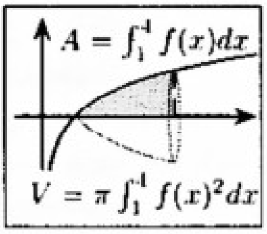
Exponentielles et logarithmes



Les logarithmes ont été découverts par Neper (1550-1617) alors qu'il cherchait à simplifier les calculs trigonométriques nécessaires à l'astronomie. Le lien avec les fonctions exponentielles a été établi plus tard, après le travail de Leibniz (1646-1716) qui s'est disputé la paternité du calcul intégral avec Newton (1642-1727).

7.1. Exponentielles

Une *fonction exponentielle* est définie par

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow]0;\infty[, \ x \longmapsto a^x$$

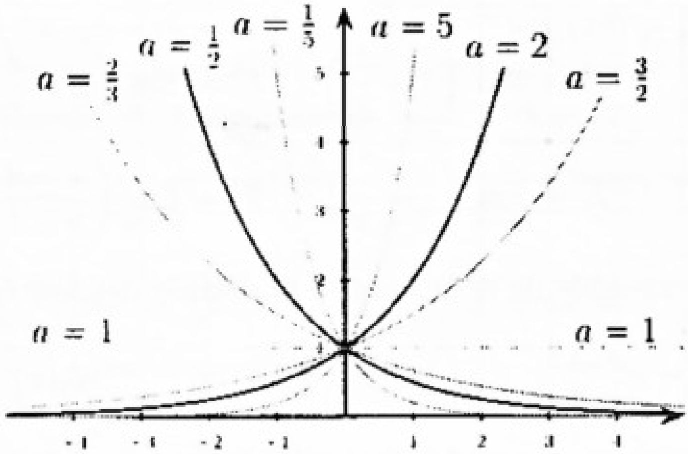
où a est un nombre strictement positif appelé *base* (on exclut $a \leqslant 0$ car a^x ne serait alors pas définie pour de nombreuses valeurs de x). On connaît déjà les propriétés suivantes :

exposants entiers positifs : $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ facteurs}}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$			
$a^0 = 1$	$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$	$a^{x-y} = a^x / a^y$	$a^{x \cdot y} = (a^x)^y$
exposants rationnels : $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ est le nombre positif dont la n-ième puissance vaut a^m			

Lorsque $x \notin \mathbb{Q}$, on définit $\exp_a(x) = a^x$ de la manière suivante : on considère une suite de nombres rationnels $x_1, x_2, x_3, \ldots$ qui s'approchent de plus en plus de x et on pose $a^x = \lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n}$. Par exemple, le nombre 2^π peut être défini comme la limite de la suite

$$2^3, \quad 2^{31/10}, \quad 2^{314/100}, \quad 2^{3141/1000}, \quad 2^{31415/10000}, \quad \ldots$$

Ce procédé rend logiquement continues les fonctions $\exp_a$, dont voici certains graphes :



Une fonction exponentielle est croissante lorsque $a > 1$ et décroissante lorsque $0 < a < 1$. Les graphes des fonctions $\exp_a$ et $\exp_{1/a}$ sont symétriques par rapport à l'axe des y.

Exercice 1 : *a)* Trouver sans calculatrice les valeurs suivantes :

$$\exp_{11}(2)\ ,\quad \exp_3(3)\ ,\quad \exp_{0.5}(-1)\ ,\quad \exp_2(-2)\ ,\quad \exp_{81}(0.5)\ ,\quad \exp_{1000}(-1/3)$$

b) Combien de décimales de $\sqrt{2}$ faut-il considérer pour estimer $3^{\sqrt{2}}$ avec une erreur inférieure à 0.00001 ?

