Examen d'ad
mission à la classe 1M (a. s. 2013-14)
Épreuve de mathématiques

Durée de l'épreuve : 3 périodes

Corrigé

Nom : ____________________

Prénom : ____________________

Indications

- ✓ La calculatrice n'est pas autorisée.
- ✓ Durant l'épreuve aucun matériel ne circule entre les élèves.
- ✓ Les détails des calculs sont rédigés proprement et à l'encre dans les zones libres des pages en regard de la donnée.
- ✓ Des feuilles de brouillon sont à disposition, elles seront récoltées mais ne sont pas corrigées.
- ✓ Il sera tenu compte, dans la correction de l'épreuve, de la clarté et de la rigueur des développements.

EXERCICE 1

Calculez la valeur des expressions suivantes. Si le résultat est une fraction, réduisez-la au maximum :

1) $10-4+\underbrace{(3-10)}_{-7}-\underbrace{(-11-2)}_{-13} = 10-4-7+13 = 12.$

2) $\underbrace{-2\cdot(-3)}_{6}+\underbrace{\underbrace{(-6):3}_{-2}\cdot 2}_{-4} = 6-4 = 2$

3) $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}-\frac{1}{8}-\frac{9}{2} = \frac{6}{8}+\frac{10}{8}-\frac{1}{8}-\frac{36}{8} = -\frac{21}{8}$

4) $\underbrace{\frac{3}{4}:\frac{4}{5}}\cdot\frac{20}{35}+\frac{9}{14} = \frac{15}{28}+\frac{9}{14} = \frac{15}{28}+\frac{18}{28} = \frac{33}{28}$

$\underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}}=\frac{15}{16}$

$\frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{16}_{4}}\cdot\frac{\cancel{20}^{5}}{\cancel{35}_{7}} = \frac{15}{28}$

EXERCICE 2

a) Réduisez au maximum les expressions suivantes :

1. $x^2 + 2x + 2x^2 - 4x + 2 =$ $3x^2 - 2x + 2$

2. $(a + 5) - (3 + 2a) + 2(2 - 3a) =$ $a + 5 - 3 - 2a + 4 - 6a = -7a + 6$

3. $\underbrace{(2x - 1)^2}_{4x^2 - 4x + 1} - \underbrace{(x + 2)(x - 2)}_{x^2 - 4} =$ $4x^2 - 4x + 1 - x^2 + 4 = 3x^2 - 4x + 5$

(identités remarquables)

4. [illegible] $= \dfrac{9}{3}$

5. $\dfrac{f^{\cancel{?}\,4}(4+w)}{5\cancel{f}(4w)} =$ $\dfrac{f^4(4+w)}{20w}$

6. $\dfrac{x^7y^4z^2}{(x^2yz^4)^2} : \dfrac{(x^2y^3z^4)^3}{x^8y^4z^5} =$ $\dfrac{x^7y^4z^2}{x^4y^2z^8} : \dfrac{x^6y^9z^{12}}{x^8y^4z^5} = \dfrac{x^3y^2}{z^6} : \dfrac{y^5z^7}{x^2} = \dfrac{x^3y^2}{z^6} \cdot \dfrac{x^2}{y^5z^7} = \dfrac{x^5}{y^3z^{13}}$

b) Complétez :

$\cdot 3$ $\quad \cdot 17b^5$

1. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{3a}{3b} = \dfrac{a^2}{ab} = \dfrac{17ab^5}{17b^6}$

$\cdot a$

2. $\dfrac{3x-1}{4} = \dfrac{-18x^4 + 6x^3}{-24x^4} = \dfrac{15x^5 - 5x^4}{20x^4} = \dfrac{(3x-1)(x-2)}{4x-8} = \dfrac{3x^2 - 7x + 2}{4x - 8}$

$\cdot (-6x^3)$

$\cdot 5x^4$

$\cdot (x-2)$

EXERCICE 3

a) Résolvez les équations suivantes :

1. $6x - 5 = 4x + 5$

$2x - 5 = 5$

$2x = 10$

$x = 5$

$-4x$

$+5$

$: 2$

2. $8x - 3 + (-4x + 1) = 4x - 2$

$8x - 3 - 4x + 1 = 4x - 2$

$4x - 2 = 4x - 2$

$-2 = -2$ toujours vrai

$\Rightarrow$ tous les nombres sont solutions

parenthèses

réduction

$-4x$

3. $13x + 10 - 3(4x + 10) = x + 20$

$13x + 10 - 12x - 30 = x + 20$

$x - 20 = x + 20$

$-20 = 20$ impossible

$\Rightarrow$ aucune solution

distributivité

réduction

$-x$

4. $\frac{1}{2}x + 5 - 3x = \frac{3}{5}x + \frac{1}{7} - x$ | dénominateur commun = 70

