactement cette valeur.

On considère alors la probabilité que la variable aléatoire  $X$  prenne des valeurs comprises dans un intervalle  $[a, b]$  tel que  $P(a \leq X \leq b)$ .

Lorsque cet intervalle tend vers 0, la valeur prise par  $X$  tend alors vers une fonction que l'on appelle **fonction densité de probabilité** ou **densité de probabilité**.

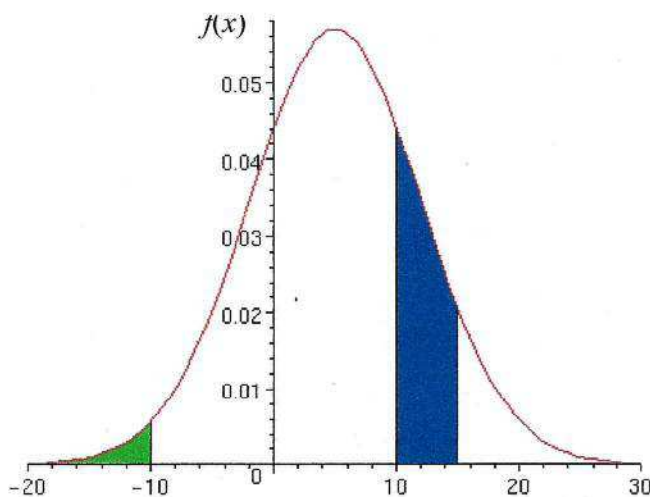
On appelle **densité de probabilité** toute application continue par morceaux :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x)$$

telle que :

$$(P_1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0$$

$$(P_2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (\text{en supposant que } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \text{ existe})$$



Soit une **fonction densité de probabilité**  $f(x)$  :

(1) l'aire hachurée **en vert** correspond à la probabilité

$$P(X < -10)$$

(2) l'aire hachurée **en bleu** correspond à la probabilité

$$P(+10 < X < +15)$$

**Remarque** : Cette fonction densité de probabilité est une loi de probabilité car l'aire sous la courbe est égale à 1 pour toutes les valeurs de  $x$  définies.

Réciproquement :

Une variable aléatoire  $X$  définie sur un univers  $\Omega$  est dite **absolument continue**, s'il existe une **fonction densité de probabilité**  $f$  telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad P(X < t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

(voir graphe ci-dessus).



### 3.3. Fonction de répartition

Si comme pour les variables aléatoires discrètes, on définit la **fonction de répartition** de  $X$  par :

$$\begin{aligned} F_X: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto F_X(t) = P(X < t) \end{aligned}$$

alors la relation entre la **fonction de répartition**  $F_X$  et la fonction **densité de probabilité**  $f(x)$  est la suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_X(t) = P(X < t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

La fonction de répartition  $F_X(t)$  est la **primitive** (voir cours d'analyse) de la fonction densité de probabilité  $f(x)$ , et permet d'obtenir les probabilités associées à la variable aléatoire  $X$ , en effet :

Soit  $X$  une **variable aléatoire absolument continue** de densité  $f$  et de fonction de répartition  $F_X$ , alors :

$$(P_1) \quad P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{avec } a < b$$

$$(P_2) \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad P(X = a) = 0 \quad \text{si } f \text{ est continue à droite du point } a.$$

**Voici pourquoi :**

$$(P_1) \quad P(a \leq X \leq b) = P(X < b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$\text{d'où} \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

(P<sub>2</sub>) Si  $f$  est continue sur un intervalle de la forme  $[a, a+h]$  avec  $h \rightarrow 0^+$  alors,

$$P(a \leq X \leq a+h) = \int_a^{a+h} f(x) dx = hf(a+\theta h) \quad \text{avec } (0 < \theta < 1)$$