Exercice 2 : Mettre sous la forme $a^{m/n}$ les expressions suivantes :

$$A = (a^3)^{-1}(a^{-5})^2 a^6 \qquad B = \frac{(a^2)^3}{a^2 a^3} \qquad C = \frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[2]{a^3}}{a}$$

$$D = \frac{a^2\cdot\sqrt[4]{a}}{a^5\cdot\sqrt{a}} \qquad E = \left(\frac{(a^3)^2}{\sqrt[4]{a^5\cdot a^2}}\right)^2 \qquad F = \frac{\sqrt[4]{a^7}}{\sqrt[7]{a^4}}\sqrt{\frac{a^3}{\sqrt[3]{a}}}$$

La dérivée d'une fonction $\exp_a$ en un point $x \in \mathbb{R}$ est par définition

$$\exp_a'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \exp_a(x)\cdot\exp_a'(0)$$

Le nombre $\exp_a'(0)$ ne dépend que de a : par exemple, on peut estimer $\exp_2'(0) \cong 0.7$ et $\exp_3'(0) \cong 1.1$. Par soucis de simplification, on veut trouver la valeur de a pour laquelle $\exp_a'(0) = 1$. Ainsi, pour Δx très proche de zéro, on aimerait avoir

$$\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} \approx 1 \iff a^{\Delta x} \approx \Delta x + 1 \iff a \approx (1+\Delta x)^{1/\Delta x}$$

On est alors amené à considérer $a = \lim_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x)^{1/\Delta x} = \lim_{z\to\pm\infty}(1+\frac{1}{z})^z$; il s'agit du *nombre d'Euler* (1707-1783).

$e = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cong 2.718281828459 \quad (\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$	$(e^x)' = e^x$

La fonction $\exp(x) = e^x$ est la plus facile à dériver puisque $\exp'(x) = \exp(x)$.

Exercice 3 : Calculer les limites suivantes :

$$A = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5} \quad B = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x} \quad C = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$$

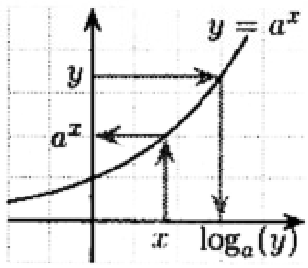
$$D = \lim_{x\to 0}(1-4x)^{1/x} \quad E = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x \quad F = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x-1}\right)^{x+1}$$

Exercice 4 : Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^{5x} \qquad f_2(x) = e^{x^2+3} \qquad f_3(x) = x^2 e^x \qquad f_4(x) = e^{\sin(x)}$$

$$f_5(x) = e^{2/x} \qquad f_6(x) = \frac{e^{3x}}{x^2} \qquad f_7(x) = e^{-x}\cos(x) \qquad f_8(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x-1}}$$

7.2. Logarithmes



La fonction $\exp_1$ est constante mais pour une base $a \neq 1$, l'exponentielle $\exp_a : \mathbb{R} \to]0; \infty[$ est bijective. Cela signifie que pour tout $y > 0$, il existe un unique nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que $a^x = y$. Ce nombre est noté $\log_a(y)$ et est appelé le *logarithme de y en base a*. C'est la puissance à laquelle il faut élever a pour obtenir y.

Exercice 5 : Calculer mentalement (par convention, on note "log" au lieu de "$\log_{10}$")

$\log_5(1)$	$\log(1000)$	$\log(0.0001)$	$\log_2(8)$	$\log_2(64)$
$\log_2(1024)$	$\log_3\left(\frac{1}{3^{17}}\right)$	$\log_9(729)$	$\log_3(729)$	$\log_3(\sqrt[4]{27})$

Lorsque la base du logarithme est égale au nombre d'Euler, on écrit $\ln(x)$ (au lieu de $\log_e(x)$), et on parle de logarithme *naturel* ou *népérien* (de John Neper (1550-1617)).