$\frac{35x}{70} + \frac{350}{70} - \frac{210x}{70} = \frac{42x}{70} + \frac{10}{70} - \frac{70x}{70}$ | $\cdot 70$

$35x + 350 - 210x = 42x + 10 - 70x$ | réduction

$-175x + 350 = -28x + 10$ | $+28x$

$-147x + 350 = 10$ | -350

$-147x = -340$ | $:(-147)$

$x = \frac{340}{147}$

b) Résolvez l'équation suivante par rapport à la variable « d » (exprimez « d » en fonction des autres lettres)

$$r = \frac{dt}{at+b} \qquad \Big| \cdot (at+b)$$

$$r \cdot (at+b) = dt \qquad \Big| : t$$

$$\frac{r(at+b)}{t} = d$$

c) Résolvez le système suivant : $\begin{cases} 7x - y = -37 \\ x - 3y = -31 \end{cases}$

$$\begin{aligned} 7x - y &= -37 \xrightarrow{\cdot 3} & 21x - 3y &= -111 \\ x - 3y &= -31 \xrightarrow{\cdot(-1)} & -x + 3y &= 31 \end{aligned}$$

$$20x = -80 \qquad \Big| : 20$$
$$x = -4$$

avec $x = -4$ dans $7x - y = -37$: $-28 - y = -37$ | $+28$

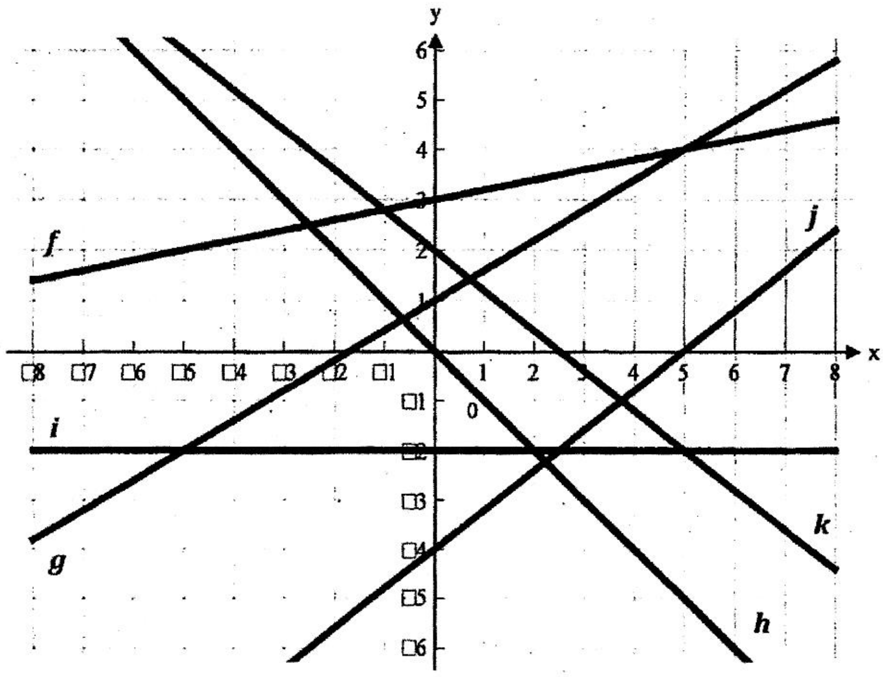
$-y = -9$ | $\cdot(-1)$

$y = 9$

$\Rightarrow$ solution : $x = -4$ et $y = 9$.

EXERCICE 4

Déterminez graphiquement la pente, l'ordonnée à l'origine et donnez l'expression algébrique des droites suivantes (complétez le tableau):



Nom de la droite	pente	ordonnée à l'origine	Expression algébrique (équation de la droite)
f	$\frac{1}{5}$	3	$y=\frac{1}{5}x+3$
g	$\frac{1}{2}$	1	$y=\frac{1}{2}x+1$
h	-1	0	$y=-x$
i	0	-2	$y=-2$
j	$\frac{4}{5}$	-4	$y=\frac{4}{5}x-4$
k	$-\frac{4}{5}$	2	$y=-\frac{4}{5}x+2$

EXERCICE 5

Les questions ci-dessous sont indépendantes les unes des autres.

a) Dans un magasin, on lit sur un panneau publicitaire : « Réduction de 40% sur les prix des articles déjà baissés ». Un article porte l'étiquette « 30% de rabais ». Quelle est (en pourcent) la baisse globale accordée sur ce produit ?