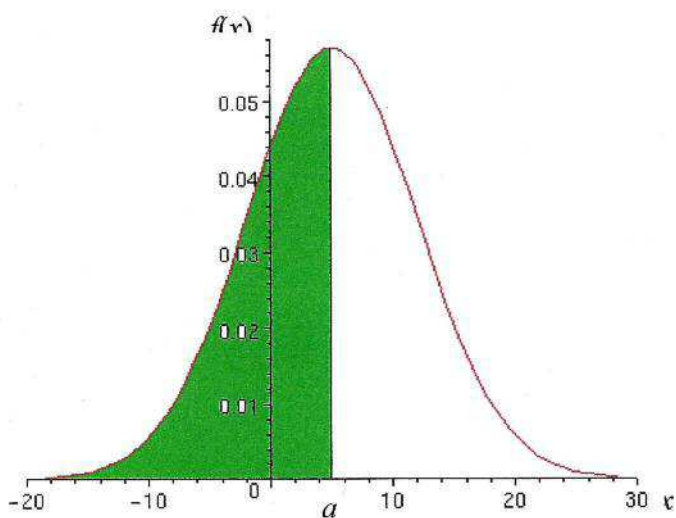
(théorème des accroissements finis)

Ainsi lorsque  $h \rightarrow 0^+$  :  $f(a+\theta h) \rightarrow f(a)$  et  $hf(a+\theta h) \rightarrow 0$

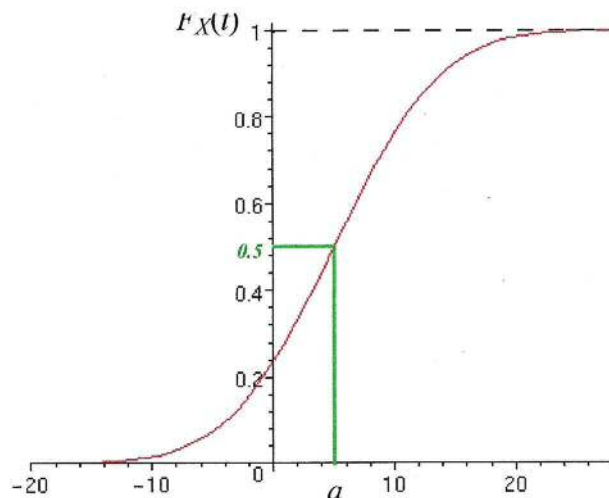
$$\text{d'où} \quad P(a \leq X \leq a+h) \rightarrow P(X = a) = 0$$

**Remarque :** La propriété P<sub>2</sub> implique que  $P(X \leq t) = P(X < t)$ .

La **fonction de répartition** correspond aux **probabilités cumulées** associées à la variable aléatoire continue sur l'intervalle d'étude (graphe ci-dessous).



Fonction densité de probabilité  $f(x)$



Fonction de répartition  $F_X$

L'aire **hachurée en vert** sous la courbe de la fonction densité de probabilité correspond à la probabilité  $P(X < a)$  et vaut **0,5** car ceci correspond exactement à la moitié de l'aire totale sous la courbe. Cette probabilité correspond à la valeur de la fonction de répartition au **point d'inflexion de la courbe** (voir cours analyse).

Les **propriétés** associées à la fonction de répartition sont les suivantes :

Soit  $F_X$  la fonction de répartition d'une variable aléatoire **absolument continue**  $X$  alors :

- (P<sub>1</sub>)  $F_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , dérivable en tout point où  $f$  est continue et alors  $F_X' = f$
- (P<sub>2</sub>)  $F_X$  est croissante sur  $\mathbb{R}$
- (P<sub>3</sub>)  $F_X$  est à valeurs dans  $[0,1]$
- (P<sub>4</sub>)  $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$

**Voici pourquoi :**

(P<sub>1</sub>) résulte de la relation suivante  $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$