Pour un nombre $a \neq 1$ strictement positif, on peut ainsi définir une fonction

$$\log_a :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \ x \longmapsto \log_a(x)$$

dont les propriétés découlent de celles des exponentielles :

$\log_a(x)$ est la puissance à laquelle il faut élever a pour obtenir x $a^{\log_a(x)} = x$ et $\log_a(a^y) = y$	
$\exp_a(0) = 1$	$\log_a(1) = 0$
$\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$	$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$\exp_a(x - y) = \dfrac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}$	$\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
$\exp_a(x \cdot y) = \exp_a(x)^y$	$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$
Formule de changement de base : $\log_a(x) = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$	

Preuves

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)}) = \log_a(a^{\log_a(x)+\log_a(y)}) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a\left(\dfrac{a^{\log_a(x)}}{a^{\log_a(y)}}\right) = \log_a(a^{\log_a(x)-\log_a(y)}) = \log_a(x) - \log_a(y)$
3. $\log_a(x^y) = \log_a\left((a^{\log_a(x)})^y\right) = \log_a\left(a^{\log_a(x)\cdot y}\right) = \log_a\left(a^{y \log_a(x)}\right) = y \log_a(x)$
4. $\log_b(x) = \log_b(a^{\log_a(x)}) \overset{3.}{=} \log_a(x) \log_b(a)$, donc $\log_a(x) = \log_b(x) / \log_b(a)$.

Exercice 6 : Donner une approximation à trois décimales des nombres suivants.

$$A = \log_5(6) \qquad B = \log_2(20) \qquad C = \log_7(0,2) \qquad D = \log_\pi(10) \qquad E = \log_{17}(1245)$$

Exercice 7 : Ecrire les expressions suivantes sous la forme $a\ln(x) + b\ln(y)$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$.

$$A = \ln(x^2y^3) \qquad B = \ln(xy^2\sqrt{y}) \qquad C = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^3y^2}}\right) \qquad D = \ln\left(\frac{x^7y^4}{\sqrt[3]{x^2}\ \sqrt[3]{y}}\right)$$

Exercice 8 : Ecrire les expressions suivantes à l'aide d'un seul logarithme.

$$A = 5\ln(x) - \ln(5x) - \tfrac{1}{2}\ln(x^4) \qquad B = \ln(y^3) + \tfrac{1}{3}\ln(x^3y^6) - 5\ln(y)$$

$$C = 2\ln(y^3/x) - 3\ln(y) + \tfrac{1}{2}\ln(x^4y^2) \qquad D = \ln(x^3y^2) - 2\ln(x\sqrt{y}) - 3\ln(x/y)$$

$$E = 2\ln(x) - 4\ln(1/y) - 3\ln(xy) \qquad F = \log_2(3)\log_3(4)\log_4(5)$$

Exercice 9 : Déterminer le nombre de chiffres et les quatre premiers chiffres de

$A = 7^{1234}$ $\qquad B = 13^{1746}$ $\qquad C = 2^{6972593} - 1$ (nombre premier découvert en 1999)

Exercice 10 : Résoudre les équations suivantes

a) $7^{2x+3} = 7^{x^2}$ *b)* $3^{5x-8} = 9^{x+2}$ *c)* $(0.5)^{6-x} = 2^3$ *d)* $\log_x(64) = 3$

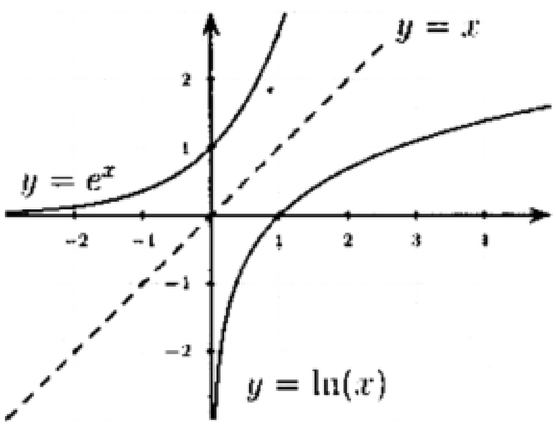
e) $\log_x(1) = 0$ *f)* $\log_4(x) = -3$ *g)* $\ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln(96)$