Prix de départ : 100%

Rabais de 30% sur le prix de départ $\Rightarrow$ prix = 70%

Rabais de 40% sur le prix baissé $\Rightarrow$ prix = 60% de 70% =

$= 0,6 \cdot 70\% = 42\%$.

Rabais global $= 100\% - 42\% = 68\%$.

b) Imaginons un canton ayant une dette de 100 millions en 2006. On nous dit qu'il y a eu un déficit de 15 millions en 2007. La dette a de ce fait augmenté de 15% en 2007. L'année suivante les politiciens se réjouissent. Comme la dette n'a augmenté que de 14% en 2008, ils pensent avoir diminué le déficit. Cette joie des politiciens est-elle justifiée ?

Déficit en 2007 : 15 millions.

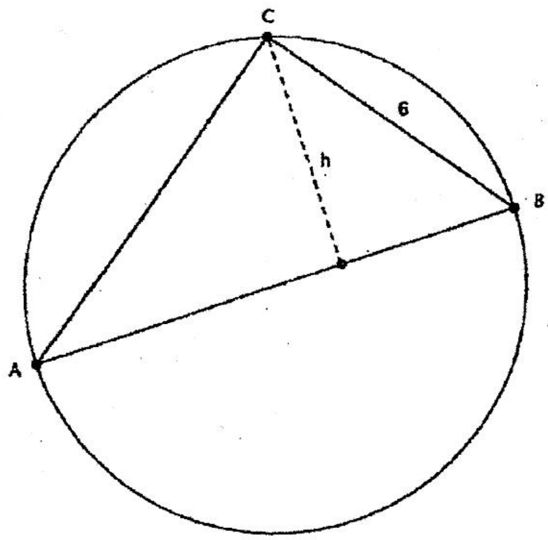
Déficit en 2008 : 14% de 115 millions (100 millions + les 15 millions de 2007) $= 0,14 \cdot 115 = 16,1$ millions.

Le déficit a augmenté !

La joie des politiciens n'est pas justifiée.

EXERCICE 6

a) On considère un cercle de rayon 5 et un triangle inscrit dans ce cercle. On sait que le côté AB est un diamètre du cercle et que le côté BC est de longueur 6. Calculez :
   1. la longueur du côté AC ;
   2. l'aire du triangle ABC ;
   3. la longueur de la hauteur h issue de C.

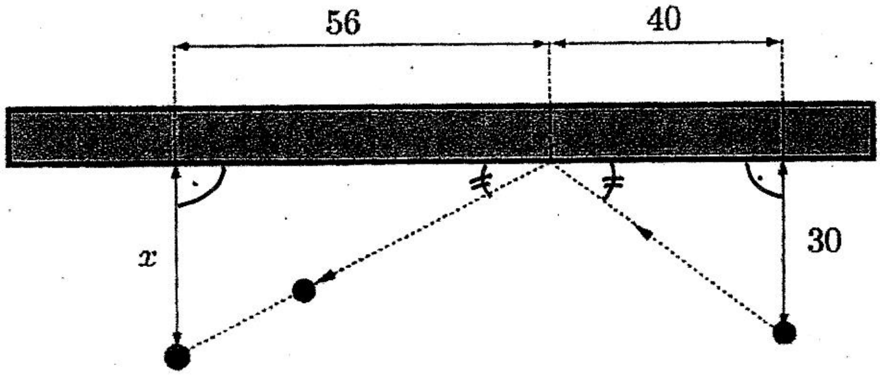


1. On a AB = diamètre du cercle = $2 \cdot$ rayon = $2 \cdot 5 = 10$.
   Comme AB est un diamètre du cercle, par le cercle de Thalès, on a $\widehat{ACB} = 90°$.
   Par le théorème de Pythagore, on a alors $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 10^2 - 6^2 =$
   $= 100 - 36 = 64$, d'où $AC = \sqrt{64} = 8$.

2. Aire $ABC = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$.

3. On a aussi aire $ABC = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{10 \cdot h}{2} = 5h$.
   Les 2 résultats doivent être égaux : $5h = 24 \Rightarrow h = 4{,}8$.

b) Une boule de billard suit la trajectoire décrite ci-dessous. Les deux angles formés par la trajectoire et le bord de la bande percutée sont égaux. Calculez la distance x (les longueurs sont exprimées en cm).



On a 2 triangles rectangles semblables (ils ont des angles égaux).
Pour passer de celui de droite à celui de gauche, on multiplie par
$\frac{56}{40} = \frac{28}{20} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$.

Ainsi, $x = \frac{7}{5} \cdot 30 = 7 \cdot 6 = 42$ cm.