(P<sub>2</sub>)  $F_X' = f$  est donc positive sur  $\mathbb{R}$

(P<sub>3</sub>) Evident

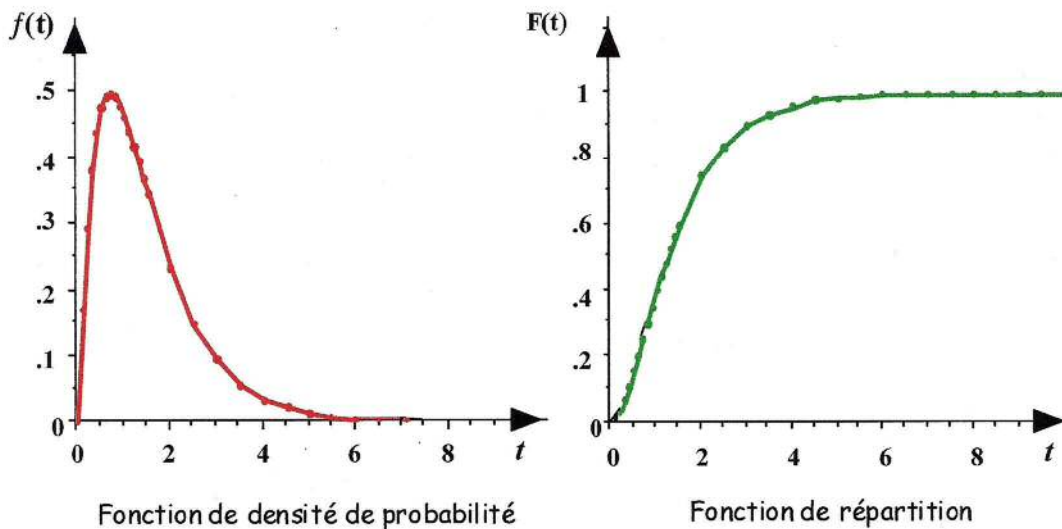
(P<sub>4</sub>)  $\int_{-\infty}^t f(x) dx$  tend vers 0 quand  $t \rightarrow -\infty$

### Exemple :

Dans une population de **canards colverts**, lors d'une alerte, l'ensemble des individus quittent leur lieu de repos. Ainsi à  $t = 0$ , la surface de l'étang est déserte et la probabilité qu'un canard regagne l'étang entre les temps  $t_1$  et  $t_2$  (en minutes) est donnée par :

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \text{ avec } f(t) = 2e^{-t} - 2e^{-2t} \text{ qui représente la fonction } \mathbf{\text{densité de probabilité}}.$$

La primitive de  $f(t)$ ,  $F_T(t)$ , **fonction de répartition** est de la forme :



L'évolution de la recolonisation de l'étang par les *canards colverts* en fonction du temps est donnée par la **courbe rouge**. On observe ainsi que plus de 50 % des canards se posent sur l'étang au cours des 2 premières minutes qui suivent l'alerte. Au bout de 7 minutes, tous les canards ont regagné l'étang. La distribution des probabilités cumulées est donnée sur la **courbe verte**.

## 4. Espérance et Variance

Une loi de probabilité peut être caractérisée par certaines valeurs typiques correspondant aux notions de **valeur centrale**, de **dispersion** et de **forme de distribution**.

### 4.1. Espérance mathématique

L'**espérance** d'une variable aléatoire  $E(X)$  correspond à la moyenne des valeurs possibles de  $X$  pondérées par les probabilités associées à ces valeurs. C'est un paramètre de position qui correspond au **moment** d'ordre 1 de la variable aléatoire  $X$ . C'est l'équivalent de la **moyenne**

arithmétique  $\bar{X}$ . En effet lorsque le nombre d'épreuves  $n$  est grand,  $\bar{X}$  tend vers  $E(X)$  (voir estimation).

#### 4.1.1. Variables aléatoires discrètes

Si  $X$  est une **variable aléatoire discrète** définie sur un univers probabilisé  $\Omega$ , on appelle espérance de  $X$ , le réel défini par : 
$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$$

**Remarque :** Si  $X(\Omega)$  est infini, on n'est pas sûr que l'espérance existe. L'espérance mathématique est également notée  $\mu(X)$ ,  $\mu_x$  ou encore  $\mu$  si aucune confusion n'est à craindre.

Nous pouvons donner une autre définition de l'espérance d'une **variable aléatoire discrète**  $X$  si à  $\omega \in \Omega$ , on associe l'image  $x$  telle que  $X(\omega) = x$ .