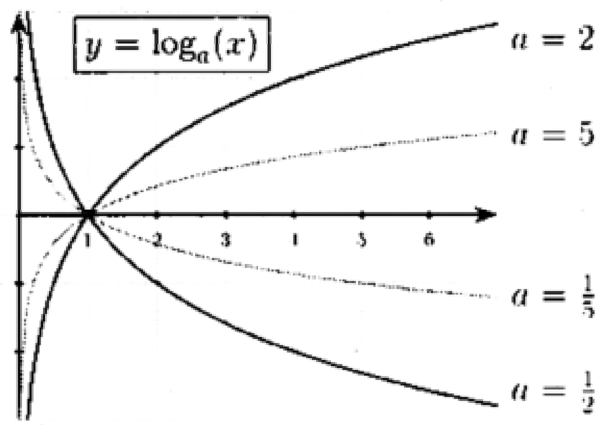
h) $\log(8x-6) - \log(x-4) = 1$ *i)* $\log(3x+1) = 3$ *j)* $2^x3^{2x} = 100$

k) $\log|3x-4| = 2\log(3)$ *l)* $e^{2x} + e^x - 6 = 0$ *m)* $8e^x + e^{-x} = 6$

n) $\ln|x+4| + \ln(3) = \ln|x-2|$ *o)* $(\ln x)^2 - 2\ln(x) = 3$

La fonction $\log_a$ est la fonction réciproque de $\exp_a$. Son graphe est donc obtenu à partir de celui de $\exp_a$ par une symétrie d'axe $y = x$:





Une fonction logarithmique est croissante lorsque $a > 1$ et décroissante si $0 < a < 1$. Les graphes des fonctions $\log_a$ et $\log_{1/a}$ sont symétriques par rapport à l'axe des x.

En utilisant la règle de dérivation des fonctions composées, nous sommes en mesure de trouver la dérivée de plusieurs types de fonctions :

- logarithme naturel : en dérivant la relation $e^{\ln(x)} = x$, on trouve

$$e^{\ln(x)} \cdot (\ln(x))' = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad x \cdot (\ln(x))' = 1 \quad \text{donc} \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

- logarithme de base a quelconque $(0 < a \neq 1)$:

$$(\log_a(x))' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{(\ln(x))'}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

- exponentielle de base a quelconque $(a > 0)$:

$$(a^x)' = (e^{x\ln(a)})' = e^{x\ln(a)} \cdot (x\ln(a))' = e^{x\ln(a)} \cdot \ln(a) = \ln(a) \cdot a^x$$

- puissance d'exposant r quelconque $(r \in \mathbb{R})$:

$$(x^r)' = (e^{r\ln(x)})' = e^{r\ln(x)} \cdot (r\ln(x))' = e^{r\ln(x)} \cdot \frac{r}{x} = \frac{r}{x} \cdot x^r = rx^{r-1}$$

Résumons les nouvelles dérivées découvertes dans ce chapitre :

$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$	$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	$(\log_a(x))' = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$

...sans oublier la règle $(x^r)' = rx^{r-1}$ qui était déjà connue !

Exercice 11 : Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

$f_1(x) = \ln(x-1)$ $\quad f_2(x) = \ln(3x^5)$ $\quad f_3(x) = x\ln(x) - x$ $\quad f_4(x) = \ln(\sqrt{3-x^2})$

$f_5(x) = \ln|\cos x|$ $\quad f_6(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ $\quad f_7(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$ $\quad f_8(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)$

Exercice 12 : Traiter les problèmes suivants qui nécessitent tous la dérivée.

a) Déterminer la tangente à la courbe $y = (e^{2x} - 3)^3$ en son point d'abscisse nulle.

b) Déterminer les points de la courbe $y = e^{2x} - 8e^x + 9x$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite $d : 3x - y - 21 = 0$.

c) Discuter du nombre de points à tangente horizontale de $f(x) = (x^2+a)e^x$ en fonction de la valeur de a.

d) Déterminer l'angle aigu formé par les courbes $y = 2e^x$ et $y = xe^x$ à leur intersection. Idem pour les courbes $y = \log_2(x)$ et $y = \log_5(x)$.

e) Montrer que, quels que soient les nombres réels a et b, les courbes $y = \sqrt{a-2x}$ et $y = e^{x+b}$ se coupent à angle droit.