*Théorème :*

Si  $X$  est une **variable aléatoire discrète** de loi de probabilité  $(x_i, p_i)_i$  définie sur un nombre fini ( $n$ ) d'évènements élémentaires alors :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

#### Exemples :

Si l'on reprend l'exemple d'une fratrie de deux enfants, l'espérance de la variable aléatoire « nombre de filles » est :

$$E(X) = 0 * 1/4 + 1 * 1/2 + 2 * 1/4 = 1 \text{ d'où } E(X) = 1$$

Si l'on observe un nombre suffisant de fratries de 2 enfants, on attend **en moyenne une fille** par fratrie.

#### 4.1.2. Variables aléatoires continues

Si  $X$  est une **variable aléatoire absolument continue** de densité  $f$ , on appelle **espérance** de  $X$ , le réel  $E(X)$ , défini par : 
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$
 si cette intégrale est convergente.

### Exemple :

Si on reprend l'exemple de la recolonisation de l'étang par les canards colverts, la durée moyenne pour la recolonisation est :

$$E(T) = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} t(2e^{-t} - 2e^{-2t}) dt = 3/2$$

Sous ce modèle, la **durée moyenne de recolonisation** pour l'ensemble de la population de canards colverts est de **1,5 minutes**.

**Remarque :** Dans cet exemple, la variable étudiée  $t$  ne peut prendre que des valeurs dans  $[0, +\infty[$

### 4.1.3. Propriétés de l'espérance

Les propriétés de **l'espérance** valent aussi bien pour une variable aléatoire discrète ou une variable aléatoire absolument continue.

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires définies sur un même univers  $\Omega$ , admettant une espérance, alors :

(P<sub>1</sub>)  $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

(P<sub>2</sub>)  $E(aX) = aE(X) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(P<sub>3</sub>) Si  $X \geq 0$  alors  $E(X) \geq 0$

(P<sub>4</sub>) Si  $X$  est un caractère constant tel que :  $\forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) = k$  alors  $E(X) = k$

**Remarque :** Dans le cas continu,  $E(X+Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x+y) f(x,y) dx dy$ . La propriété P<sub>1</sub> est vérifiée quelques soient les relations de dépendance ou d'indépendance statistique entre les deux variables.

#### Voici pourquoi :

Nous démontrerons les propriétés dans le cas de deux variables aléatoires discrètes avec  $p_i$ , la probabilité de réalisation de  $\{X = x_i\}$  et  $\{Y = y_i\}$  et  $n$  événements élémentaires.

$$(P_1) \quad E(X + Y) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) p_i = \sum_{i=1}^n x_i p_i + \sum_{i=1}^n y_i p_i = E(X) + E(Y)$$

$$(P_2) \quad E(aX) = \sum_{i=1}^n (ax_i) p_i = a \sum_{i=1}^n x_i p_i = aE(X)$$

(P<sub>3</sub>)  $X \geq 0$  implique que  $\forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) \geq 0$  et comme une probabilité est toujours positive,  $E(X) \geq 0$ .

$$(P_4) \quad E(X) = \sum_{i=1}^n k p_i = k \sum_{i=1}^n p_i = k \quad \text{car par définition} \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Nous verrons les applications directes de ces propriétés dans le cadre des opérations sur les variables aléatoires.

## 4.2. Variance

La **variance** d'une variable aléatoire  $V(X)$  est l'espérance mathématique du carré de l'écart à l'espérance mathématique. C'est un paramètre de dispersion qui correspond au **moment centré** d'ordre 2 de la variable aléatoire  $X$ . C'est l'équivalent de la **variance observée**  $S^2$ . En effet lorsque le nombre d'épreuves  $n$  est grand,  $S^2$  tend vers  $V(X)$  (voir **estimation**).

Si  $X$  est une variable aléatoire ayant une espérance  $E(X)$ , on appelle **variance** de  $X$  le réel :

$$V(X) = E([X - E(X)]^2)$$

Autre notation :  $V(X) = E([X - E(X)]^2)$

$$V(X) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2)$$

$$V(X) = E(X^2) - 2E[XE(X)] + E[E(X)^2]$$

$$V(X) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Propriétés P<sub>1</sub> de l'**espérance**

Propriétés P<sub>4</sub> de l'**espérance**

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

**Remarque :** Si  $X(\Omega)$  est infini, il n'est nullement évident que  $V(X)$  existe. De plus comme  $[X - E(X)]^2 \geq 0$  nécessairement  $V(X) \geq 0$ . Par définition, une **variance est toujours positive**. La variance est également notée  $\sigma^2$  si aucune confusion n'est à craindre.

Si  $X$  est une variable aléatoire ayant une variance  $V(X)$ , on appelle **écart-type** de  $X$ ,

le réel :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

**Remarque :** L'écart-type permet de disposer d'un paramètre de dispersion qui s'exprime dans les **mêmes unités** que la variable aléatoire elle-même. Le terme « écart-type » se traduit en anglais par le faux-ami « standard deviation ».

### 4.2.1. Variables aléatoires discrètes

Si  $X$  est une variable aléatoire **discrète** de loi de probabilité  $(x_i, p_i)_i$  définie sur un nombre fini ( $n$ ) d'évènements élémentaires alors la variance est égale à :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - E(X)^2$$

### Exemple :

Si l'on reprend l'exemple d'une fratrie de deux enfants, la variance de la variable aléatoire « nombre de filles » est :

$$V(X) = 1/4 (0-1)^2 + 1/2 (1-1)^2 + 1/4 (2-1)^2 = 1/2$$

$$V(X) = \mathbf{1/2} \text{ et } \sigma(X) = \mathbf{0,7}$$

#### 4.2.2. Variables aléatoires continues

Si  $X$  est une variable aléatoire **continue** donnée par sa densité de probabilité alors la variance de  $X$  est le nombre réel positif tel que :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - E(X)^2$$

### Exemple :

Dans le cadre de la recolonisation de l'étang par la population de canard colvert, la variance de la loi de probabilité est :

$$V(T) = \int_0^{+\infty} (t - E(T))^2 f(t) dt = \mathbf{5/4} \text{ avec } \sigma = \mathbf{1,12}$$

#### 4.2.3. Propriétés de la variance

Si  $X$  est une variable aléatoire admettant une variance alors :

$$(P_1) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad V(aX) = a^2 V(X)$$

$$(P_2) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}, \quad V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$(P_3) \quad V(X) = 0 \Leftrightarrow X = E(X)$$

Il est possible d'exprimer la variance en fonction du moment d'ordre 1 ( $m_1$ ) et du moment d'ordre 2 ( $m_2$ ). La variance correspond au moment centré d'ordre 2.

$$V(X) = E([X - E(X)]^2) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$\text{d'où } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = m_2 - m_1^2$$

## 5. Couples de variables aléatoires

### 5.1. Loi jointe

Les définitions portant sur **la loi jointe** entre deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  impliquent que ces dernières soient définies sur **le même espace fondamental**  $\Omega$ . Si  $X$  et  $Y$  sont définies

respectivement sur les espaces fondamentaux  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , alors il faut envisager un espace qui englobe  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  appelé « **espace-produit** ».

Il suffit alors de connaître la **loi jointe** des deux variables aléatoires ou **loi de probabilité du couple**  $(X,Y)$ , la fonction définie par :

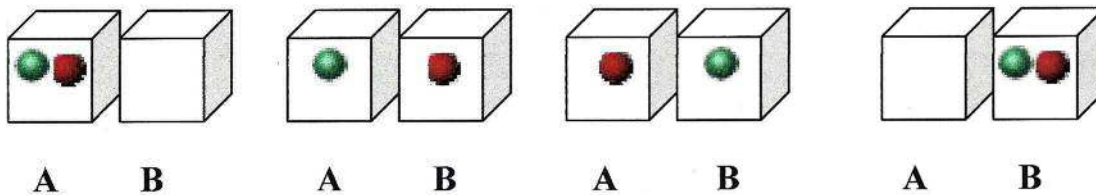
$$x,y \rightarrow p_{xy} = P((X=x) \text{ et } (Y=y)) \quad \text{dans le cas } \mathbf{discret}$$

Dans le cas **continu**,  $p_{xy} = P((x_a < X < x_b) \text{ et } (y_c < Y < y_d))$  permet de définir la probabilité pour que  $(X,Y)$  soit dans un rectangle.