7.3. Comportements conflictuels

Nous pouvons établir le tableau comparatif suivant :

Puissances exposant $n \geqslant 1$	Exponentielles base $a > 1$ (si $0 < a < 1$, les limites ci-dessous sont inversées)	Logarithmes base $a > 1$
$\lim\limits_{x \to \infty} x^n = \infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \pm\infty$	$\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x \to \infty} \log_a(x) = \infty$ $\lim\limits_{x \to 0} \log_a(x) = -\infty$

Polynômes : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (a_n x^n)$

En cas de limite indéterminée faisant intervenir directement de telles fonctions, on peut considérer les priorités suivantes : "exponentielles $\gg$ polynômes $\gg$ logarithmes".

Exemples :

1. Etant donné un entier $n \geqslant 1$, on a $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{e^x}{x^n}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$ car l'exponentielle l'emporte sur le polynôme dont l'effet pour $x \longrightarrow \infty$ est négligeable.

   On peut le montrer directement en utilisant le fait que $e^x > x$:
   $$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{x/(2n)}}{\sqrt{x}}\right)^{2n} > \left(\frac{x/(2n)}{\sqrt{x}}\right)^{2n} = \left(\frac{\sqrt{x}}{2n}\right)^{2n} = \frac{x^n}{(2n)^{2n}} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \infty$$

2. On a $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{7x^2 - 3x + 2}{2^x}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{2^x}\right) = 0$ car l'exponentielle (de base 2) l'emporte sur le polynôme dans la limite initiale du type "∞/∞".

3. On a $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{(x^2 + 2x - 7)e^{-2x}}{\ln(2x - 1)}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} e^{-2x} = 0$ car l'exponentielle l'emporte sur le polynôme et le logarithme dans la limite indéterminée initiale.

4. On a $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x^3 - 3x^2 + 7}{3x^3 + 2x - 4}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x^3}{3x^3}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$ car le comportement d'un polynôme lorsque $x \longrightarrow \pm\infty$ est dicté par celui de son monôme dominant.

Exercice 13 : Déterminer les limites suivantes

$$A = \lim_{x \to -\infty} (x^{54} e^x) \qquad B = \lim_{x \to 0} (x \ln x) \qquad C = \lim_{x \to \infty} \frac{(3x^2 - 3x + 4)^3}{(2x^3 + x^2 - 5)^2}$$

$$D = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{500} \ln(x)}{2^x} \qquad E = \lim_{x \to \infty} \frac{2e^x - 4}{3e^x + 5} \qquad F = \lim_{x \to -\infty} \frac{(3x + 4)^5}{(x^2 + 7x + 41)^2}$$

Exercice 14 : Etudier les fonctions suivantes .

$$f_1(x) = 2xe^{-x} \qquad f_2(x) = (x-2)^2e^x \qquad f_3(x) = x^2\ln(1/x) \qquad f_4(x) = \ln(x^2+4)$$

Exercice 15 : Le radium se désintègre selon la loi $N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/1600}$. si on considère une quantité N_0 de radium pur, alors t années plus tard il en restera une quantité $N(t)$.

1. Combien restera-t-il de radium dans 100 ans s'il y en a 50 mg maintenant ?
2. Quand restera-t-il 20 mg de radium s'il y en a 50 mg au début ?
3. Quelle est la demi-vie du radium (= temps durant lequel la moitié des atomes initialement présents se désintègre) ?

Exercice 16 : Le carbone-14 se désintègre selon une loi $N(t) = N_0 \cdot 2^{ct}$ et sa demi-vie est d'environs 5'700 ans. Des archéologues ont trouvé un os qui contient 20% de la quantité de carbone-14 contenue dans un os actuel. Quel est l'âge de cet os ?