**Remarque** : Ceci peut être généralisé à un nombre quelconque de variables aléatoires.

**Exemple :**

On place au hasard deux billes rouge et verte dans deux boîtes A et B. On note  $X$ , la variable aléatoire « nombre de billes dans la boîte A » et  $Y$ , la variable aléatoire « nombre de boîtes vides ».



Les **distributions de probabilités** associées à chacune des variables  $X$  et  $Y$  ainsi que celle de la **loi jointe** sont indiquées ci-dessous. Pour chaque loi, la valeur de l'espérance et de la variance est également indiquée.

**Variable  $X$  :**  $X(\Omega) = \{0,1,2\}$   
 $E(X) = 1$   $V(X) = 1/2$

$x_i$	0	1	2
$p_i$	1/4	1/2	1/4

**Variable  $Y$  :**  $Y(\Omega) = \{0,1\}$   
 $E(Y) = 1/2$   $V(Y) = 1/4$

$y_j$	0	1
$q_j$	1/2	1/2

**Variable  $XY$  :**  $XY(\Omega) = \{0,1,2\}$   
 $E(XY) = 1/2$   $V(XY) = 3/4$

$x_i y_j$	0	1	2
$\rho_{ij}$	3/4	0	1/4



## 5.2. Indépendance entre variables aléatoires

Les propriétés concernant l'indépendance statistique entre deux variables aléatoires s'appliquent aussi bien aux variables aléatoires discrètes ou absolument continues.

*Théorème :*

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même univers  $\Omega$  alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

**Remarque :** L'application réciproque n'est pas vraie. La relation  $E(XY) = E(X)E(Y)$  n'implique pas forcément l'indépendance de deux variables aléatoires.

**Exemple :**

Dans l'exemple concernant la répartition des deux billes dans les 2 boîtes, la relation  $E(XY) = E(X)E(Y)$  est vérifiée car :  $E(X) = 1$  ;  $E(Y) = 1/2$  et  $E(XY) = 1/2$  cependant les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  **ne sont pas indépendantes**.

En effet  $\rho_{00} = P((X=0) \cap (Y=0)) = 0$  car il est impossible d'avoir à la fois aucune bille dans la boîte A et aucune boîte vide. Or on attend si  $X$  et  $Y$  sont deux variables statistiquement indépendantes, à ce que

$$P((X=0) \cap (Y=0)) = P(X=0)P(Y=0) = 1/4 * 1/2 = \mathbf{1/8 \neq 0}$$

*Théorème :*

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même univers  $\Omega$  alors  $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

**Remarque :** L'application réciproque n'est pas vraie. La relation  $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$  n'implique pas forcément l'indépendance de deux variables.

**Exemple :**

Si l'on reprend l'exemple de la répartition de deux billes dans deux boîtes, la distribution de probabilité de la variable aléatoire  $(X+Y)$  est :

**Variable  $X+Y$ :**  $X+Y(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

$$E(X+Y)=3/2$$

$$V(X+Y)=3/4$$

$x_i + y_j$	0	1	2	3
$\rho_{ij}$	0	3/4	0	1/4

Comme  $V(X) = 1/2$  et  $V(Y) = 1/4$  alors  $V(X) + V(Y) = 3/4 = V(X+Y)$

On retrouve ainsi la relation  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$  bien que  $X$  et  $Y$  **ne soient pas indépendantes**

### 5.3. Covariance et Corrélation

Lorsque l'on considère deux variables aléatoires simultanément, il faut définir un indicateur de leur « **liaison** » qui complète les paramètres qui les caractérisent chacune séparément (espérance mathématique et variance).

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires définies sur le même univers  $\Omega$ , on appelle **covariance** de ces deux variables, le réel :

$$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

et **coefficient de corrélation**, le réel :

$$R(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Il résulte de cette définition, le théorème suivant :

*Théorème :*

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires définies sur le même univers  $\Omega$  et **indépendantes**, alors :  $\text{cov}(X,Y) = 0$

Les propriétés de la **covariance** sont les suivantes :

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires définies sur un même univers  $\Omega$ , alors :

$$(P_1) \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R} \quad V(aX + bY) = a^2V(X) + 2abcov(X,Y) + b^2V(Y) \}$$

$$(P_2) \quad [\text{cov}(X,Y)]^2 \leq V(X) V(Y)$$
$$|\text{cov}(X,Y)| \leq \sigma(X) \sigma(Y)$$

$$(P_3) \quad -1 \leq R(X,Y) \leq 1$$

**Remarque :** Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes,  $\rho=0$  mais la réciproque est fautive. Il peut arriver, par hasard, que  $\rho=0$  sans que  $X$  et  $Y$  soient indépendantes.

#### 5.4. Opérations sur les variables aléatoires

Il arrive souvent que l'on effectue **des transformations** sur les variables aléatoires par commodité de calcul et il est important de savoir comment se comportent les paramètres associés à cette variable.

Nous avons résumé dans le tableau ci-dessous quelques transformations possibles avec  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

Translation de l'origine seule $X \rightarrow X + b$	Changement d'unités seul $X \rightarrow aX$	Cas général $X \rightarrow aX + b$
$E(X + b) = E(X) + b$ $V(X + b) = V(X)$	$E(aX) = aE(X)$ $V(aX) = a^2 V(X)$	$E(aX + b) = aE(X) + b$ $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Il existe d'autres transformations de variables aléatoires qui conduisent à des valeurs de paramètres particulières.

Une variable aléatoire  $X$  est dite **centrée** si  $E(X) = 0$ .

**Exemple :**

La variable  $Y = X - E(X)$  est une **variable aléatoire centrée** car

$$E(Y) = E[X - E(X)] = E(X) - E(E(X))$$

or  $E(E(X)) = E(X)$  voir **propriétés** P<sub>4</sub> de l'espérance

ainsi  $E(Y) = E(X) - E(X) = 0$

Une variable aléatoire admettant une variance est dite **réduite** si  $V(X) = 1$ .

**Exemple :**

La variable  $Y = \frac{X}{\sqrt{V(X)}}$  est une **variable aléatoire réduite** car

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E\left[\left(\frac{X}{\sqrt{V(X)}}\right)^2\right] - \left[E\left(\frac{X}{\sqrt{V(X)}}\right)\right]^2$$

$$V(Y) = \frac{1}{V(X)} E(X^2) - \left[\frac{1}{\sqrt{V(X)}} E(X)\right]^2 \text{ voir } \underline{\text{propriétés P}_2} \text{ de l'espérance}$$

$$V(Y) = \frac{1}{V(X)} [E(X^2) - E(X)^2] \quad \text{d'où } V(Y) = \frac{V(X)}{V(X)} = 1$$

A toute variable aléatoire  $X$  d'espérance  $E(X)$  et de variance  $V(X)$  on peut associer la variable aléatoire  $\frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$  dite variable aléatoire centrée réduite et dont l'emploi est indispensable pour utiliser la plupart des tables notamment les tables de la loi normale réduite.

## 5.5. Généralisation à $n$ variables aléatoires

Si l'on considère une épreuve à laquelle est associée un espace fondamental  $\Omega$  et une variable aléatoire  $X$  et si l'on répète  $n$  fois, de façon indépendante cette épreuve, on obtient une suite  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aléatoires qui sont :

- définies sur le même espace fondamental
- de même loi de probabilité
- indépendantes

alors :  $E(X_1 + X_2 + \dots + X_i + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$  (Propriété  $P_1$  de l'espérance que les v.a. soient indépendantes ou non )

$V(X_1 + X_2 + \dots + X_i + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$  (Propriété de la variance dans le cas d'indépendance des v.a.)